

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе и
образовательным инновациям

О.Г. Прохоренко



Регистрационный № УД – 11168/уч.

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

**Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности**

- | | |
|---------------|--|
| 1-31 03 03 | Прикладная математика (по направлениям) |
| | направление специальности |
| 1-31 03 03-01 | Прикладная математика (научно-производственная деятельность) |

2022 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 03-2013 и учебных планов № G31-173/уч., № G31и-190/уч. от 30.05.2013 г.

СОСТАВИТЕЛЬ:

И.В. Никифоров, доцент кафедры вычислительной математики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук

РЕЦЕНЗЕНТ:

Краков М.С., профессор кафедры ЮНЕСКО "Энергосбережение и возобновляемые источники энергии" БНТУ, доктор физико-математических наук

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой вычислительной математики Белорусского государственного университета
(протокол № 14 от 10.05.2022);

Советом факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета
(протокол № 9 от 24.05.2022)

Заведующий кафедрой
вычислительной математики
доцент, кандидат физ.-мат. наук


Репников В.И.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины «Метод конечных элементов» – формирование у студентов практических навыков применения компьютерного моделирования нелинейных физических процессов различной природы в областях сложной геометрической формы с использованием методов конечных элементов.

В рамках поставленной цели **задачи** учебной дисциплины состоят в следующем:

- основные понятия и задачи, связанные с аппроксимацией функциональных пространств Соболева;
- основные алгоритмы вариационных и проекционных методов, в частности методы Рунге и Галеркина;
- обучение студентов основам программирования на языке Matlab и его использованию для численного моделирования методом конечных элементов.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием: учебная дисциплина «Метод конечных элементов» относится к **циклу** дисциплин специализации компонента учреждения высшего образования.

Связи с другими учебными дисциплинами. Основой для изучения данной дисциплины являются такие дисциплины как: "Математический анализ", "Дифференциальные уравнения", "Функциональный анализ", "Методы численного анализа", "Программирование". Данный курс связан с дисциплинами "Уравнения математической физики", "Компьютерное моделирование. Вводный курс".

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины "Метод конечных элементов" должно обеспечить формирование следующих академических, социально-личностных и профессиональных компетенций:

академические компетенции:

АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и прикладных задач.

АК-2. Владеть системным и сравнительным анализом.

АК-3. Владеть исследовательскими навыками.

АК-4. Уметь работать самостоятельно.

социально-личностные компетенции:

СЛК-3. Обладать способностью к межличностным коммуникациям.

профессиональные компетенции:

ПК-1. Работать с научно-технической, нормативно-справочной и специальной литературой.

ПК-2. Заниматься аналитической и научно-исследовательской деятельностью в области прикладной математики.

ПК-19. Взаимодействовать со специалистами смежных профилей.

ПК-23. Владеть современными средствами телекоммуникаций.

В результате изучения дисциплины студент должен:

знать:

– основные понятия и задачи, связанные с аппроксимацией функциональных пространств Соболева;

– основные алгоритмы вариационных и проекционных методов (Ритца, Галеркина);

уметь:

– строить проекционные (вариационные) постановки начально-краевых задач математической физики для нахождения обобщенных решений;

– эффективно реализовывать в коде на языке высокого уровня технологию сборки с использованием векторизации глобальных матриц жесткости, масс и глобального вектора нагрузки (правой части), а также решение полученной системы уравнений прямыми и итерационными методами;

владеть:

– навыками самостоятельного анализа и решения теоретических и практических задач, связанных с численным решением краевых задач математической физики методом конечных элементов;

– подходами к выбору численного метода, практически пригодного для проведения вычислительного эксперимента по данной модели;

– навыками использования языка программирования Matlab для компьютерного моделирования физических процессов и анализа данных.

Структура учебной дисциплины.

Дисциплина изучается в 7 семестре дневной формы получения высшего образования. Всего на изучение учебной дисциплины “Метод конечных элементов” отведено:

– для очной формы получения высшего образования – 159 часов, в том числе 68 аудиторных часа: лекции – 34 часа, лабораторные занятия – 30 часов (из них 12 ч/ДО), управляемая самостоятельная работа – 4 ч(ДО).

