УДК 519.23

НАХОЖДЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ МОДЕЛИ ДВУХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С КОНКУРЕНЦИЕЙ ЗА ПРИБОРЫ

А.Н. Дудин, С.А. Дудин, О.С. Дудина

Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь, dudin@bsu.by, dudins@bsu.by, dudina@bsu.by

В первой части данного исследования построена модель массового обслуживания, состоящая из двух систем, конкурирующих за приборы. Выписан инфинитезимальный генератор процесса изменения состояний системы. В данной статье для исследуемой модели найдено условие существования стационарного режима. Обсуждены способы нахождения стационарного распределения вероятностей ее состояний. Приведены формулы для нахождения основных характеристик производительности.

Ключевые слова: Конкурирующие системы; маркированный марковский входной поток; многомерные цепи Маркова; условие эргодичности.

PERFORMANCE EVALUATION OF THE MODEL CONSISTING OF QUEUING SYSTEMS WITH COMPETITION FOR SERVERS

A.N. Dudin, S.A. Dudin, O.S. Dudina

Belarusian State University, 4 Niezalieznasci Avenue, Minsk 220030, Belarus, dudins@bsu.by, dudina@bsu.by
Corresponding author: dudin@bsu.by

In the first part of research, we created a model consisting of two queuing systems competing for servers. The infinitesimal generator of the process of the system states has been written down. In this paper, the ergodicity condition is found. The possibilities of finding a stationary probability distribution are discussed. Formulas for calculating the main performance characteristics are given.

Keywords: Competing systems; marked Markovian arrival process; multidimensional Markov chains; ergodicity condition.

Введение

В работе [1] была построена модель массового обслуживания, состоящая из двух систем, конкурирующих за приборы. Запросы двух типов поступают в соответствии с маркированным марковским входным потоком. Процесс изменения состояний системы был задан многомерной цепью Маркова с непрерывным временем. Выписан инфинитезимальный генератор данной цепи Маркова.

В данной статье мы продолжаем исследования, проведенные в работе [1]. Найдено условие существования стационарного режима. Обсуждены способы нахождения стационарного распределения вероятностей, а также приведены основные формулы для нахождения стационарных характеристик производительности исследуемой модели. Далее будут использованы обозначения введенные в статье [1].

1. Условие существования стационарного режима и стационарные вероятности системы

Одним из важных этапов в исследовании модели массового обслуживания является определение условия существования стационарного режима. Сперва рассмотрим случай, когда запросы первого типа являются нетерпеливыми, т.е. параметр β строго больше нуля. В данном случае, исследуемая цепь Маркова $\xi_t, t \geq 0,$ принадлежит к классу ассимптотически квазитеплицевых цепей Маркова, см. [2]. Воспользовавшись результатами из работы [2], можно формально доказать интуитивно очевидный факт, что если запросы первого типа нетерпеливы, то стационарное распределение системы существуют при любых значениях других параметров системы. Простыми словами, условие существование стационарного режима системы является условием, при котором система функционирует так, что при большом числе запросов, находящихся в ней запросы уходят из системы в среднем быстрее, чем поступают. Действительно, если запросы в буфере нетерпеливы, то там не может скопиться неограниченное число запросов. При любой положительной интенсивности нетерпеливости существует такое достаточно большое число A запросов в буфере, при котором суммарная интенсивность ухода запросов из-за нетерпеливости $A\beta$ будет превышать интенсивность входного потока запросов первого типа λ_1.

