

Министерство образования республики Беларусь
Белорусский Государственный университет
Механико-математический факультет
Кафедра теоретической и прикладной механики

СОГЛАСОВАНО

Заведующий кафедрой

М.А. Журавков
«18» октября 2022 г.

СОГЛАСОВАНО

Декан факультета

С.М. Босяков
«27» октября 2022 г.

СОГЛАСОВАНО

Председатель учебно-методической
комиссии факультета

В.Г. Кротов
«19» октября 2022 г.

Теоретическая механика

Электронный учебно-методический комплекс для специальности:
1-31 03 02 «Механика и математическое моделирование»

Регистрационный № 2.4.2-20/284

Автор:

Вярьвильская О.Н., канд. физ.-мат. наук, доцент

Рассмотрено и утверждено на заседании Научно-методического совета БГУ
02.09.2022 г., протокол № 1.

Минск 2022

УДК 531.011(075.8)
В 994

Утверждено на заседании Научно-методического совета БГУ
Протокол № 1 от 02.09. 2022 г.

Решение о депонировании вынес:
Совет механико-математического факультета
Протокол № 2 от 27.10.2022 г.

Автор:

Вярьвильская Ольга Николаевна, доцент кафедры теоретической и прикладной механики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

Рецензенты:

кафедра теоретической механики и механики материалов Белорусского национального технического университета (заведующий кафедрой теоретической механики и механики материалов доктор физико-математических наук, профессор Василевич Ю.В.);

Михасев Г.И., зав. кафедрой био- и наномеханики Белорусского государственного университета, доктор физ.-мат. наук, профессор.

Вярьвильская, О. Н. Теоретическая механика : электронный учебно-методический комплекс для специальности: 1-31 03 02 «Механика и математическое моделирование» / О. Н. Вярьвильская ; БГУ, Механико-математический фак., Каф. теоретической и прикладной механики. – Минск : БГУ, 2022. – 228 с. : ил. – Библиогр.: с. 225–227.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Теоретическая механика» предназначен для студентов специальности 1-31 03 02 «Механика и математическое моделирование». ЭУМК включает пояснительную записку и теоретический раздел, содержащий лекционный материал. В практическом разделе приведены темы заданий для управляемой самостоятельной работы студентов и тестовые задания. Раздел контроля знаний и вспомогательный раздел включают содержание учебного материала, учебно-методические карты по трем семестрам и список рекомендуемой литературы.

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА.....	6
1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ.....	10
1.1. Статика.....	14
1.1.1. Силы. Условия равновесия материальной точки. Основные задачи статики.....	14
1.1.2. Связи и их реакции	15
1.1.3. Момент силы относительно центра и оси.	18
1.1.4. Эквивалентные системы сил. Условия равновесия твердого тела.	21
1.1.5. Частные случаи систем сил, приложенных к твердому телу.	25
1.1.5.1. Система сходящихся сил.	25
1.1.5.2. Плоская система сил. Пара сил.....	27
1.1.5.3. Система параллельных сил. Центр тяжести.....	32
1.1.5.4. Общий случай равновесия твердого тела	38
1.1.6. Приведение системы сил к произвольному центру.	40
1.1.6.1. Инварианты приведения.....	41
1.1.6.2. Динамический винт.....	42
1.1.6.3. Частные случаи приведения.....	43
1.1.6.4. План решения задач на приведение произвольной системы сил к простейшему виду.	43
1.2. Кинематика.....	46
1.2.1. Способы задания движения материальной точки. Кинематические характеристики движения точки.....	46
1.2.1.1. Способы задания движения материальной точки.	46
1.2.1.2. Скорость точки.....	47
1.2.1.3. Ускорение точки.....	48
1.2.1.4. Скорость и ускорение точки в круговом движении.	50
1.2.2. Простейшие движения абсолютно твердого тела.	53
1.2.2.1. Поступательное движение твердого тела.....	53
1.2.2.2. Вращение тела вокруг неподвижной оси	54
1.2.3. Плоскопараллельное движения твердого тела.	56
1.2.3.1. Скорости точек тела.....	57
1.2.3.2. Мгновенный центр скоростей. Центроиды.	58
1.2.3.3. Ускорения точек тела.	60
1.2.4. Вращение твердого тела около неподвижной точки.	64
1.2.5. Движение свободного твердого тела.	68
1.2.6. Сложное движение точки.....	70
1.2.6.1. Абсолютная скорость материальной точки.....	71
1.2.6.2. Абсолютное ускорение материальной точки.....	72
1.2.7. Сложное движение твердого тела.....	75
1.2.7.1. Сложение поступательных движений.....	76
1.2.7.2. Сложение вращений вокруг пересекающихся осей.	77
1.3. Динамика материальной точки.....	78

1.3.1.	Дифференциальные уравнения движения материальной точки....	78
1.3.1.1.	Уравнения движения свободной материальной точки.	78
1.3.1.2.	Прямолинейное движение материальной точки.....	80
1.3.1.3.	Прямолинейные колебания материальной точки.	83
1.3.1.4.	Движение несвободной материальной точки по заданной неподвижной кривой.....	85
1.3.2.	Теорема об изменении количества движения точки.....	92
1.3.3.	Теорема об изменении кинетической энергии точки.....	94
1.3.4.	Теорема об изменении момента количества движения точки.	101
1.3.5.	Движение свободной материальной точки в поле центральных сил.....	104
1.3.5.1.	Дифференциальные уравнения движения точки под действием центральной силы. Формула Бине.....	104
1.3.5.2.	Законы Кеплера. Закон всемирного тяготения.	106
1.3.5.3.	Определение траектории материальной точки, движущейся в ньютоновом поле тяготения (задача Ньютона).....	108
1.3.5.4.	Движение в поле тяготения Земли. Искусственные спутники.	111
1.3.6.	Динамика относительного движения материальной точки.....	115
1.3.6.1.	Уравнения относительного движения.	115
1.3.6.2.	Относительное движение тел вблизи земной поверхности.....	117
1.4.	Динамика механической системы.....	122
1.4.1.	Уравнения движения механической системы.....	122
1.4.2.	Теорема об изменении количества движения системы и теорема о движении центра масс.....	124
1.4.3.	Теорема об изменении кинетической энергии механической системы.....	130
1.4.3.1.	Кинетическая энергия системы и ее вычисление.	130
1.4.3.2.	Теорема об изменении кинетической энергии системы. .	133
1.4.4.	Теорема об изменении кинетического момента системы.	137
1.4.4.1.	Кинетический момент системы и его вычисление.	137
1.4.4.2.	Теорема об изменении кинетического момента.	138
1.4.5.	Динамика точки переменной массы.	142
1.4.5.1.	Уравнение движения точки переменной массы (уравнение Мещерского).	142
1.4.5.2.	Движение ракеты (задачи Циолковского).	144
1.5.	Динамика абсолютного твердого тела.....	150
1.5.1.	Динамические характеристики твердого тела.	150
1.5.1.1.	Характеристики распределения масс.....	150
1.5.1.2.	Количество движения, кинетический момент и кинетическая энергия твердого тела.	153
1.5.2.	Движение свободного твердого тела.	156
1.5.3.	Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.	158

1.5.4. Плоскопараллельное движение твердого тела.	162
1.5.5. Сферическое движение твердого тела.....	164
1.5.5.1. Уравнения движения твердого тела с одной неподвижной точкой.....	164
1.5.5.2. Элементарная теория гироскопа.....	166
1.5.6. Удар.....	171
1.5.6.1. Общие теоремы теории удара материальной точки.....	171
1.5.6.2. Удар материальной точки о неподвижную поверхность. Коэффициент восстановления.	173
1.5.6.3. Изменение кинетической энергии точки при ударе.....	174
1.5.6.4. Общие теоремы динамики системы при ударе.....	175
1.5.6.5. Прямой центральный удар двух тел.....	176
2. ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ.....	180
2.1. Темы индивидуальных заданий для УСР.....	180
2.2. Примеры контрольных работ и тестовых заданий.....	181
3. РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ.....	212
3.1. Вопросы к зачету и экзаменам.....	212
3.2. Средства диагностики.....	215
4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ.....	217
4.1. Содержание учебного материала.....	217
4.2. Учебно-методические карты.....	220
4.3. Рекомендуемая литература.....	225
4.4. Электронные ресурсы.....	226
Приложение 1.....	228

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Теоретическая механика» предназначен для студентов 1 и 2 курсов специальности 1-31 03 02 «Механика».

Комплекс подготовлен в соответствии с требованиями Положения об учебно-методическом комплексе на уровне высшего образования, утвержденного Постановлением министерства образования Республики Беларусь от 26.07.2011 № 167. Содержание разделов ЭУМК соответствует образовательным стандартам, структуре и тематике типовой учебной программы по дисциплине «Теоретическая механика»

Главные цели ЭУМК: помощь студентам в организации самостоятельной работы, повышение качества подготовки и усиление практико-ориентированности учебного процесса по дисциплине «Теоретическая механика»

ЭУМК состоит из следующих разделов.

Теоретический. Включает содержание учебного пособия, написанного в соответствии с программой дисциплины. Материал данного пособия, наряду с конспектом лекций, может быть использован для самостоятельной подготовки студентов к практическим занятиям, контрольным работам и экзамену.

Практический. Темы практических занятий с указанием часов содержатся в учебно-методических картах. Раздел включает перечень тем индивидуальных заданий для УСР, примеры контрольных и тестовых заданий

Раздел контроля знаний представлен вопросами к зачету и экзаменам. Описаны формы диагностики и технология определения оценки по дисциплине с учетом текущей успеваемости.

Вспомогательный раздел включает содержание учебной программы курса по отдельным темам, на основе которой построено изучение дисциплины и контроль знаний, а также подробные учебно-методические карты.

В приложении 1 определены задачи идеологической и воспитательной составляющей ЭУМК.

Теоретическая механика является одной из ведущих дисциплин, составляющих основу общенаучной подготовки студентов специальности «Механика». Благодаря своим обширным и важным приложениям в естествознании и технике, основой которой она и является, теоретическая механика имеет целью создание математических моделей реально существующих процессов и явлений природы, а также технических устройств, создаваемых людьми.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Дисциплина «Теоретическая механика» относится к модулю «Теоретическая механика» государственного компонента. С развитием науки и техники узкоспециальные знания довольно быстро устаревают. Для решения возникающих принципиально новых актуальных задач научные работники и

инженеры должны обладать помимо необходимой способности к доучиванию и переучиванию, хорошей подготовкой в области фундаментальных наук. Это требует постоянного и всестороннего совершенствования вузовского образования.