Трудоемкость учебной дисциплины – 4 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации – зачет и экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1. Введение.

Область применения МКЭ, основная концепция и преимущества. Пример построения вариационной и проекционной задач на основе классической постановки краевой задачи для линейного дифференциального уравнения.

Тема 2. Ортогональные проекции на пространство кусочно-непрерывных функций.

Рассматривается аппроксимация функций в пространстве кусочно-непрерывных линейных полиномов. Находится элемент наилучшего среднеквадратичного приближения.

Тема 3. Поэлементная сборка матрицы масс и вектора нагрузки в МКЭ.

Приводится базовый алгоритм сборки матрицы масс итоговой системы МКЭ и вектора правой части с использованием линейных финитных функций Лагранжа.

Тема 4. Вариационная формулировка МКЭ для одномерной краевой задачи.

Рассматривается решение задачи Дирихле для одномерного уравнения теплопроводности конечно-элементным методом Ритца.

Тема 5. Вариационная формулировка МКЭ для двумерной краевой задачи.

Рассматривается решение смешанной краевой задачи для двухмерного уравнения теплопроводности конечно-элементным методом Ритца.

Тема 6. Функциональные пространства.

Рассматриваются необходимые сведения из теории линейных уравнений в пространстве Гильберта и элементы теории пространств Соболева.

Тема 7. Эквивалентные формулировки операторной задачи.

Рассматриваются операторная, вариационная и проекционная задачи в энергетическом пространстве симметрического положительно определенного оператора. Доказывается их эквивалентность.

Тема 8. Сходимость методов Ритца и Галеркина.

Рассматривается сходимость конечно-элементных методов Ритца и Галеркина в энергетической норме к обобщенному решению на последовательности конечномерных подпространств.

Тема 9. Проекционная формулировка МКЭ для двухточечной краевой задачи.

Рассматриваются операторная постановка для смешанной краевой задачи одномерного уравнения теплопроводности и эквивалентная проекционная формулировка на последовательности конечномерных подпространств кусочно-линейных восполнений.

Тема 10. Одномерные конечные элементы.

Рассматриваются локальные симплексные координаты для описания геометрии элементов и построения лагранжевой аппроксимации функций на референтном (стандартном) элементе. Приводится методика построения функций форм различного порядка для одномерных элементов.

Тема 11. Треугольные линейные элементы.

Рассматривается изопараметрический линейный элемент, геометрия которого и функции формы определяются симплексными (площадными) координатами. Интегрирование в симплексных координатах

Тема 12. Треугольные квадратичные элементы.

Рассматривается изопараметрический треугольный элемент с криволинейными в общем случае сторонами. Построение функций формы, преобразование координат, вычисление производных.

Тема 13. Четырехугольные элементы.

Рассматриваются билинейные и квадратичные четырехугольные элементы. Построение функций формы и изопараметрического отображения элементов на референтный квадрат в локальной системе координат, вычисление производных.

Тема 14. Трехмерные конечные элементы.

Рассматриваются линейные изопараметрические элементы: тетраэдр и гексаэдр. Построение функций формы и отображения элементов на референтные тетраэдр и куб в локальных системах координат, вычисление производных.

Тема 15. Численное интегрирование в МКЭ.

Построение кубатурных формул для вычисления интегралов на одномерных, треугольных и четырехугольных элементах.

Тема 16. Решение нестационарных задач.

На примере нестационарного уравнения теплопроводности рассматриваются явная и неявная конечно-элементные схемы Галеркина и методы реализации.

Тема 17. Решение краевой задачи для системы дифференциальных уравнений.