Далее, рассмотрим случай, когда запросы первого типа являются терпеливыми, т.е. $\beta = 0$. В данном случае, при $i \geq J_{N-R-M}$ блоки генератора $G_{i,i}$, $G_{i,i-1}$ и $G_{i,i+1}$ будут иметь вид:

$$G_{i,i} = G^0 = I_{M+1} \otimes D_0 + \mu_2 C_M E_M^- \otimes I_W - \mu_2 C_M \otimes I_W +$$

$$E_M^+ \otimes D_2 - (N-M)\mu_1 I_{(M+1)W}, i \geq J_{N-R-M},$$

$$G_{i,i-1} = G^- = (N-M)\mu_1 I_{(M+1)W}, i > J_{N-R-M},$$

$$G_{i,i+1} = G^{+} = I_{M+1} \otimes D_1, i \ge J_{N-R-M}.$$

То есть, блоки генератора при $i \ge J_{N-R-M}$ не зависят от параметра $\boldsymbol{i}$. Это в свою очередь означает, что в данном случае цепь Маркова $\xi_t, t \ge 0$, принадлежит к классу квазитеплицевых цепей Маркова, см. [3]. Необходимое и достаточное условие существования стационарного режима квазитеплицевой цепи Маркова записывается в виде:

$$\boldsymbol{x}G^{+}\boldsymbol{e} < \boldsymbol{x}G^{-}\boldsymbol{e}, \tag{1}$$

где вектор $\boldsymbol{x}$ является единственным решение следующей системы

$$\boldsymbol{x}(G^{-} + G^{0} + G^{+})\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{xe} = 1.$$

После некоторых алгебраических преобразований можно показать, что неравенство (1) может быть преобразовано в неравенство:

$$\lambda_1 < \mu_1(N - M). \tag{2}$$

Условие эргодичности (2) также является интуитивно понятным. В случае, если запросы первого типа терпеливы для того, чтобы в системе не накапливалась бесконечно большая очередь, необходимо и достаточно, чтобы суммарная средняя интенсивность обслуживания всеми доступными для Системы 1 приборами превышала среднюю интенсивность поступления запросов первого типа.

Далее считаем, что условие эргодичности системы выполнено, то есть, существуют пределы

$$\pi(i,r,\nu) = \lim_{t\to\infty} P\{i_t = i, r_t = r, \nu_t = \nu\}.$$

Перенумеруем эти вероятности в соответствии с введенным лексикографическим порядком состояний цепи Маркова ξ_t и сформируем из них векторы-строки

$$\boldsymbol{\pi}(i,r) = (\pi(i,r,1), \pi(i,r,1), \ldots, \pi(i,r,W)),$$

$$\boldsymbol{\pi}_i = \boldsymbol{\pi}(i) = (\boldsymbol{\pi}(i,0), \boldsymbol{\pi}(i,1), \ldots, \boldsymbol{\pi}(i,R_i)),$$

где

$$R_i = \begin{cases} N - R, & \text{если } i < J_1, \\ N - R - k, & \text{если } J_k \le i < J_{k+1}, \\ M, & \text{если } i \ge J_{N-R-M}. \end{cases}$$

Стационарные вероятности цепи Маркова ξ_t находится как единственное решение системы

$$\boldsymbol{\pi} G = \mathbf{0},$$

$$\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{e} = 1,$$

где вектор $\boldsymbol{\pi}$ определяется как

$$\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{\pi}_0, \boldsymbol{\pi}_1, \boldsymbol{\pi}_2, \ldots).$$

В случае, когда запросы первого типа терпеливы, и цепь Маркова $\xi_t, t \geq 0,$ принадлежит к классу квазитеплицевых цепей Маркова, решение данной системы осуществляется стандартными методами, см., например, [3]. В противном случае, цепь Маркова $\xi_t, t \geq 0,$ принадлежит к классу ассимптотически квазитеплицевых цепей Маркова, и решение данной системы не может быть осуществлено стандартными методами. Для решения этой бесконечной системы мы рекомендуем использовать численно устойчивый алгоритм, разработанный в [4].

2. Показатели эффективности системы

Найдя стационарное распределение состояний системы, мы можем вычислить основные характеристики ее производительности.