Как фундаментальная наука, теоретическая механика была и остается не только одной из дисциплин, дающей углубленные знания о природе, но служит также средством воспитания у будущих специалистов необходимых творческих навыков к построению математических моделей, происходящих в науке и технике процессов, к выработке способностей к научным обобщениям и методам.

Связи с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Изучение дисциплины «Теоретическая механика» базируется на знании основных разделов векторной алгебры, аналитической и дифференциальной геометрии, математического анализа и дифференциальных уравнений. Сама же дисциплина «Теоретическая механика» является базовой для преподавания большинства специальных и общих курсов. Наиболее тесной является связь данной дисциплины с такими дисциплинами как «Механика сплошной среды», «Сопротивление материалов», «Механика роботов», «Компьютерная механика», «Биомеханика». При изучении теоретической механики студенты знакомятся с основными понятиями и методами классической механики, которые являются базовыми и для указанных дисциплин.

Основными методами изучения дисциплины «Теоретическая механика» являются освоение теоретических знаний на базе лекционного курса, а также самостоятельная проработка студентами теоретического материала. Контроль освоения теоретического материала проводится в форме экзаменов, коллоквиумов, компьютерного тестирования и опросов на практических занятиях.

Методы привития студентам практических навыков использования теоретических результатов при решении различных задач и упражнений отрабатываются на практических занятиях, а также в форме самостоятельной работы студентов. Контроль освоения практических навыков осуществляется во время практических занятий в форме проверки домашних заданий, обязательных индивидуальных заданий, а также на контрольных работах и зачетах.

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель дисциплины «Теоретическая механика»: создание базы для освоения основных идей и методов современной механики и математики, подготовка высококвалифицированных специалистов, способных ставить и решать задачи из различных областей науки и техники. Формирование у студентов установки на творческую профессиональную деятельность; развитие профессионального мышления, которое обеспечило бы будущему специалисту возможность свободно оперировать профессиональными знаниями, видеть проблемы и оптимальные пути их решения в самостоятельной практической деятельности.

Задачи учебной дисциплины:

- формирование у студентов основных понятий механики;
- изучение законов равновесия абсолютно твердого тела под действием произвольной системы сил;
- изучение основных приемов кинематического описания движения точки, системы и твердого тела;
- изучение общих динамических закономерностей движения материальных тел;
- решение конкретных механических задач.

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Теоретическая механика» должно обеспечить формирование следующих базовых профессиональных компетенций:

– БПК-1. Применять основные законы и методы естественнонаучных дисциплин для решения теоретических и практических задач в профессиональной деятельности.

– БПК-8. Использовать основные аналитические и численные методы теоретической механики, механики сплошных сред, сопротивления материалов к исследованию механических процессов.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен:

знать:

- условия равновесия абсолютно твердого тела под действием различных систем сил;
- кинематику точки и твердого тела;
- динамику точки и механической системы;
- динамику твердого тела и теорию удара;

уметь:

- приводить произвольную систему сил к простейшему виду;
- записывать и решать уравнения равновесия абсолютно твердого тела под действием различных систем сил;
- находить центры тяжести тел.
- определять скорость и ускорение точки для различных видов движения;
- определять скорости и ускорения точек тела для различных видов движения;
- составлять и решать дифференциальные уравнения движения точки;
- составлять и решать дифференциальные уравнения различных видов движения твердого тела;
- применять общие теоремы динамики для решения конкретных задач механики;
- использовать полученные теоретические и практические навыки для исследования реальных задач.

владеть:

- современными методами и приемами решения задач механики;
- методами построения адекватных математических моделей реальных

процессов и явлений;

– навыками самообразования и способами использования аппарата теоретической механики для проведения самостоятельных исследований.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 1, 2, 3 семестрах. Всего на изучение учебной дисциплины «Теоретическая механика» отведено:

– для очной формы получения высшего образования – 420 часов, в том числе 248 аудиторных часов, из них:

- в 1-м семестре – 90 часов, в том числе 36 аудиторных, из них: лекции – 18 часов, семинарские занятия – 14 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации – зачет.

- во 2-м семестре – 130 часов, в том числе 86 аудиторных, из них: лекции – 34 часа, практические занятия – 42 часа, управляемая самостоятельная работа – 10 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации – экзамен.

- в 3-м семестре – 200 часов, в том числе 126 аудиторных, из них: лекции – 36 часов, семинарские занятия – 74 часа, управляемая самостоятельная работа – 16 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 6 зачетных единиц.

Форма текущей аттестации – зачет и экзамен.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ.

Теоретическая механика на отделении «Механика» изучается на протяжении трех семестров, при этом один из ее наиболее сложных и важных разделов «аналитическая механика» вынесен в отдельный курс, читаемый в четвертом семестре.

В первом семестре изучается геометрическая статика, не требующая сложного математического аппарата, которым еще не владеют первокурсники. Первые лекции посвящаются основам векторной алгебры, которая используется для математического моделирования сил и действий над ними. Основными задачами геометрической статики являются: приведение произвольной системы сил, действующей на абсолютно твердое тело, к простейшему виду и получение необходимых и достаточных условий равновесия произвольной системы сил.

Во втором семестре изучается кинематика точки и твердого тела. В результате изучения данного раздела курса происходит ознакомление студентов со способами описания движения точки и твердого тела и определения их кинематических характеристик. Изучаются виды движений абсолютно твердого тела и определяются кинематические характеристики как самих тел, так и их точек.

В третьем семестре изучаются динамика материальной точки, динамика механической системы и динамика твердого тела. Рассматриваются конкретные задачи о движении точки в различных силовых полях (квазиупругой и центральной сил), выводятся общие теоремы динамики точки и системы. Изучаются их приложения к динамике твердого тела, движению тела переменной массы и теории удара.

В результате изучения данных разделов курса происходит ознакомление студентов с теоретическими основами механики и возможностями динамического моделирования технических процессов и природных явлений. Решение получаемых дифференциальных уравнений закрепляет и развивает знания, получаемые в курсе «Дифференциальные уравнения», а анализ результатов позволяет прогнозировать поведение движущихся объектов и влияние на него различных исходных параметров.

Теоретическая механика – это наука об общих законах механического движения и взаимодействия материальных объектов.

Механическое движение некоторого материального объекта есть процесс изменения его положения в пространстве и времени.

Механическое взаимодействие материальных объектов есть процесс, в результате которого происходит либо изменение механического движения объектов, либо изменение взаимного положения составляющих их частей (деформация).

Физическое пространство, в котором происходят механические процессы, моделируется трехмерным евклидовым пространством, свойства которого одинаковы во всех точках и по всем направлениям, то есть однородным и изотропным. Длительность механических процессов характеризуется абсолютным временем, одинаковым во всех точках пространства и не зависящим от каких-либо характеристик материи, заполняющей это пространство.

Мерой механического взаимодействия материальных объектов является **сила**. Сила моделируется вектором, который характеризует величину, направление и точку приложения силы.

Результат действия силы на материальный объект зависит от его механических характеристик, одной из которых является **масса**. Масса характеризует степень податливости объекта в целом действию силы (степень инертности) и определяется количеством вещества. За единицу массы (килограмм, кг) в Международной системе единиц принимается масса эталона, хранящегося в Париже.

В механике приняты следующие модели материальных объектов.

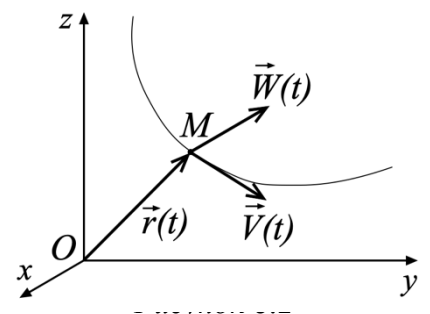
*Материальное тело, размерами которого можно пренебречь в рамках данной задачи называется **материальной точкой** – геометрической точкой такой же массы.*

*Множество материальных точек, положение и движение каждой из которых зависит от положения и движения остальных точек множества называется **механической системой**.*

*Механическая система, расстояние между любыми точками которой считается неизменным в рамках данной задачи, называется **абсолютно твердым телом**.*

Положение или движение любого объекта в пространстве может быть определено только по отношению к другому объекту (телу отсчета), с которым связывается **система отсчета** – система координат, по отношению к которой изучается движение материальных объектов.

Если положение тела относительно выбранной системы отсчета со временем не меняется, то говорят, что тело покоится относительно выбранной системы. То есть понятия «движения» и «покоя» являются понятиями относительными и имеют смысл только по отношению к конкретной системе отсчета. Изменение положения материальной точки относительно системы отсчета характеризуется ее скоростью $\vec{V}(t)$ и ускорением $\vec{W}(t)$, которые выражаются через вектор $\vec{r}(t)$, определяющий



положение материальной точки в данной системе отсчета $Oxyz$ (рисунок 0.1):

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Если $\vec{V} = \overrightarrow{\text{const}}$, то говорят, что точка движется равномерно и прямолинейно. Движение твердого тела называют равномерным и прямолинейным, если все его точки движутся с одинаковой постоянной скоростью.

Общие зависимости между основными понятиями механики определяются *аксиомами* или *основными законами*, которые были введены И. Ньютоном в 1687 г. и традиционно называются **законами Ньютона**.

Аксиома 1. (Первый закон Ньютона или закон инерции). *Существует система отсчета, называемая инерциальной, в которой материальная точка движется с постоянной скоростью либо покоится в любой момент времени, если на нее не действуют никакие силы.*

В этой аксиоме постулируется существование абстрактной инерциальной системы отсчета, относительно которой материальная точка сохраняет приобретенное ранее состояние движения или покоя, если на нее не действуют никакие силы.

Инерциальная система отсчета является идеализированным понятием и рассматривать какую-либо фиксированную систему координат как инерциальную можно лишь приближенно. Выбор этой системы определяется необходимой точностью решения рассматриваемых механических задач. Так, для исследования движения материальных объектов вблизи поверхности Земли в качестве инерциальной выбирают любую систему координат, неизменно связанную с Землей. Для изучения движения тел в пределах солнечной системы инерциальной можно считать систему координат с началом в центре Солнца и осями, направленными на неподвижные звезды.

