

i) $A = G^{\mathfrak{U}} = N_1 \times \dots \times N_t$, где N_i — минимальная нормальная подгруппа в G , $i = 1, \dots, t$;

ii) для всякого $p \in \pi(A)$ любая n -максимальная подгруппа группы G индуцирует на силовской p -подгруппе из A группу автоморфизмов, являющуюся расширением p -группы при помощи абелевой группы экспоненты, делящей $p - 1$.

Литература

1. Mann A. *Finite groups whose n -maximal subgroups are subnormal* // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 132. P. 395–409.

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТОЧЕК С АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ КООРДИНАТАМИ ВБЛИЗИ ГЛАДКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Э.И. Ковалевская, О.В. Рыкова

Белорусский государственный аграрный технический университет
Независимости 99, Минск, Беларусь
ekovalevsk@mail.ru, oly8521@yandex.ru

Пусть $P(x) \in Z[x]$ многочлен

$$P(x) = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Через $H = H(P) = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$ обозначим высоту многочлена, $\deg P = n$, а через $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — корни многочлена $P(x)$. Если $P(t)$ — неприводимый многочлен, и наибольший общий делитель его коэффициентов $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0) = 1$, то многочлен $P(t)$ называется минимальным многочленом для каждого α_j , $1 \leq j \leq n$, и $H(\alpha_j) = H(P)$.

Для некоторых положительных констант μ_1, μ_2, μ_3 рассмотрим параллелепипед

$$\Pi_1 = I_1 \times I_2 \times I_3 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subset [-1/2, 1/2]^3 \subset R^3$$

такой, что

$$\Pi_1 \bigcap \{|x - y| < 0,01, |y - z| < 0,01, |x - z| < 0,01\} = 0$$

и

$$I_1 = b_1 - a_1 = Q^{-\mu_1}, \quad I_2 = b_2 - a_2 = Q^{-\mu_2}, \quad I_3 = b_3 - a_3 = Q^{-\mu_3}.$$

Заметим, что длины I_1, I_2, I_3 малы при условии, что $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0, \mu_3 > 0$ и Q достаточно велико.

Введем класс многочленов

$$P_n(Q) = \{P \in Z[x] : \deg P = n, n \geq 3, |a_n| \gg H(P), H(P) \leq Q\}.$$

Из условия $|a_n| \gg H(P)$ следует, что корни многочлена P ограничены [1].

Пусть $K_n(\Pi_1, Q)$ — множество точек $(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k)$, $1 \leq i < j < k \leq l$, таких что:

- 1) $(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k)$ — действительные корни многочлена $P \in P_n(Q)$;
- 2) $(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k) \in \Pi_1$.

Условие 2) исключает совпадение корней $\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k$.

Задача заключается в том, чтобы оценить мощность множества $K_n(\Pi_1, Q)$.

Теорема 1. Пусть $0 < \mu_i < 1/3$, $i = \overline{1, 3}$. Тогда

$$\#K_n(\Pi_1, Q) \gg Q^{n+1-\mu_1-\mu_2-\mu_3}.$$

Теорема 2. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике $I_1 \times I_2$ и пусть

$$\mathfrak{I}(Q, \lambda) = \{(x, y, z) : x \in I_1, y \in I_2, |z - f(x, y)| < Q^{-\lambda}, 0 < \lambda < 1/3\}.$$

Тогда существует, по крайней мере, $c(n)Q^{n+1-\lambda}$ троек алгебраических точек, таких что $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathfrak{I}(Q, \lambda)$.

Используя теорему 1, можем получить оценку снизу для числа алгебраических точек вблизи поверхности $z = f(x, y)$. Основу доказательства составляет метрическая теорема о диофантовых приближениях точек R^3 , лежащих в кубах малых размеров.

Литература

- Спринджук В.Г. *Проблема Малера в метрической теории чисел*. Минск: Наука и техника, 1967.

О КОЛИЧЕСТВЕ МНОГОЧЛЕНОВ НАД КОЛЬЦОМ ГАУССОВЫХ ЦЕЛЫХ С ПАРОЙ БЛИЗКИХ КОРНЕЙ

Д.В. Коледа¹, О.С. Куксо²

¹ Институт математики НАН Беларусь
Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь
koledad@rambler.ru

² Билефельд, Германия

Пусть $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[i][x]$ многочлен степени n , а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ — корни p , т. е. $p(x) = a_n(x - \alpha_1)\dots(x - \alpha_n)$. Число

$$D(p) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$

называется дискриминантом многочлена p . Известно, что дискриминант — целочисленный многочлен от $n+1$ переменных коэффициентов многочлена p (например, см. [1]).

Всюду $\#M$ обозначает число элементов во множестве M , а $\text{mes}_k M$ — k -мерную меру Лебега множества $M \subset \mathbb{R}^d$ ($k \leq d$). Также будем использовать символ Виноградова \ll . Выражение $f \ll g$ равносильно тому, что $f \leq c_1 g$ для некоторой постоянной c_1 , которая зависит только от степени n . Выражение $f \asymp g$ означает, что $g \ll f \ll g$.

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Для норм будем использовать следующие обозначения $\|\mathbf{x}\|_m = (\sum_{i=1}^d |x_i|^m)^{1/m}$, $m \geq 1$, $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|$. Евклидову норму $\|\cdot\|_2$ для краткости будем обозначать просто $\|\cdot\|$.

Поле \mathbb{C} будем рассматривать как векторное пространство над \mathbb{R} размерности $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

Высоту многочлена $p \in \mathbb{C}[x]$ определим как $H(p) = \max_{0 \leq i \leq n} \|a_i\|$, где $\|\cdot\|$ — некоторая норма комплексного числа, рассматриваемого как вектор из \mathbb{R}^2 . Удобно выбрать норму $\|\cdot\|_\infty$, т.е. для $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$, $\|z\| = \max\{|x|, |y|\}$.

Многочлены $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$ будем отождествлять с векторами коэффициентов $\mathbf{p} = (a_n, \dots, a_1, a_0) \in \mathbb{R}^{2n+2}$ (здесь учитывается, что каждый коэффициент многочлена — вектор из \mathbb{R}^2). В этих обозначениях $H(p) = \|\mathbf{p}\|_\infty$.

Пусть заданы $n \in \mathbb{N}$, $Q > 1$ и $\delta \in (0, 1)$. Определим следующие множества:

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{p(x) \in \mathbb{Z}[i][x] : \deg p \leq n, H(p) \leq Q\},$$

$$\mathcal{F}_n(Q, \delta) = \{p(x) \in \mathcal{P}_n(Q) : \exists \alpha_1, \alpha_2 \quad |\alpha_1 - \alpha_2| \leq \delta\}.$$