Среднее количество запросов в обеих системах вычисляется как

$$L = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{R_i} (i+r) \boldsymbol{\pi}(i,r) \boldsymbol{e}.$$

Среднее количество запросов в Системе 1 находится как

$$L_1 = \sum_{i=1}^{\infty} i \boldsymbol{\pi}_i \boldsymbol{e}.$$

Среднее количество запросов в Системе 2 вычисляется как

$$L_2 = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{R_i} r \boldsymbol{\pi}(i,r) \boldsymbol{e}.$$

Среднее количество приборов в Системе 1 находится как

$$N_{serv-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (N - R_i) \boldsymbol{\pi}_i \boldsymbol{e}.$$

Среднее количество приборов в Системе 2 определяется как

$$N_{serv-2} = \sum_{i=0}^{\infty} R_i \boldsymbol{\pi}_i \boldsymbol{e} = N - N_{serv-1}.$$

Среднее количество занятых приборов в Системе 1 вычисляется как

$$N_{busy-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \min\{i, N - R_i\} \boldsymbol{\pi}_i \boldsymbol{e}.$$

Среднее количество заявок в буфере Системы 1 находится как

$$N_{buffer-1} = \sum_{i=R}^{\infty} \max\{i - (N - R_i), 0\} \boldsymbol{\pi}_i \boldsymbol{e} = L_1 - N_{busy-1}.$$

Средняя интенсивность выходного потока успешно обслуженных заявок из Системы 1 находится как

$$\lambda_{out-1} = \mu_1 N_{busy-1}.$$

Средняя интенсивность выходного потока успешно обслуженных заявок из Системы 2 вычисляется как

$$\lambda_{out-2} = \mu_2 L_2.$$

Вероятность потери заявки в Системе 2 по прибытии

$$P_{ent} = \frac{1}{\lambda_2} \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\pi}(i, R_i) D_2 \boldsymbol{e}.$$

Вероятность потери заявки в Системе 2 из-за принудительного прекращения обслуживания определяется как

$$P_{force} = \frac{1}{\lambda_2} \sum_{k=1}^{N-R-M} \boldsymbol{\pi}(J_k - 1, N - R - k + 1) D_1 \boldsymbol{e}.$$

Вероятность потери произвольного запроса в Системе 2 вычисляется как

$$P_{loss} = P_{ent} + P_{force} = 1 - \frac{\lambda_{out-2}}{\lambda_2}.$$

Вероятность потери заявки в Системе 1 из-за нетерпеливости вычисляется как

$$P_{imp} = \frac{\beta}{\lambda_1} \sum_{i=R}^{\infty} \sum_{r=1}^{R_i} (i - (N - R_i)) \boldsymbol{\pi}(i, r) \boldsymbol{e} = 1 - \frac{\lambda_{out-1}}{\lambda_1}.$$

Заключение

Исследована модель массового обслуживания, состоящая из двух систем, конкурирующих за приборы.Такая модель адекватно описывает, например, функционирование соты сети когнитивного радио. Построен процесс изменения состояний системы. Найдено условие существования стационарного режима системы. Обсуждены способы нахождения стационарных вероятностей состояний системы. Найдены выражения для вычисления основных характеристик производительности исследуемой модели. Эти выражения могут быть использованы для формулировки и решения задач оптимального резервирования имеющихся обслуживающих устройств.

Библиографические ссылки

1. Дудин А.Н., Дудин С.А., Дудина О.С. Моделирование систем массового обслуживания с конкуренцией за приборы // Труды Международного конгресса по информатике: информационные системы и технологии (CSIST'2022). Республика Беларусь, Минск. 27 – 28 октября 2022 г. Часть 1. 250 с.
2. Klimenok V.I., Dudin A.N. Multi-dimensional asymptotically quasi-Toeplitz Markov chains and their application in queueing theory // Queueing System, 2006. № 54. P. 245–259.
3. Neuts M. Structured Stochastic Matrices of M/G/1 Type and Their Applications. New York: Marcel Dekker. 1989.
4. Dudin S., Dudina O. Retrial multi-server queuing system with PHF service time distribution as a model of a channel with unreliable transmission of information // Applied Mathematical Modelling. 2019. T. 65. C. 676–695.