Рассматривается решение двумерной задачи диффузии-реакции методом Галеркина на четырехугольных 9-узловых элементах.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
 Дневная форма получения образования с применением электронных
 средств обучения (ДО)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов			Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Лабораторные занятия	Лабораторные занятия /ДО		
1	Введение.	2	2			Экспресс-опрос
2	Ортогональные проекции на пространство кусочно-непрерывных функций	2	2			Экспресс-опрос
3	Поэлементная сборка матрицы масс и вектора нагрузки в МКЭ	2	2			Экспресс-опрос
4	Вариационная формулировка МКЭ для одномерной краевой задачи	2	2			Экспресс-опрос
5	Вариационная формулировка МКЭ для двумерной краевой задачи	2		2(ДО)		Экспресс-опрос
6	Функциональные пространства	2		2(ДО)		Экспресс-опрос
7	Эквивалентные формулировки операторной задачи.	2	2			Экспресс-опрос
8	Сходимость методов Рунге и Галеркина	2		2(ДО)		Экспресс-опрос
9	Проекционная формулировка МКЭ для двухточечной краевой задачи	2		2(ДО)		Экспресс-опрос
10	Одномерные конечные элементы	2	2			Коллоквиум
11	Треугольные линейные элементы	2			2(ДО)	Отчет по лаб. работе
12	Треугольные квадратичные элементы	2				Экспресс-опрос
13	Четырехугольные элементы	2	2			Контрольная работа
14	Трехмерные конечные элементы	2	2			Отчет по лаб. работе
15	Численное интегрирование в МКЭ	2	2		2(ДО)	Отчет по лаб. работе
16	Решение нестационарных задач	2				Экспресс-опрос
17	Решение краевой задачи для системы дифференциальных уравнений.	2		2(ДО)		Экспресс-опрос
	Всего	34	18	12	4	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Ö.Özgün, M.Kuzuoğlu. MATLAB-based Finite Element Programming in Electromagnetic Modeling. CRC Press, Inc., 2019, 427 pp.
2. M.Asadzadeh. An Introduction to the Finite Element Method for Differential Equations. John Wiley & Sons, 2021, 352pp.
3. J.N. Reddy. Introduction to the Finite Element Method. 4th Edition, McGraw-Hill Education, 2019, 816 pp.
4. G.Li. Introduction to the Finite Element Method and Implementation with MATLAB®. Cambridge: Cambridge University Press, 2020.
5. А.В. Солдаткин, Е.С. Баранова. Введение в метод конечных элементов. Санкт-Петербург: БГТУ, 2020, 122 стр.

Перечень дополнительной литературы

1. Стренг, Гилберт. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977, 348с.
2. В.П. Ильин Методы и технологии конечных элементов. Новосибирск: ИМиМГ СО РАН, 2007, 370 с.
2. В.И. Репченков. Физические основы метода конечных элементов: пособие для студентов механико-математического факультета Минск: БГУ, 2009, 90 с.
3. Ф.Сьярле. Метод конечных элементов для эллиптических задач. Москва: Мир, 1980, 512с.
4. Ж.Деклу. Методы конечных элементов. Москва: Мир, 1976, 95с.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Для текущего контроля качества усвоения знаний студентами используется следующий диагностический инструментарий:

- отчет по лабораторной работе;
- письменная контрольная работа;
- устные экспресс-опросы;
- коллоквиум.

Лабораторные работы, как правило, представляют собой задания, включающие постановку дифференциальной задачи, описывающей заданную физическую систему, а также программную реализацию указанного метода на языке программирования Matlab, проведение вычислительного эксперимента и комментарии по его итогам. Рекомендуемая форма отчетности по лабораторной работе – письменный отчет. Лабораторная

работа оценивается по стандартной 10-балльной шкале. Оценка за лабораторную работу может быть снижена в случае несвоевременного выполнения.

Письменная контрольная работа проводится для контроля знаний по одному или нескольким разделам дисциплины. Они включают 4–5 заданий и оцениваются по 10-балльной шкале. В случае неудовлетворительной оценки контрольная работа может быть переписана.

Устный экспресс-опрос студентов проводится в свободной форме в течение лабораторных и лекционных занятий. Его результаты учитываются преподавателем при выставлении итоговой отметки в конце семестра.