Согласно **принципу относительности Галилея—Ньютона** никаким механическим экспериментом нельзя обнаружить, находится ли данная система отсчета в покое или движется равномерно и прямолинейно. Этот факт говорит о множественности инерциальных систем.

Аксиома 2. (Второй закон Ньютона, или основной закон динамики). *В инерциальной системе отсчета произведение массы материальной точки на ее ускорение равно действующей на точку силе*

$$m\vec{W} = \vec{F}.$$

За единицу силы в Международной системе единиц принимается такая сила, которая, будучи приложена к материальной точке массой 1 кг, вызывает ее ускорение в инерциальной системе координат, равное 1 м/с^2 . Эта сила называется **ньютоном (Н)**.

Согласно аксиоме 2 единственной причиной, способной изменить движение материальной точки относительно инерциальной системы отсчета (сообщить ей ускорение $\vec{W} \neq \vec{0}$), является приложенная к материальной точке сила. Если на материальную точку действует несколько сил, то будучи закрепленными векторами, они могут быть сложены и заменены одной силой, являющейся их суммой. Результирующая сила $\vec{F}$ как вектор – функция может зависеть только от времени, положения материальной точки в пространстве и ее скорости:

$$\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}).$$

Любая сила, действующая на материальную точку, есть результат механического взаимодействия с этой точкой других механических объектов. Физическая природа этого взаимодействия разнообразна и не является предметом изучения в теоретической механике.

Аксиома 3. (Третий закон Ньютона). *Две материальные точки действуют друг на друга с равными по величине и противоположными по направлению силами, лежащими на прямой, которая проходит через эти точки:* $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ (рисунок 0.2).

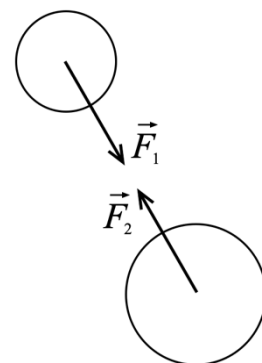


Рисунок 0.2

Третий закон Ньютона, или закон равенства действия и противодействия, описывает взаимодействие материальных точек и позволяет изучать движение механических систем, чему будет посвящена глава 4.

В соответствии с характером рассматриваемых задач механику принято разделять на **статику**, **кинематику** и **динамику**. В статике изучается равновесие материальных тел под действием сил. В кинематике изучается движение объектов с геометрической точки зрения без учета причин, вызывающих движение. В динамике решается наиболее общая задача изучения движения материальных тел под действием сил.

Поскольку равновесие является частным случаем движения, то все результаты статики можно получить из соответствующих положений динамики. В данном пособии, однако, изложение основ теоретической механики начинается со статики, как самого простого в математическом отношении раздела этой науки. Это определяется как историческим ходом развития механики, так и целесообразностью построения изложения от простого к сложному. Необходимые результаты динамики, которые впоследствии будут строго доказаны в главе 4, анонсируются в статике без доказательства.

1.1. Статика.

1.1.1. Силы. Условия равновесия материальной точки. Основные задачи статики.

Общепринято разделение статики на *геометрическую*, в которой изучается равновесие абсолютно твердых тел, и *аналитическую*, в которой изучается равновесие механических систем. Эта глава посвящена геометрической статике.

Как уже отмечалось во введении, сила есть количественная мера механического взаимодействия тел, и представляет собой вектор, который характеризуется величиной, направлением и точкой приложения. Такой вектор, имеющий определенную точку приложения, называется *закрепленным*. Им является сила, действующая на материальную точку.

Если определяемая вектором величина не зависит от положения точки приложения вектора на его линии действия, то такой вектор называется *скользящим*. В дальнейшем будет показано, что сила, действующая на твердое тело, является вектором скользящим.

В векторной алгебре обычно изучаются *свободные* векторы, которыми определяются величины, одинаковые для всех точек некоторой области пространства.

Поскольку сила есть вектор, то над силами можно проводить все операции, определенные в векторной алгебре с учетом конкретного вида векторов.

Так, если на материальную точку действует некоторая система сил, то эти силы можно сложить по правилу векторного многоугольника и получить одну

силу $\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k$. Если эта сила равна нулю и в начальный момент времени $t = 0$

точка находилась в покое, то по аксиоме 1 точка будет сохранять это состояние покоя и для любого $t > 0$. Таким образом, любая совокупность сил, действующих на материальную точку, сводится к одной силе и равенство $\vec{R} = 0$ является необходимым и достаточным условием того, чтобы под действием данной системы сил точка находилась в покое или двигалась равномерно и прямолинейно.

Если же в начальный момент времени силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ прикладываются к различным точкам покоящегося твердого тела, то условия $\vec{R} = 0$, вообще говоря, недостаточно, чтобы тело оставалось в покое и при $t > 0$. Действительно, как следует из опыта, система двух сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2 = -\vec{F}_1$, не лежащих на одной прямой, для которой $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$, приводит тело во вращательное движение.

Силы, действующие на твердое тело, подразделяются на *сосредоточенные*,

приложенные к какой-то одной точке тела, и **распределенные**, действующие на все точки какого-то выделенного объема (объемные силы) или поверхности (поверхностные силы). Фактически все силы являются распределенными и когда говорят о сосредоточенной силе, то речь идет, по существу, о силе, действие которой эквивалентно действию данной системы распределенных сил.

Рассмотрим абсолютно твердое тело (в дальнейшем просто твердое тело), на которое действует совокупность сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$. Такая совокупность называется **системой сил**. В статике решаются две основные задачи:

1. найти необходимые и достаточные условия того, чтобы под действием данной системы сил твердое тело находилось в покое (равновесии);
2. привести данную систему сил к простейшему виду, то есть заменить ее возможно более простой **эквивалентной** системой, не изменяя при этом состояния покоя или движения тела.

1.1.2. Связи и их реакции

Тело, любому перемещению которого в пространстве не препятствуют другие тела, называется **свободным**. Все, что ограничивает свободу перемещения тела, называется **связью**. Связи обычно осуществляются в виде некоторых материальных тел: опор, нитей, подшипников, защемлений и пр. Эффект действия связи эквивалентен действию на тело некоторой силы, которая называется **реакцией связи**. Поэтому *всякое несвободное твердое тело можно рассматривать как свободное, если освободить его от связей, заменив их реакциями (аксиома связей)*. Согласно аксиоме 3 с силой, равной реакции, но противоположно направленной, тело действует на связь. Реакция связи приложена в точке контакта тела со связью, а ее направление противоположно тому направлению, по которому связь препятствует перемещению тела; если таких направлений несколько, то направление реакции и ее величина наперед неизвестны и зависят не только от действующих на тело **активных** сил, но и от состояния покоя или движения тела.

Характерной особенностью реакций связей является то, что при отсутствии активных сил они вовсе не возникают и не способны сами изменить состояние покоя или движения тела, поэтому они названы еще **пассивными** силами.

Рассмотрим некоторые, наиболее часто встречающиеся виды связей.

1. Гладкая (без трения) опора в виде кривой или поверхности (рисунок 1.1) препятствует перемещению тела по направлению перпендикуляра к опоре и называется **идеальной** связью. Реакция такой связи направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел. Если одна из поверхностей вырождается в точку (рисунок 1.2), то реакция направлена по нормали к другой

поверхности.

2. Гибкая нерастяжимая нить (рисунок 1.3) не позволяет телу удаляться от точки подвеса нити по направлению AM , поэтому реакция натянутой нити (натяжение) направлена по нити к точке подвеса.

3. Цилиндрический шарнир (подшипник) (рисунок 1.4) позволяет телу AB , прикрепленному шарниром к опоре D , вращаться вокруг оси шарнира в плоскости рисунка, но препятствует перемещению конца A по любому радиальному направлению в этой плоскости, поэтому реакция цилиндрического шарнира имеет неизвестное радиальное направление в плоскости, перпендикулярной оси шарнира.

4. Шаровой шарнир (рисунок 1.5), или подпятник (рисунок 1.6). При такой связи допускается только вращение вокруг одной из точек тела, которая не может совершать никаких перемещений в пространстве, поэтому реакция шарового шарнира может иметь любое направление в пространстве.

5. Связь с трением. Трение скольжения.

Рассмотренные в предыдущих случаях связи считались идеальными (без трения). В природе свободному относительному скольжению тел всегда препятствуют некоторые силы, которые называют *силами трения*. Причиной их является шероховатость поверхностей и наличие сцепления у прижатых друг к другу тел. Сила трения возникает в точках соприкосновения, лежит в общей касательной плоскости к поверхностям соприкасающихся под давлением тел и препятствует скольжению одного тела относительно другого. Трение такого рода называется **трением скольжения**.

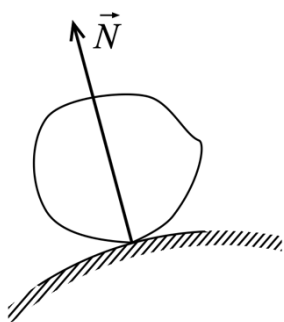


Рисунок 1.1

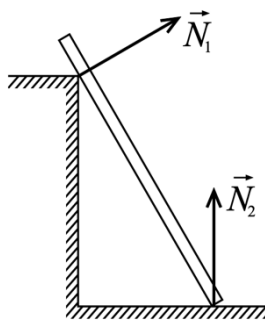


Рисунок 1.2

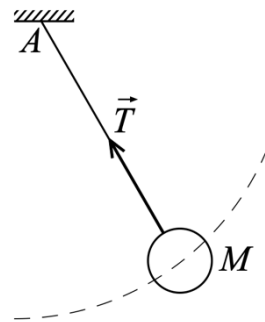


Рисунок 1.3

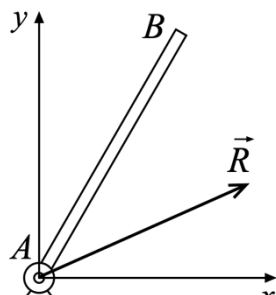


Рисунок 1.4

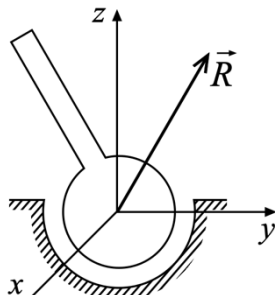


Рисунок 1.5

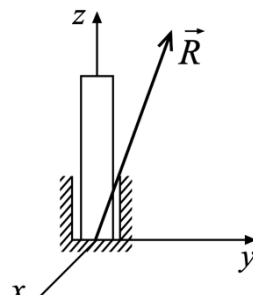


Рисунок 1.6

Реакция связи с трением, кроме нормальной составляющей $\vec{N}$, которая возникает вследствие давления тела на связь, имеет составляющую, расположенную в общей касательной плоскости к поверхностям в точке контакта тела со связью (рисунок 1.7). Эта тангенциальная составляющая и появляется благодаря силе трения.

