Пусть заданы $n \in \mathbb{N}$ и $Q > 1$. Определим множества

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{p(x) \in \mathbb{Z}[x] : \deg p \leqslant n,\ H(p) \leqslant Q\},$$

Для квадратного многочлена $p(x) = ax^2+bx+c$ дискриминант имеет вид $D(p) = b^2-4ac$.

Обозначим количество целочисленных неприводимых квадратичных многочленов высоты не более Q с дискриминантом, не превосходящим по абсолютной величине X

$$N^*(Q,X) := \#\{p \in \mathcal{P}_2(Q) : |D(p)| \leqslant X,\ p \text{ — неприводим над } \mathbb{Q}\}.$$

Теорема. *Для* $0 \leqslant X \leqslant Q^2/2$ *при* $Q \to +\infty$ *верно асимптотическое равенство*

$$N^*(Q,X) = \lambda \cdot QX + O(X^{3/2} + Q^2 \ln Q),$$

где $\lambda = 4(1+\ln 2)$.

Замечание: асимптотическое равенство в теореме содержательно при $X \gg Q \ln Q$.

Лемма. *Количество приводимых многочленов во множестве* $\mathcal{P}_2(Q)$ *имеет порядок* $Q^2 \ln Q$ *при* $Q \to \infty$.

Введем обозначение $V_2(\delta) = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 : |D(\mathbf{p})| \leqslant \delta,\ \|\mathbf{p}\|_\infty \leqslant 1\}$. Пользуясь соотношениями, известными из теории численного интегрирования, и леммой, количество многочленов можно оценить как $N^*(Q,X) = Q^3 \mathrm{mes}_3\, V_2(X/Q^2) + O(Q^2 \ln Q)$.

Произведя необходимые вычисления, получаем $\mathrm{mes}_3 V_2(\delta) = 4(1+\ln 2)\delta + O(\delta^{3/2})$. Откуда следует теорема.

Литература

1. Ван дер Варден Б.Л. *Алгебра.* М.: Наука, 1976.
2. Beresnevich V., Bernik V., Götze F. *The distribution of close conjugate algebraic numbers* // Compositio Mathematica. 2010. Vol. 146, No. 5. P. 1165–1179.
3. Bugeaud Y., Mignotte M. *Polynomial root separation* // Int. J. Number Theory. 2010. Vol. 6, No. 3. P. 587–602.
4. Bernik V., Götze F., Kukso O. *Lower bounds for the number of integer polynomials with given order of discriminants* // Acta Arithm. 2008. Vol. 133, No. 4. P. 375–390.

О ПОВЕДЕНИИ ЭЛЕМЕНТОВ ПРОСТОГО ПОРЯДКА ИЗ ЦИКЛА ЗИНГЕРА В ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ СПЕЦИАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ

А.С. Кондратьев[1], А.А. Осиновская[2], И.Д. Супруненко[2]

[1] Институт математики и механики УрО РАН
С. Ковалевской 16, 620990 Екатеринбург, Россия
a.s.kondratiev@imm.uran.ru
[2] Институт математики НАН Беларуси
Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь
{anna,suprunenko}@im.bas-net.by

Пусть G — конечная группа и V — G-модуль над некоторым полем. Говорят, что нетривиальный элемент группы G действует свободно на V, если он не имеет ненулевых неподвижных векторов в V. Большой интерес вызывает проблема описания неприводимых G-модулей, где некоторый элемент простого порядка из G действует свободно. Результаты по этой проблеме имеют многочисленные приложения, в частности, при исследовании распознавания конечных простых групп по спектру (множеству порядков элементов) или графу простых чисел, а также при изучении строения конечных групп с несвязным графом простых чисел.

Пусть p — простое число, $q = p^l$, $\mathbb{F}_q$ — поле из q элементов и $G = SL_n(q)$. Циклом Зингера группы G называется ее циклическая подгруппа максимального порядка, т. е. порядка $(q^n - 1)/(q - 1)$ (см. [1]). Изучается задача классификации абсолютно неприводимых G-модулей в собственной характеристике, на которые элемент заданного простого порядка m из цикла Зингера группы G действует свободно. В данной работе эта задача решена в случае, когда вычет числа q по модулю m порождает мультипликативную группу поля порядка m, а также при $m = 5$.