Коллоквиум – проводится в форме беседы преподавателя со студентами по выбранным разделам. Его результаты учитываются преподавателем при выставлении итоговой отметки в конце семестра.

Формой текущей аттестации по дисциплине «Метод конечных элементов» учебным планом предусмотрен зачет и экзамен.

При формировании итоговой отметки используется рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний и текущей аттестации в итоговую отметку:

- отчет по лабораторной работе – 50 %;
- контрольная работа – 20 %;
- коллоквиум – 20 %,
- устный экспресс-опрос – 10 %.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей успеваемости (рейтинговой системы оценки знаний) и экзаменационной отметки с учетом их весовых коэффициентов. Вес отметки по текущей успеваемости составляет 40 %, экзаменационная отметка – 60 %.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

ТЕМА 11. Треугольные линейные элементы

Задание 1. Решение уравнения Пуассона методом Галеркина (2 ч/ДО)

1. Построить конечно-элементную формулировку Галеркина для решения модельного уравнения Пуассона с использованием линейных треугольных элементов.

2. Построить триангуляцию расчетной области используя пакет `pde toolbox` в интегрированной среде Matlab.

3. Провести сборку матрицы системы и вектора правой части, найти приближенное решение и оценить его точность.

Форма контроля – отчет по лабораторной работе.

ТЕМА 15. Численное интегрирование в МКЭ.

Задание 2. Решение уравнения Лапласа методом Галеркина (2 ч/ДО)

1. Построить конечно-элементную формулировку Галеркина для решения модельного уравнения Лапласа с использованием квадратичных треугольных элементов.

2. Построить триангуляцию расчетной области используя пакет `pre toolbox` в интегрированной среде Matlab.

3. Провести сборку матрицы системы и вектора правой части с использованием трехточечных квадратур для вычисления интегралов, найти приближенное решение и оценить его точность.

Форма контроля – отчет по лабораторной работе.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации занятий используется **практико-ориентированный подход**, который предполагает:

- освоение содержания образования через решения практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности.

Также при организации образовательного процесса используется **метод группового обучения**, который представляет собой форму организации учебно-познавательной деятельности обучающихся, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине «Метод конечных элементов» следует использовать современные информационные технологии: разместить в сетевом доступе комплекс учебных и учебно-методических материалов (учебно-программные материалы, методические указания к лабораторным занятиям, материалы текущего контроля и текущей аттестации, позволяющие определить соответствие учебной деятельности обучающихся требованиям

образовательных стандартов высшего образования и учебно-программной документации, в т.ч. вопросы для подготовки к зачету и экзамену, список рекомендуемой литературы, информационных ресурсов и др.). Эффективность самостоятельной работы студентов проверяется в ходе текущего и итогового контроля знаний. Для общей оценки качества усвоения студентами учебного материала рекомендуется использование рейтинговой системы.

Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Линейные операторы и функционалы.
2. Эквивалентные формулировки операторной задачи.
3. Поэлементная сборка матрицы масс и вектора нагрузки.
4. Вариационная формулировка для одномерной краевой задачи
5. Вариационная формулировка для двухмерной краевой задачи
6. Функциональные пространства
7. Линейные операторы и функционалы.
8. Эквивалентные формулировки операторной задачи.
9. Сходимость методов Рунге и Галеркина
10. Проекционная формулировка МКЭ для одномерной краевой задачи.
11. Лагранжева интерполяция на одномерных элементах.
12. Линейные треугольные элементы.
13. Квадратичные треугольные элементы.
14. Четырехугольные билинейные и квадратичные элементы.
15. Трехмерные изопараметрические элементы.
16. Квадратурные формулы на конечных элементах.
17. Решение нестационарных задач.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы по изучаемой учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ

на _____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры вычислительной математики (протокол №__ от _____)

Заведующий кафедрой

доцент, канд. ф.-м. н.

(степень, звание)

_____ (подпись)

В.И. Репников

(И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета

доцент, доктор. техн. н.

(степень, звание)

_____ (подпись)

А.М. Недзведь

(И.О.Фамилия)