Хотя трение является одним из самых распространенных явлений в природе и технике, точные его законы до сих пор не установлены вследствие трудностей учета всех факторов, влияющих на силу трения.

Следует различать статическое трение, имеющее место при относительном покое соприкасающихся тел, и трение движения, которое имеет место при относительном движении тел.

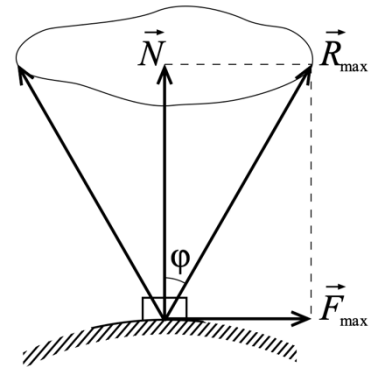


Рисунок 1.7

Законы трения скольжения при покое установлены экспериментально исследованиями Кулона (1781 г.), носят качественный характер и формулируются следующим образом:

1. Сила трения скольжения действует в общей касательной плоскости к поверхностям соприкасающихся тел; численно сила трения имеет то значение, которое необходимо для предотвращения относительного скольжения тел, но не может стать больше некоторой определенной величины, т.е.

$$F \leq F_{\max}. \quad (1.1)$$

2. Величина предельной силы трения зависит от природы соприкасающихся тел и от возникающей при их взаимном давлении друг на друга нормальной реакции N и определяется равенством

$$F_{\max} = f_0 N, \quad (1.2)$$

где f_0 – коэффициент трения скольжения при покое (или статический коэффициент трения).

Коэффициент f_0 зависит от материала, характера обработки, состояния трущихся поверхностей и определяется опытным путем.

3. Сила трения не зависит от площади контакта соприкасающихся при трении поверхностей.

Из равенств (1.1) и (1.2) следует, что

$$F \leq f_0 N. \quad (1.3)$$

При движении сила трения направлена в сторону, противоположную относительной скорости тела, а ее численная величина определяется равенством

$F = fN$, где f – коэффициент трения скольжения при движении (или динамический коэффициент трения). Он также зависит от материала, степени обработки и состояния трущихся поверхностей и, кроме того, от скорости движения. Обычно с увеличением скорости величина f сначала несколько убывает, а затем сохраняет почти постоянное значение.

Полная реакция связи с трением $\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}$. Так как $F \leq F_{\max}$, то при данной величине N полная реакция может иметь разные численные значения и образовывать разные углы с нормалью. Наибольшее значение $\vec{R}_{\max}$ полная реакция имеет при $\vec{F} = \vec{F}_{\max}$. Образующий при этом реакцией $\vec{R}_{\max}$ угол φ с нормалью (наибольший из всех возможных углов отклонения) называется **углом трения**. Как видно из рисунка 1.7 $F_{\max} = N \operatorname{tg} \varphi$. Сравнивая этот результат с равенством (1.2), находим, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{\max}}{N} = f_0. \quad (1.4)$$

Таким образом, полная реакция связи с трением лежит всегда внутри конуса с вершиной в точке соприкосновения тела со связью; ось конуса направлена по нормали к поверхности связи и угол при вершине равен 2φ . Этот конус называется **конусом трения**. Может оказаться, что величина и характер шероховатости соприкасающихся поверхностей неодинаковы для различных направлений в области контакта. В этом случае коэффициент трения будет зависеть от выбранного направления и конус трения в общем случае не будет круговым.

1.1.3. Момент силы относительно центра и оси.

Пусть на тело действует сила $\vec{F}$, приложенная в точке, определенной радиус-вектором $\vec{r}$ по отношению к центру O .

Моментом силы $\vec{F}$ относительно центра O называется вектор

$$\overrightarrow{\operatorname{mom}_O \vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (1.5)$$

Согласно этому определению момент силы относительно центра O есть вектор, приложенный в точке O , перпендикулярный плоскости OAM (рисунок 1.8), направленный по правилу правого винта и равный по величине удвоенной площади треугольника OAM .

Если A, A_1 – точки на линии действия силы $\vec{F}$, то $\overrightarrow{mom}_O \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} = (\vec{r}' - \overrightarrow{AA_1}) \times \vec{F} = \vec{r}' \times \vec{F}$, так как $\overrightarrow{AA_1} \times \vec{F} = 0$ в силу коллинеарности векторов, т.е. момент силы не зависит от положения точки ее приложения на линии действия. Это значит, что при перемещении силы вдоль линии ее действия ни сама сила, ни ее момент изменяться не будут.

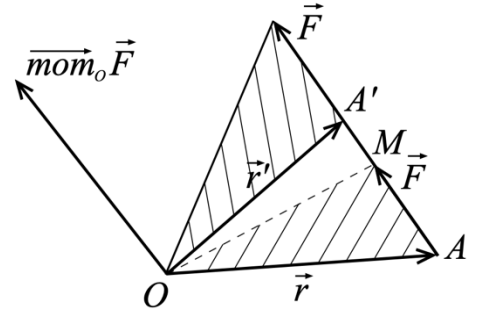


Рисунок 1.8

Если с точкой O связать какую-нибудь декартову систему координат $Oxyz$, в которой $\vec{r}(x, y, z)$, $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$, то момент силы относительно центра O можно представить в виде

$$\overrightarrow{mom}_O \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}. \quad (1.6)$$

Если сила $\vec{F}$, приложенная в точке A тела, раскладывается на составляющие $\vec{F} = \sum_{i=1}^k \vec{F}_i$, то в силу дистрибутивности векторного произведения

$$\overrightarrow{mom}_O \vec{F} = \vec{r} \times \sum_{i=1}^k \vec{F}_i = \sum_{i=1}^k \overrightarrow{mom}_O \vec{F}_i. \quad (1.7)$$

Моментом силы $\vec{F}$ относительно некоторой оси Ox называется проекция на эту ось момента силы $\vec{F}$ относительно какой-либо точки этой оси:

$$mom_x \vec{F} = (\overrightarrow{mom}_O \vec{F})_x = (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \vec{e}, \quad (1.8)$$

$\vec{e}$ – единичный вектор оси. Покажем корректность этого определения. Пусть O, O' – две точки оси Ox (рис 1.9). Докажем, что $(\overrightarrow{mom}_O \vec{F})_x = (\overrightarrow{mom}_{O'} \vec{F})_x$.

Действительно,

$$\begin{aligned} (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \vec{e} &= ((\overrightarrow{OO'} + \vec{r}') \times \vec{F}) \cdot \vec{e} = \\ &= (\overrightarrow{OO'} \times \vec{F}) \cdot \vec{e} + (\vec{r}' \times \vec{F}) \cdot \vec{e} = (\vec{r}' \times \vec{F}) \cdot \vec{e} \end{aligned}$$

поскольку $(\overrightarrow{OO'} \times \vec{F}) \cdot \vec{e} = 0$ как смешанное

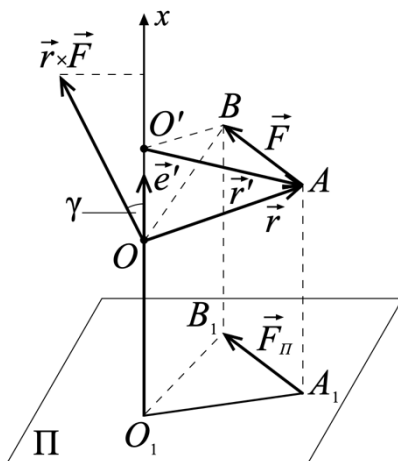


Рисунок 1.9

произведение векторов с двумя параллельными сомножителями.

Так как $mom_x \vec{F} = (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \vec{e} = |\vec{r} \times \vec{F}| \cos \gamma = 2S_{\square OAB} \cos \gamma = \pm 2S_{\square O_1 A_1 B_1}$, а

$2S_{\square O_1 A_1 B_1} = \left| \overrightarrow{mom_{O_1} \vec{F}_{\Pi}} \right|$ (рис 1.9), то из этих равенств вытекает другое определение момента силы относительно оси, равносильное (1.8).

Момент силы $\vec{F}$ относительно оси x есть алгебраическая величина момента проекции силы $\vec{F}$ на плоскость Π , перпендикулярную оси x , взятого относительно точки O_1 пересечения оси x с плоскостью Π :

$$mom_x \vec{F} = \pm \left| \overrightarrow{mom_{O_1} \vec{F}_{\Pi}} \right|. \quad (1.9)$$

Знак плюс берется, если поворот, совершаемый силой $\vec{F}_{\Pi}$, виден с положительного конца оси x против часовой стрелки и минус – если по часовой стрелке.

Этим определением удобно пользоваться для практического вычисления моментов сил относительно осей

Так как смешанное произведение векторов, лежащих в одной плоскости, равно нулю, то $mom_x \vec{F} = 0$, если сила $\vec{F}$ и ось Ox принадлежат одной плоскости.

Учитывая (1.6) моменты силы $\vec{F}$ относительно координатных осей можно записать в виде:

$$mom_x \vec{F} = yF_z - zF_y, \quad mom_y \vec{F} = zF_x - xF_z, \quad mom_z \vec{F} = xF_y - yF_x. \quad (1.10)$$

Пример 1.1. Пусть на твердое тело в виде прямоугольного параллелепипеда действуют силы $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_6$, направленные по его ребрам, диагонали и диагонали грани (рисунок 1.10). Найти проекции этих сил на оси координат и их моменты относительно осей.