Далее мы пользуемся терминологией и обозначениями из [2]. Пусть y — нескалярный элемент простого порядка m из цикла Зингера группы G, $\overline{q}$ — образ q при каноническом гомоморфизме из кольца целых чисел в поле $\mathbb{F}_m$, P — алгебраически замкнутое поле характеристики p, $\mathbf{G} = SL_n(P)$, $r = n - 1$, $\omega_1, \ldots, \omega_r$ — фундаментальные веса группы $\mathbf{G}$, $\omega(M)$ — старший вес неприводимого $\mathbf{G}$-модуля M.

Пусть Irr_q — множество неприводимых $\mathbf{G}$-модулей со старшими весами $\sum_{i=1}^{r} a_i\omega_i$, где все $a_i < q$ (рассматриваемых с точностью до изоморфизма). Известно, что ограничение $M|G$ неприводимо для любого $M \in \mathrm{Irr}_q$ и совокупность таких ограничений образует полный набор неприводимых PG-модулей. Поэтому достаточно выяснить, на каких модулях из Irr_q элемент y действует свободно.

Теорема 1. *Пусть $\overline{q}$ порождает группу $\mathbb{F}_m^*$ и $M \in \mathrm{Irr}_q$ — нетривиальный модуль. Элемент y действует свободно на M тогда и только тогда, когда $\omega(M) = p^j\omega_1$ или $p^j\omega_r$.*

Следствие. *Утверждение теоремы 1 верно при $m = 3$.*

Теорема 2. *Пусть $m = 5$ и $M \in \mathrm{Irr}_q$ — нетривиальный модуль.*

1) *Предположим, что $q \equiv 4 (\mathrm{mod}\, 5)$. Тогда n четно и элемент y действует свободно на M в точности тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

a) $\omega(M) \in \{p^j\omega_1, p^j\omega_r, 3p^j\omega_1, 3p^j\omega_r, p^j(2\omega_1 + \omega_r), p^j(\omega_1 + 2\omega_r)\}$;

b) $n \geqslant 6$, $\omega(M) \in \{p^j\omega_3, p^j\omega_{r-2}\}$;

c) $n \geqslant 4$, $\omega(M) \in \{p^j(\omega_2 + \omega_r), p^j(\omega_1 + \omega_{r-1})\}$;

d) $\omega(M) = p^a\lambda + p^b\mu$, $\lambda \in \{\omega_1, \omega_r\}$, $\mu \in \{\omega_2, \omega_{r-1}, \omega_1 + \omega_r, 2\omega_1, 2\omega_r\}$, $a \neq b$ *и при* $p \equiv \pm 2 (\mathrm{mod}\, 5)$ *число* $b - a$ *четно, если* $b > a$, *и число* $l + b - a$ *четно при* $b < a$.

e) $\omega(M) = p^a\lambda + p^b\mu$, $\lambda, \mu \in \{\omega_1, \omega_r\}$, $a < b$, $p \equiv \pm 2 (\mathrm{mod}\, 5)$ *и* $b - a$ *нечетно.*

f) $\omega(M) = p^a\lambda + p^b\mu + p^c\nu$, $\lambda, \mu, \nu \in \{\omega_1, \omega_r\}$, $a < b < c$, *и при* $p \equiv \pm 2 (\mathrm{mod}\, 5)$ *числа* $b - a$ *и* $c - a$ *четны.*

В пунктах a) и d) в тех случаях, когда в формулах для $\omega(M)$ встречаются коэффициенты 2 или 3, предполагается, что $p > 2$ или $p > 3$ соответственно.

2) *Предположим, что $q \equiv \pm 2 (\mathrm{mod}\, 5)$. Тогда $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$ и элемент y действует свободно на M в точности тогда, когда $\omega(M) = p^j\omega_1$ или $p^j\omega_r$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке УрО РАН (проект 12-С-1-1009) и НАН Беларуси в рамках совместного проекта «Алгебраические и конечные группы и их представления: исследование проблем нормального строения анизотропных алгебраических групп и действий определенных подгрупп, важных для приложений, в модулях для конечных групп Шевалле».

Литература

1. Huppert B. *Endliche Gruppen I.* Berlin: Springer-Verlag, 1967.

2. Бурбаки Н. *Группы и алгебры Ли* Гл. VII–VIII. М.: Мир, 1978.