Теорема 1. *Пусть G — конечная группа и p — фиксированное простое число, делящее ее порядок. Если p^2 не делит $i_G(x)$ для всякого $x \in G$, то $G/R_p(G)$ имеет силовскую p-подгруппу порядка p. В частности, если индекс любого элемента группы не делится на 4, то она разрешима.*

Таким образом, задача определения строения группы G с указанным свойством свелась к выяснению строения p-разрешимой группы $R_p(G)$.

Теорема 2. *Пусть G — конечная группа с тривиальным центром, p — фиксированное простое число, делящее ее порядок. Если p^2 не делит $i_G(x)$ для всякого $x \in G$, то G имеет силовскую p-подгруппу порядка p.*

Следствие. *Пусть G — конечная группа. Если $i_G(x)$ не делится на квадраты простых чисел для всякого $x \in G$, то G сверхразрешима.*

Существенную роль в доказательствах обеих теорем имеет следующая

Лемма. *Пусть G — конечная группа $x \in G$ и $N \lhd G$. Тогда*

$$i_G(x) = i_N(x) i_{G/N}(x) f(x, N),$$

где $f(x, N)$ — целое число.

Полученные результаты обобщают соответствующие теоремы из [2].

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 10-01-00324.

Литература

1. Berkovich Ya. G., Kazarin L. S. *Indices of elements and normal structure of a finite group* // J. Algebra. 2005. V. 283. P. 564–583.

2. Chillag D., Herzog M. *On the length of the conjugacy classes of finite groups* // J. Algebra. 1990. V. 131. P. 110–125.

ДИОФАНТОВЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ В РАЗНЫХ МЕТРИКАХ

М.А. Калугина

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
Бровки 6, 220013 Минск, Беларусь
marina_kalugina@list.ru

В работе представлены результаты исследования проблемы совместных диофантовых приближений целочисленными многочленами над полями $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}^2$, $\mathbb{Q}_p$. Обозначим

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

многочлен с целыми коэффициентами степени не выше n и высотой $H = H(P) = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |a_j|$. Тогда задача будет состоять в изучении аппроксимации нуля значениями $|P(x)|$, $|P(z_1)|$, $|P(z_2)|$, $|P(\omega)|_p$, где $x \in \mathbb{R}$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\omega \in \mathbb{Q}_p$.

Пусть $\mu_1(A)$ — мера Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{R}$, $\mu_2(A)$ — мера Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{C}$, $\mu_3(A)$ — мера Хаара измеримого множества $A \subset \mathbb{Q}_p$. Тогда можно ввести меру для множества $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{Q}_p$ как $\mu(A) = \mu_1(A)\mu_2^2(A)\mu_3(A)$. Обозначим $L_n(x)$ множество всех действительных чисел x, для которых неравенство $|P(x)| < H^{-v}$ имеет бесконечно много решений P. В [1] показано, что это множество имеет нулевую меру при $v > n$.

Пусть $\psi(H)$ — монотонно убывающая функция, $\bar{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4)$, $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ — векторы с действительными положительными координатами, а $L_n(\bar{\nu}, \bar{\lambda})$ обозначает множество точек, лежащих в параллелепипеде $T = I \times K_1 \times K_2 \times D$, где I — интервал в $\mathbb{R}$, K_1, K_2 — круги в $\mathbb{C}$, D — цилиндр в $\mathbb{Q}_p$, для которых система неравенств

$$|P(x)| \leqslant H^{-\nu_1}\psi^{\lambda_1}(H), \quad |P(z_1)| \leqslant H^{-\nu_2}\psi^{\lambda_2}(H),$$

$$|P(z_2)| \leqslant H^{-\nu_3}\psi^{\lambda_3}(H), \quad |P(\omega)|_p \leqslant H^{-\nu_4}\psi^{\lambda_4}(H).$$

имеет бесконечно много решений P с $\nu_1 + 2\nu_2 + 2\nu_3 + \nu_4 = n - 5$, $\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 = 1$.

Теорема. *Если* $n \geqslant 5$ *и* $\sum_{H=1}^{\infty} \psi(H) < \infty$, *то* $\mu(L_n(\bar{\nu}, \bar{\lambda})) = 0$.

Теорема обобщает результат в $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$, изложенный в [2].

Литература

1. Спринджук В. Г. *Проблема Малера в метрической теории чисел.* Мн.: Наука и техника, 1967.

2. Budarina N., Dickinson D., Bernik V. *Simultaneous Diophantine approximation in the real, complex and p-adic fields* // Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 2010. Vol. 149, no. 2. P. 193–216.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРИМИНАНТОВ

О.Н. Кемеш

Белорусский государственный аграрный технический университет
Независимости 99, 220072 Минск, Беларусь
inna.morozova@tut.by

Понятие дискриминанта является ключевым при изучении многочленов. Зная только эту характеристику, мы мгновенно можем определить, действительные или комплексные корни имеет квадратный трехчлен, и найти расстояние между корнями. Однако зависимость дискриминанта от коэффициентов довольно сложна. Имеются классические нетривиальные результаты о распределении дискриминантов многочленов третьей степени [1, 2].

Мы предлагаем геометрическую интерпретацию одной из задач о дискриминантах, позволяющую решить задачу о распределении дискриминантов целочисленных многочленов второй степени.

Пусть $P(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{Z}[x]$, $H(p) = \max(|a|, |b|, |c|)$ — высота $P(x)$, $D(P) = b^2 - 4ac$ — дискриминант $P(x)$, Q — достаточно большое натуральное число, $v > 0$ и

$$\mathcal{P}(Q, v) = \{P(x) \in \mathbb{Z}[x] : \deg P = 2,\ H(P) \leqslant Q,\ |D(P)| < Q^{2-2v}\}.$$

Число многочленов в классе $\mathcal{P}(Q, 0)$ равно $c_1 Q^3$, $c_1 > 0$. Задача состоит в нахождении числа многочленов $\#\mathcal{P}(Q, v)$ при изменении v.

Решение задачи сводится к нахождению числа точек с целыми координанатами в трехмерном кубе $[-Q, Q]^3$, которые принадлежат телу $|b^2 - 4ac| < Q^{2-2v}$ или $4ac - Q^{2-2v} < b^2 < 4ac + Q^{2-2v}$. Сделаем замену переменных $a = x + y$, $c = x - y$. В новой системе координат искомое тело можно записать так: $4(x^2 - y^2) - Q^{2-2v} < b^2 < 4(x^2 - y^2) + Q^{2-2v}$. Построим графическую интерпретацию и убедимся, что в системе координат (x, b, y) надо посчитать число целых точек внутри трехмерного куба $|x - y| \leqslant Q$, $|x + y| \leqslant Q$, $|b| \leqslant Q$, лежащих между двухполостным и однополостным гиперболоидами. Для их подсчета зафиксируем две переменные и найдем длину отрезка, соединяющего указанные гиперболоиды. Для этого выберем более удобную для нахождения отрезка проекцию гиперболоидов на координатные