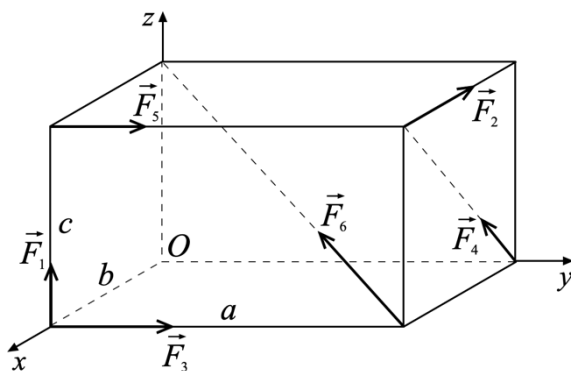


Рисунок 1.10

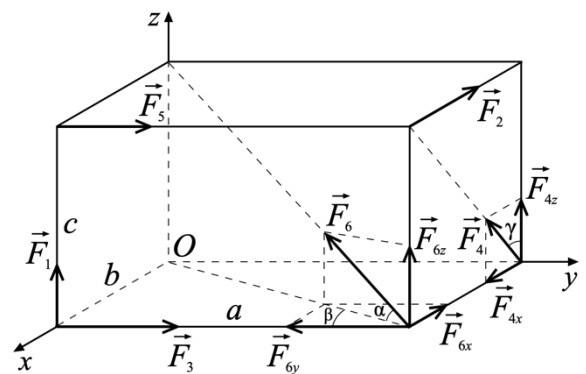


Рисунок 1.11

Решение. Для нахождения проекций сил и их моментов относительно осей, нам понадобятся значения тригонометрических функций, указанных на рисунке 1.11 углов. Очевидно, что

$$\sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

$$\sin \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \gamma = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

Для удобства разложим силы $\vec{F}_4$ и $\vec{F}_6$ на составляющие и будем записывать проекции и моменты сил в таблицу.

	F_{ix}	F_{iy}	F_{iz}	M_{ix}	M_{iy}	M_{iz}
F_1	0	0	F_1	0	$-bF_1$	0
F_2	$-F_2$	0	0	0	$-cF_2$	aF_2
F_3	0	F_3	0	0	0	bF_3
F_4	$F_4 \sin \gamma$	0	$F_4 \cos \gamma$	$aF_4 \cos \gamma$	0	$-aF_4 \sin \gamma$
F_5	0	F_5	0	$-cF_5$	0	bF_5
F_6	$-F_6 \cos \alpha \cdot \sin \beta$	$-F_6 \cos \alpha \cdot \cos \beta$	$F_6 \sin \alpha$	$aF_6 \sin \alpha$	$-bF_6 \sin \alpha$	0

При вычислении моментов сил относительно осей будем помнить, что момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось лежат в одной плоскости, и что момент силы равен сумме моментов ее составляющих. Например, при вычислении момента силы $\vec{F}_6$ относительно оси Ox замечаем, что составляющая силы на плоскость xOy проходит через начало координат и пересекает все оси, поэтому момент относительно оси Ox будет давать только составляющая $\vec{F}_{6z}$.

1.1.4. Эквивалентные системы сил. Условия равновесия твердого тела.

Пусть на твердое тело действует система сил $\vec{F}_k$, $k = \overline{1, n}$, приложенных в точках M_k , O – произвольная точка пространства и $\vec{r}_k = \overrightarrow{OM_k}$.

Векторы

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k, \quad \vec{M}_O = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k \quad (1.11)$$

называются соответственно **главным вектором** и **главным моментом** данной

системы сил относительно точки O .

Твердое тело находится в равновесии (покое) относительно некоторой системы координат, если его положение относительно этой системы не изменяется со временем.

Будем считать систему координат инерциальной, а тело свободным.

Приведем без доказательства две необходимые теоремы, которые определяют движение твердого тела под действием заданной системы сил.

Теорема 1. *Движение твердого тела из состояния покоя под действием системы сил $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$ полностью определяется главным вектором $\vec{R}$ и главным моментом $\vec{M}_O$ этой системы сил относительно любой неподвижной точки O .*

Поскольку ни главный вектор $\vec{R}$, ни главный момент $\vec{M}_O$ не зависят от точек приложения сил системы на их линиях действия, то действующую на твердое тело силу можно считать вектором **скользящим**.

Из этой теоремы также следует, что действие различных систем сил на твердое тело одинаково, если одинаковы их главные векторы и главные моменты относительно одного и того же центра. Такие системы сил называют **эквивалентными**. Эквивалентность обозначается символом « $\square$ »:
 $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n) \square (\vec{F}_1^*, \dots, \vec{F}_l^*)$. В частности, если система сил эквивалентна одной силе:
 $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n) \square \vec{R}$, то эта сила называется **равнодействующей** данной системы сил. Если равнодействующая существует, то она равна главному вектору системы, но, как будет показано в дальнейшем (1.5.2), главный вектор системы не всегда является ее равнодействующей.

Теорема 2. *Для равновесия твердого тела под действием системы сил $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$ необходимо и достаточно, чтобы в начальный момент времени тело покоилось и на некотором промежутке времени были равны нулю главный вектор и главный момент системы сил относительно произвольного центра O*

$$\vec{R} = 0, \quad \vec{M}_O = 0. \quad (1.12)$$

Утверждения теорем вытекают из уравнений движения абсолютно твердого тела и будут доказаны в главе 5.

Систему сил $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$, действующих на твердое тело, для которой

$$\vec{R} = 0, \quad \vec{M}_O = 0$$

(O — произвольная точка пространства), называют **уравновешенной (эквивалентной нулю)** системой сил.

Очевидно, что любое состояние тела не изменится, если к действующим на него силам добавить или отнять уравновешенную систему сил. Простейшим

примером уравновешенной системы сил, действующих на твердое тело, является система сил $(\vec{F}, -\vec{F})$, имеющих общую линию действия.

Условия равновесия (1.12) имеют место, как для свободного, так и для несвободного твердого тела. Если тело свободно, то равенства (1.12) являются условиями, которые налагаются на действующие силы, чтобы тело покоилось. Если же тело несвободно, то в состав сил системы $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$ входят неизвестные реакции связей, и условия (1.12) являются уравнениями равновесия, из которых находятся эти реакции. Поскольку система двух векторных уравнений (1.12) эквивалентна системе шести скалярных уравнений

$$\begin{aligned} R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0, \\ M_{Ox} = \sum_{k=1}^n m o m_x \vec{F}_k = 0, \quad M_{Oy} = \sum_{k=1}^n m o m_y \vec{F}_k = 0, \quad M_{Oz} = \sum_{k=1}^n m o m_z \vec{F}_k = 0, \end{aligned} \quad (1.13)$$

то векторы реакций связей не должны содержать более шести неизвестных проекций.

Для частных случаев систем сил, которые будут рассмотрены в следующем параграфе, некоторые из уравнений (1.13) могут обращаться в тождества.

Установлено, что условия (1.12) являются также необходимыми (но недостаточными) условиями равновесия механических систем. Этот факт вытекает из так называемого **принципа отвердевания**: *Равновесие механической системы не нарушается от наложения дополнительных связей между ее телами, превращающих эту материальную систему в одно абсолютно твердое тело.*

При исследовании равновесия механической системы, состоящей из нескольких твердых тел, составляются уравнения (1.13) для каждого из тел системы с учетом реакций внешних и внутренних связей. Вместо условий равновесия одного из тел системы бывает удобно использовать необходимые условия равновесия всей системы, учитывая только внешние активные силы и реакции внешних связей. Если все неизвестные составляющие реакций связей могут быть однозначно найдены из уравнений равновесия, составленных для системы тел или для одного твердого тела, то такая система (тело) является *статически определимой*, в противном случае – *статически неопределимой*. Статическая неопределимость появляется в результате наложения лишних связей, не являющихся необходимыми для обеспечения равновесия тела или системы.

Теорема 3. *Если твердое тело находится в равновесии под действием трех сил, то эти силы лежат в одной плоскости и линии их действия пересекаются*

в одной точке.

Это утверждение, которое часто называют теоремой о трех силах, вытекает из условий равновесия твердого тела. Сначала докажем, что силы $\vec{F}_i$, приложенные в точках A_i ($i = \overline{1,3}$), лежат в плоскости Π , определяемой точками A_i . Имеем

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^3 \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2);$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^3 \vec{r}_i \times \vec{F}_i = (\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \times \vec{F}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \times \vec{F}_2 = \overrightarrow{A_3 A_1} \times \vec{F}_1 + \overrightarrow{A_3 A_2} \times \vec{F}_2 = 0.$$

Из последнего равенства следует, что плоскости, определяемые парами векторов $\overrightarrow{A_3 A_1}$, $\vec{F}_1$ и $\overrightarrow{A_3 A_2}$, $\vec{F}_2$ совпадают, т.е. векторы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ лежат в плоскости Π . Аналогично из равенств

$$\vec{F}_1 = -(\vec{F}_2 + \vec{F}_3), \vec{M}_O = \overrightarrow{A_1 A_2} \times \vec{F}_2 + \overrightarrow{A_1 A_3} \times \vec{F}_3 = 0$$

следует, что и сила $\vec{F}_3$ лежит в плоскости Π .

Теперь докажем, что силы $\vec{F}_i$ пересекаются в одной точке. Возможны следующие варианты расположения сил $\vec{F}_i$ в плоскости Π .

1. Все силы $\vec{F}_i$ параллельны между собой. В этом случае теорема верна, так как можно считать, что линии действия сил $\vec{F}_i$ пересекаются в бесконечно удаленной точке.

2. Линии действия сил $\vec{F}_1$ и, например, $\vec{F}_2$ пересекаются в некоторой точке A . Тогда

$$\vec{M}_A = \overrightarrow{A A_3} \times \vec{F}_3 = 0.$$

Так как $\vec{F}_3 \neq 0$, то из последнего равенства следует, что линия действия силы $\vec{F}_3$ проходит через точку A .

Общий план решения задач статики.

При решении задач на равновесие твердого тела или системы тел необходимо придерживаться следующего плана.

1. Выбрать тело, равновесие которого рассматривается.
2. Освободить тело от связей, заменив их реакциями.
3. Изобразить на рисунке все приложенные к телу активные силы и реакции отброшенных связей.

4. Классифицировать полученную систему сил (система сходящихся сил, плоская система сил и т.д.)
5. Записать соответствующие этой системе сил условия равновесия в выбранной системе координат.
6. Найти из полученной системы неизвестные величины.

Если рассматривается равновесие системы тел, то эти действия надо повторить для каждого из тел системы с учетом реакций внешних и внутренних связей и аксиомы 3.

1.1.5. Частные случаи систем сил, приложенных к твердому телу.

1.1.5.1. Система сходящихся сил.

Если линии действия сил системы $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$ пересекаются в одной точке O (*система сходящихся сил*), то после их перенесения вдоль линий действия в точку O и сложения получим, что эта система сил эквивалентна одной равнодействующей силе

$$\vec{R}^* = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = \vec{R},$$

линия действия которой проходит через точку O . Условия равновесия этой системы сил

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0. \quad (1.14)$$

Пример 1.2. Балка AB шарнирно закреплена на опоре A , у конца B она положена на катки. В середине C балки под углом 45° к ее оси, действует сила $\vec{F}$ (рисунок 1.12). Определить реакции опор, пренебрегая весом балки.

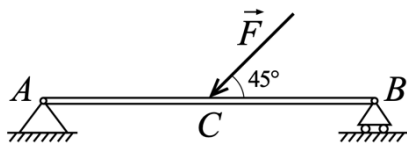


Рисунок 1.12

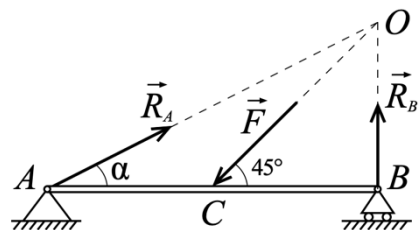


Рисунок 1.13

Решение. Балка находится в равновесии под действием трех сил: $\vec{F}, \vec{R}_A, \vec{R}_B$, следовательно, линии их действия пересекаются в одной точке и образуют

плоскую систему сходящихся сил. Поскольку направления сил $\vec{F}$ и $\vec{R}_B$ известны (реакция катковой опоры $\vec{R}_B$ перпендикулярна плоскости опоры катков), то линия действия реакции $\vec{R}_A$ цилиндрического шарнира пройдет через точку O их пересечения (рисунок 1.13). Условия равновесия (1.14) запишутся в виде

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = R_A \cos \alpha - F \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = R_A \sin \alpha - F \frac{\sqrt{2}}{2} + R_B = 0,$$

где $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Из полученной системы находим $R_A = F \frac{\sqrt{10}}{4}$, $R_B = F \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Пример 1.3. Точечный груз весом P закреплен на конце A невесомого горизонтального стержня AB . Стержень прикреплен шарниром в точке B и поддерживается двумя тросами AC и AD , образующими с горизонтальной прямой CD , перпендикулярной к стержню, углы α и β (рисунок 1.14). Плоскость ACD наклонена к горизонту под углом γ . Найти натяжение тросов и усилие в стержне.

Решение. Рассмотрим равновесие точечного груза A . На него действуют активная сила $\vec{P}$, силы натяжения $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ тросов и реакция $\vec{S}$ стержня, образующие систему сходящихся сил $\{\vec{P}, \vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{S}\} \square 0$.

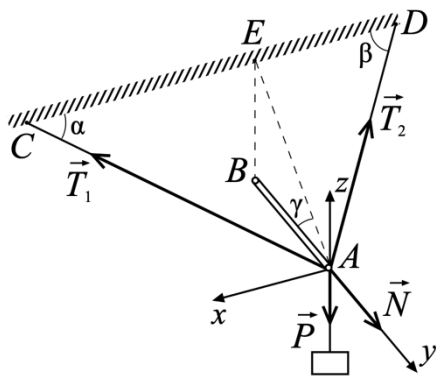


Рисунок 1.14

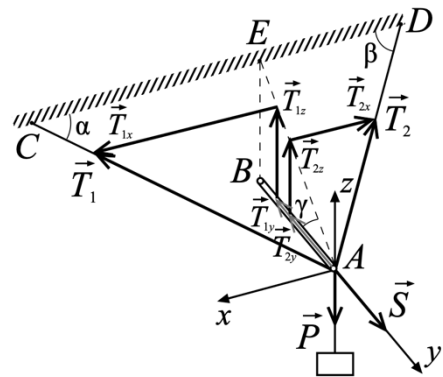


Рисунок 1.15

Свяжем с точкой A систему координат, показанную на рисунок 1.14 и запишем условия равновесия (1.14), разложив силы $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ на составляющие (рисунок 1.15)

$$\sum F_{kx} = T_1 \cos \alpha - T_2 \cos \beta = 0,$$

$$\sum F_{ky} = -T_1 \sin \alpha \cos \gamma - T_2 \sin \beta \cos \gamma + S = 0,$$

$$\sum F_{kz} = T_1 \sin \alpha \sin \gamma + T_2 \sin \beta \sin \gamma - P = 0.$$

Из этой системы находим

$$T_1 = \frac{P \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta) \sin \gamma}, \quad T_2 = \frac{P \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta) \sin \gamma}, \quad S = P \operatorname{ctg} \gamma.$$

Все найденные величины положительны, следовательно, реакции связей направлены так, как показано на рисунке (тросы растянуты, а стержень сжат).

1.1.5.2. Плоская система сил. Пара сил.

Пусть все силы $\vec{F}_k$, $k = \overline{1, n}$ лежат в плоскости xOy , тогда система (1.13) содержит только три нетривиальных уравнения:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n \operatorname{mom}_z \vec{F}_k = 0. \quad (1.15)$$

Отметим, что в случае плоской системы сил все вектор – моменты сил относительно любой точки плоскости будут перпендикулярны этой плоскости и могут считаться величинами алгебраическими.

Можно доказать, что условия равновесия плоской системы сил могут быть представлены еще в двух эквивалентных формах:

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{mom}_A \vec{F}_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n \operatorname{mom}_B \vec{F}_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{kl} = 0, \quad (1.16)$$

где A и B – произвольные точки плоскости, l – любая прямая, не перпендикулярная AB , или

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{mom}_A \vec{F}_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n \operatorname{mom}_B \vec{F}_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n \operatorname{mom}_C \vec{F}_k = 0, \quad (1.17)$$

где A, B, C – произвольные точки плоскости, не лежащие на одной прямой.

Доказательство эквивалентности этих условий равновесия условиям (1.15) следует из теоремы о трех силах.

Система двух равных по модулю, антипараллельных и не лежащих на одной прямой сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$, действующих на твердое тело, называется парой сил. Плоскость, определяемая векторами пары, называется *плоскостью пары*, а расстояние между линиями действия сил пары – *плечом пары*. В соответствии с (1.11) главный вектор сил пары равен нулю.

Пара сил, действующая на тело, стремится сообщить ему некоторое вращение. Вращательный эффект пары характеризуется главным моментом сил пары. Приложим силы пары в произвольных точках A_1 , A_2 на их линиях действия (рисунок 1.16). Тогда

$$\vec{M}_O = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 = \overrightarrow{A_2 A_1} \times \vec{F}_1 = \overrightarrow{A_1 A_2} \times \vec{F}_2.$$

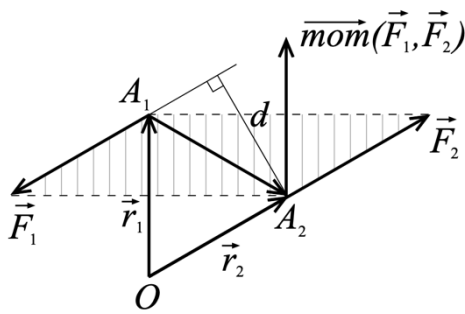


Рисунок 1.16

Отсюда следует, что главный момент сил пары относительно произвольного центра не зависит от выбора этого центра, равняется моменту одной из сил пары относительно точки приложения другой силы, следовательно, не определяется точкой приложения и является вектором **свободным**. Этот вектор называется

моментом пары: $\overrightarrow{mom}(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$. Очевидно, что

момент пары перпендикулярен плоскости пары, направлен в ту сторону, откуда вращение, совершаемое парой, кажется происходящим против часовой стрелки, и равен по величине площади параллелограмма, построенного на силах пары, то есть произведению одной из сил пары на ее плечо.

Таким образом, действие пары сил на твердое тело полностью определяется ее моментом. Поскольку это вектор свободный, то, не изменяя действия пары сил на твердое тело, можно произвольным образом перемещать пару в ее плоскости, переносить плоскость действия пары параллельно самой себе и изменять модули сил пары и ее плечо, сохраняя постоянным их произведение. Если на твердое тело действует система пар, то их вектор - моменты складываются как свободные векторы, образуя момент результирующей пары, эквивалентной данной системе пар.

Пары сил могут возникать и как реакции некоторых связей.

Пример 1.4. Рассмотрим балку AB , защемленную (жестко заделанную) в стену (рисунок 1.17) и нагруженную какими-то внешними силами. Такая связь препятствует не только любому перемещению конца A балки, но и ее повороту

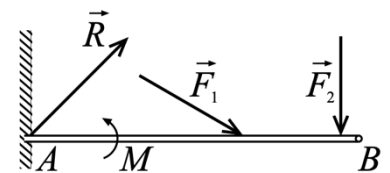


Рисунок 1.17

вокруг точки A , поэтому реакция жесткой заделки, наряду с силой $\vec{R}$ неизвестного направления в плоскости, включает пару сил с неизвестным моментом M .

Пример 1.5. Из опыта известно, что для качения тяжелого цилиндра по горизонтальной плоскости к оси цилиндра необходимо приложить некоторую горизонтальную силу $\vec{Q}$ для того, чтобы преодолеть сопротивление, возникающее при качении цилиндра. Это сопротивление носит название **трение качения**. Оно возникает вследствие того, что реальные тела способны

деформироваться и фактически контакт между цилиндром и плоскостью происходит по некоторой поверхности, смещенной от нижней точки цилиндра в сторону возможного движения (рисунок 1.18), так что полная реакция $\vec{R}$ связи смещается на некоторое расстояние δ от вертикали, проходящей через центр цилиндра. При этом сила тяжести и нормальная реакция поверхности образуют пару сил, момент которой $M_{\text{сопр.}} \leq \delta N$, где δ имеет размерность длины и

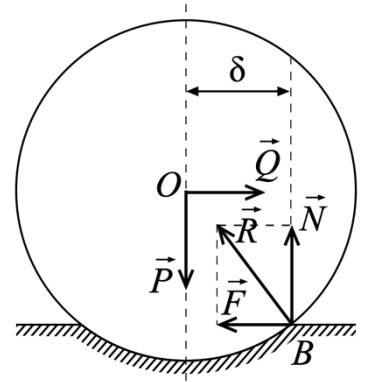


Рисунок 1.18

называется **коэффициентом трения качения**. Чтобы покоящийся цилиндр пришел в движение (качение без скольжения), к его оси надо приложить силу $\vec{Q}$, которая вместе с силой трения $\vec{F}$ образует пару, момент которой должен превосходить $M_{\text{сопр.}}$.

Пример 1.6. Одна из сил пары $\vec{F}_1(12; -8; 0)$ приложена в точке $A_1(5; 3; 10)$. Другая сила пары приложена в точке $A_2(4; 4; 10)$. Найти величину и направление момента этой пары.

Решение. Известно, что $\overrightarrow{mom}(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \overrightarrow{A_2A_1} \times \vec{F}_1$. Так как вектор $\overrightarrow{A_2A_1} = (1; -1; 0)$, то

$$\overrightarrow{mom}(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 12 & -8 & 0 \end{vmatrix} = 4\vec{k}.$$

Значит, момент пары направлен в положительном направлении оси Oz и равен по величине 4.

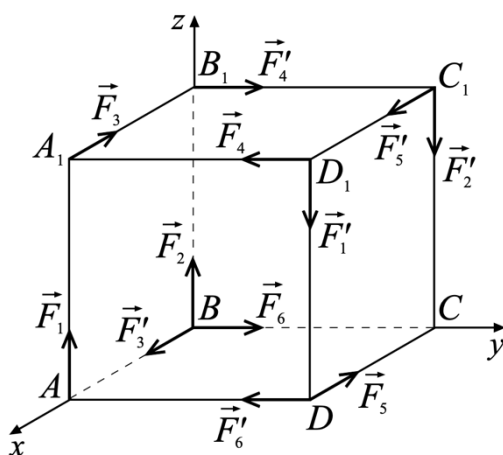


Рисунок 1.19

Пример 1.7. Двенадцать равных по величине сил, образующих шесть пар, действуют по ребрам куба (рисунок 1.19). Определить величину и направление момента результирующей пары, если величина каждой силы равна P , длина ребра куба a .

Решение. Согласно определению момента пары легко видеть, что

$$\overline{mom}(\vec{F}_1, \vec{F}'_1) = -aP\vec{i}, \quad \overline{mom}(\vec{F}_2, \vec{F}'_2) = -aP\vec{i}, \quad \overline{mom}(\vec{F}_3, \vec{F}'_3) = -aP\vec{j}, \quad \overline{mom}(\vec{F}_4, \vec{F}'_4) = -aP\vec{k},$$

$$\overline{mom}(\vec{F}_5, \vec{F}'_5) = -aP\vec{j}, \quad \overline{mom}(\vec{F}_6, \vec{F}'_6) = -aP\vec{k}.$$

Момент результирующей пары $(\vec{F}, \vec{F}')$ равен сумме моментов слагаемых пар: $\overline{mom}(\vec{F}, \vec{F}') = -2aP\vec{i} - 2aP\vec{k} = -2aP(\vec{i} + \vec{k})$.

Величина результирующего момента равна $2\sqrt{2}aP$, а направление совпадает с вектором $\vec{A_1B}$.

Пример 1.8. Балка AB , на которую действует сила $\vec{F}$, закреплена шарнирно в точке A и опирается на стержень CD , закрепленный шарниром в точке C . Система находится в равновесии в положении, указанном на рисунок 1.20. Определить реакции шарниров A и C , если $BD = \frac{1}{3}AB$, $\alpha = 60^\circ$.

Решение. Механическая система, находящаяся в равновесии, состоит из двух твёрдых тел: балки AB и стержня CD . На стержень CD никакие внешние силы не действуют, поэтому силы реакции со стороны балки AB и шарнира C направлены по прямой CD и $\vec{R}_C = -\vec{R}'_D$.

На балку AB действует сила $\vec{F}$, сила реакции со стороны стержня $\vec{R}_D = -\vec{R}'_D$ и сила реакции $\vec{R}_A(X_A, Y_A)$ шарнира A .

В данном случае удобно записать условия равновесия полученной плоской системы сил в виде (1.15):

$$\sum F_{kx} = R_D \sin 30^\circ + X_A = 0, \quad \sum F_{ky} = -F + R_D \cos 30^\circ + Y_A = 0$$

$$\sum mom_A \vec{F}_k = R_D \cdot AD - F \cdot AB \sin 60^\circ = 0$$

Из третьего уравнения найдём $R_D = R_C = \frac{3\sqrt{3}}{4}F$; из первых двух получим

$$Y_A = F - \frac{\sqrt{3}}{2}R_D = -\frac{1}{8}F, \quad X_A = -\frac{1}{2}R_D = -\frac{3\sqrt{3}}{8}F.$$

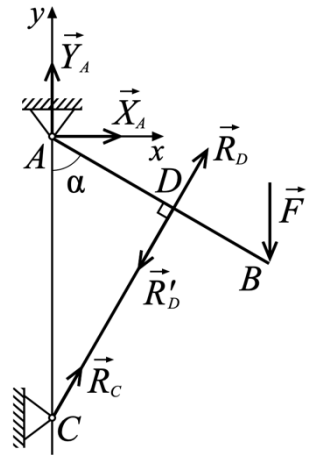


Рисунок 1.20

Пример 1.9. Каким должен быть наибольший вес груза 2, для того, чтобы груз 1 весом 100 Н оставался в покое на наклонной плоскости (рисунок 1.21), если коэффициент трения скольжения $f = 0,3$, а блок идеален (без трения)?

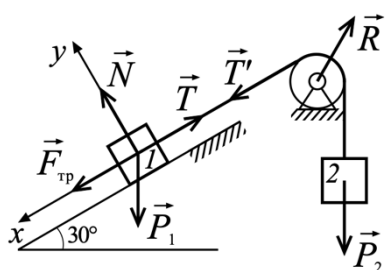


Рисунок 1.21

Решение. Поскольку надо найти наибольший возможный вес груза P_2 при равновесии, то сила трения будет препятствовать перемещению тела 1 вверх, т.е. будет направлена вниз по наклонной плоскости. На груз 1 действуют силы $\vec{P}_1, \vec{N}, \vec{T}, \vec{F}_{тр}$ (рисунок 1.21). Сила натяжения нити будет равна по величине силе P_2 , так как идеальный блок не меняет

величины силы, изменяя только ее направление. Это следует из условия равенства нулю суммы моментов сил, действующих на блок $\{\vec{P}_2, \vec{R}, \vec{T}'\}$, относительно его центра: $T'r - P_2r = 0, \vec{T}' = -\vec{T}$.

Условия равновесия системы сходящихся сил, действующих на груз 1, в проекциях на указанные, оси имеют вид:

$$\sum F_{kx} = F_{тр} + P_1 \sin 30^\circ - T = 0, \quad \sum F_{ky} = N - P_1 \cos 30^\circ = 0, \quad F_{тр} = fN.$$

Из этой системы находим:

$$T = P_2 = fP_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{P_1}{2} = \frac{1}{2} P_1 (f\sqrt{3} + 1) \cong 75,98 \text{ Н}.$$

Пример 1.10. К однородному катку радиусом $R = 0,4 \text{ м}$ приложена пара сил с моментом $M = 210 \text{ Н} \cdot \text{м}$ (рисунок 1.22). Каким может быть наибольший вес катка, для того чтобы он мог катиться вверх по наклонной плоскости, если коэффициент трения качения $\delta = 0,006 \text{ м}$?

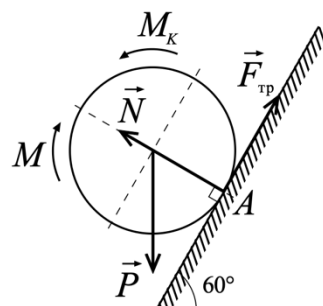


Рисунок 1.22

Решение. Если вес катка будет больше искомого, то каток покатиться вниз. При качении вверх на каток кроме веса $\vec{P}$, нормальной реакции $\vec{N}$, силы трения $\vec{F}_{тр}$ и пары с моментом M будет действовать и пара сил, препятствующих качению вверх $M_k, M_k = \delta N$. Приравнявая к нулю сумму моментов всех сил относительно точки A касания катка с плоскостью, получим $M - \delta P \cos 60^\circ - PR \sin 60^\circ = 0$, откуда найдём

$$P = \frac{2M}{\delta + R\sqrt{3}} \cong 601,03 \text{ Н}.$$

1.1.5.3. Система параллельных сил. Центр тяжести.

Если все силы $\vec{F}_k$, $k = \overline{1, n}$, действующие на твердое тело, параллельны оси Oz , то их проекции на оси x и y равны нулю, равен нулю и момент относительно оси Oz . Система (1.13) дает три нетривиальных условия равновесия:

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0, \quad \sum_{k=1}^n \text{mom}_x \vec{F}_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n \text{mom}_y \vec{F}_k = 0. \quad (1.18)$$

Рассмотрим систему двух параллельных сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$, приложенных в точках A_1, A_2 твердого тела (рисунок 1.23). Положение этих точек задано векторами $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ относительно некоторой системы координат. Предположим, что существует равнодействующая $\vec{R}$ системы $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$, и найдем вектор $\vec{r}_{C_2}$, определяющий точку C_2 ее приложения из условия

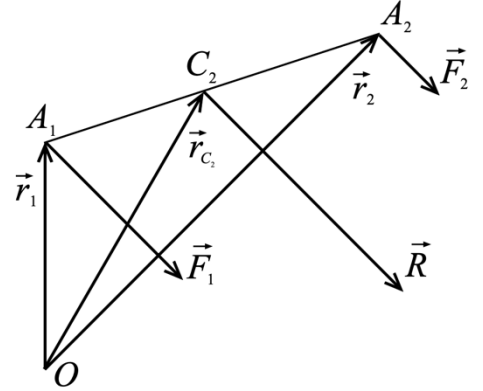


Рисунок 1.23

$$\vec{M}_{C_2} = \overrightarrow{C_2 A_1} \times \vec{F}_1 + \overrightarrow{C_2 A_2} \times \vec{F}_2 = 0.$$

Пусть $\vec{e}$ – единичный вектор, задающий направление одной из сил системы $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$. Тогда $\vec{F}_1 = F_1 \vec{e}$, $\vec{F}_2 = F_2 \vec{e}$ и

$$M_{C_2} = F_1 (\overrightarrow{C_2 A_1} \times \vec{e}) + F_2 (\overrightarrow{C_2 A_2} \times \vec{e}) = (F_1 \overrightarrow{C_2 A_1} + F_2 \overrightarrow{C_2 A_2}) \times \vec{e} = 0. \quad (1.19)$$

Условие (1.19) может быть выполнено лишь в том случае, когда

$$F_1 \overrightarrow{C_2 A_1} + F_2 \overrightarrow{C_2 A_2} = 0. \quad (1.20)$$

Из этого равенства, в частности, следует, что точка C_2 лежит на прямой $A_1 A_2$.

Поскольку $\overrightarrow{C_2 A_1} = \vec{r}_1 - \vec{r}_{C_2}$, $\overrightarrow{C_2 A_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_{C_2}$, то из (1.20) имеем

$$F_1 (\vec{r}_1 - \vec{r}_{C_2}) + F_2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_{C_2}) = 0 \quad \text{и} \quad \vec{r}_{C_2} = \frac{F_1 \vec{r}_1 + F_2 \vec{r}_2}{F_1 + F_2}. \quad (1.21)$$

Таким образом, при условии $F_1 + F_2 \neq 0$ равнодействующая системы двух параллельных сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ существует, и точка ее приложения дается вектором $\vec{r}_{C_2}$.

Заметим, что формула (1.21) не содержит вектора $\vec{e}$. Это значит, что положение точки приложения равнодействующей не зависит от направления параллельных сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2$, а зависит лишь от положения их точек приложения.

Если силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ направлены одинаково, то из (1.20) следует, что точка C_2 находится на отрезке A_1A_2 . Проектируя (1.20) на направление вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$, получим

$$-F_1 \cdot C_2A_1 + F_2 \cdot C_2A_2 = 0 \Rightarrow \frac{C_2A_1}{C_2A_2} = \frac{F_2}{F_1}.$$

Если же направления сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ противоположны, то точка C_2 находится вне отрезка A_1A_2 и в проекции на направление вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$ (1.20) запишется так

$$|F_1|C_2A_1 - |F_2|C_2A_2 = 0 \Rightarrow \frac{C_2A_1}{C_2A_2} = \frac{|F_2|}{|F_1|}.$$

Таким образом, *система параллельных сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$, где $\vec{F}_1 = F_1\vec{e}$, $\vec{F}_2 = F_2\vec{e}$, при условии $F_1 + F_2 \neq 0$ имеет равнодействующую*

$$\vec{R}^* = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,$$

линия действия которой делит расстояние между линиями действия сил на части, обратно пропорциональные силам, внутренним (силы одинаково направлены) или внешним (направления сил противоположны) образом.

Если же $F_1 + F_2 = 0$, то система сил $(\vec{F}_1, -\vec{F}_1)$ (*пара сил*) не имеет равнодействующей, т.к. ее главный вектор равен нулю, а главный момент

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OA_1} \times \vec{F}_1 - \overrightarrow{OA_2} \times \vec{F}_1 = \overrightarrow{A_2A_1} \times \vec{F}_1 \neq 0$$

относительно любого центра O .

Формула (1.21) допускает простое обобщение для случая системы n параллельных сил $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$. Например, для системы трех сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$ на основании формулы (1.18) имеем

$$\vec{r}_{C_3} = \frac{(F_1 + F_2)\vec{r}_{C_2} + F_3\vec{r}_3}{(F_1 + F_2) + F_3} = \frac{F_1\vec{r}_1 + F_2\vec{r}_2 + F_3\vec{r}_3}{F_1 + F_2 + F_3}, \quad F_1 + F_2 + F_3 \neq 0.$$

Аналогично, точка C_n приложения равнодействующей системы n параллельных сил (**центр параллельных сил**) определяется вектором

$$\vec{r}_{C_n} = \frac{\sum_{k=1}^n F_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^n F_k}, \quad \sum_{k=1}^n F_k \neq 0, \quad n \geq 1. \quad (1.22)$$

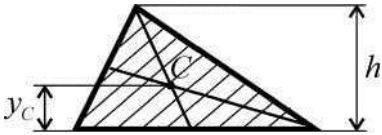
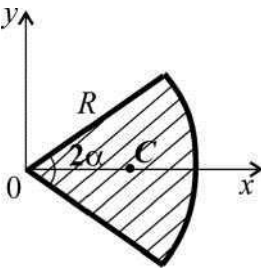
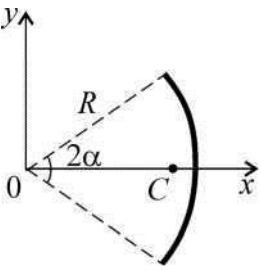
Если считать твердое тело механической системой, состоящей из n материальных точек с массами m_k , то весом (силой тяжести) k -й точки и всего

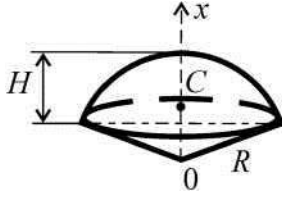
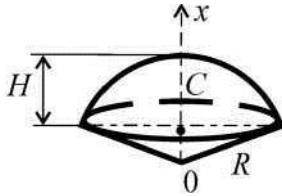
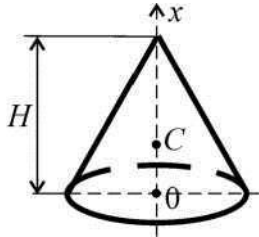
тела будут векторы $\vec{P}_k = m_k \vec{g}$ и $\vec{P} = \sum_{k=1}^n \vec{P}_k$. При малых размерах тела по сравнению, например, с радиусом Земли, силы $\vec{P}_k$ можно считать параллельными и одинаково направленными. Тогда точка C_n приложения равнодействующей силы $\vec{P}$ (*центр тяжести*) найдется по формуле (1.22)

$$\vec{r}_{C_n} = \frac{\sum_{k=1}^n P_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^n P_k} \text{ или } \vec{r}_{C_n} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k g \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^n m_k g} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^n m_k}. \quad (1.23)$$

Формулой (1.23) определяется центр масс тела либо любой механической системы, состоящей из n материальных точек. Легко видеть, что если однородное тело имеет центр, плоскость или ось симметрии, то центр тяжести этого тела находится соответственно в центре, на плоскости или на оси симметрии. В случае сплошных однородных тел суммы в (1.23) заменяются соответствующими объемными, поверхностными или криволинейными интегралами.

Координаты центров тяжести некоторых однородных тел даны в приведенной таблице.

№ п/п	Наименование	Схема тела	Центр тяжести
1.	Площадь треугольника		$y_C = \frac{h}{3}$
2.	Круговой сектор		$x_C = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$
3.	Дуга окружности		$x_C = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$

4.	Поверхность сферического сегмента		$x_C = R - \frac{H}{2}$
5.	Объем сферического сектора		$x_C = \frac{3}{4} \left(R - \frac{H}{2} \right)$
6.	Объем конуса		$x_C = \frac{H}{4}$

Пример 1.11. К балке AD (рисунок 1.24) приложена пара сил с моментом $M = 200 \text{ Н} \cdot \text{м}$, распределенная нагрузка интенсивностью $q = 20 \text{ Н/м}$ и сила $\vec{F}$. Какой должна быть величина этой силы, для того чтобы момент в заделке равнялся $650 \text{ Н} \cdot \text{м}$, если $AB = BC = CD = 2 \text{ м}$. Определить составляющие реакции заделки при этой величине силы $\vec{F}$.

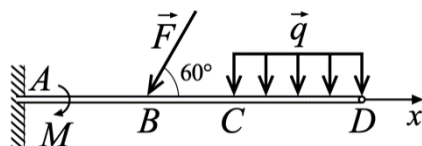


Рисунок 1.24

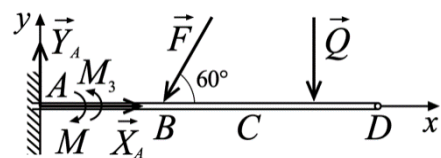


Рисунок 1.25

Решение. Поскольку равномерно распределенная нагрузка является системой параллельных сил, то она имеет равнодействующую и ее можно заменить сосредоточенной силой $Q = q \cdot CD = 40 \text{ Н}$, приложенной в середине отрезка CD . На балку действует плоская система сил и пар (рисунок 1.25) $\{\vec{Q}, \vec{F}, \vec{R}_A(X_A, Y_A), M, M_3\} \square 0$.

Условия равновесия в форме (1.15) приводят к системе:

$$\sum F_{kx} = -F \cos 60^\circ + X_A = 0, \quad \sum F_{ky} = -Q - F \sin 60^\circ + Y_A = 0,$$

$$\sum \text{mom}_A \vec{F}_k = M_3 - M - F \cdot AB \sin 60^\circ - Q \cdot AE = 0.$$

Из последнего уравнения находим искомую величину силы F при заданном моменте заделки M_3 : $650 - 200 - 40 \cdot 5 = F\sqrt{3}$, откуда $F = \frac{250}{\sqrt{3}} \cong 144\text{Н}$.

Первые два уравнения дают составляющие реакции заделки:

$$X_A = \frac{F}{2} \cong 72\text{Н}$$

$$Y_A = F \frac{\sqrt{3}}{2} + Q \cong 165\text{Н}$$

Пример 1.12. Определить координаты центра тяжести однородного изогнутого листа (рисунок 1.26), состоящего из двух треугольников и прямоугольника, если даны размеры: $a = 0,6\text{м}$, $b = 0,8\text{м}$, $c = 0,5\text{м}$.

Решение. Будем считать, что изогнутый лист состоит из трёх частей

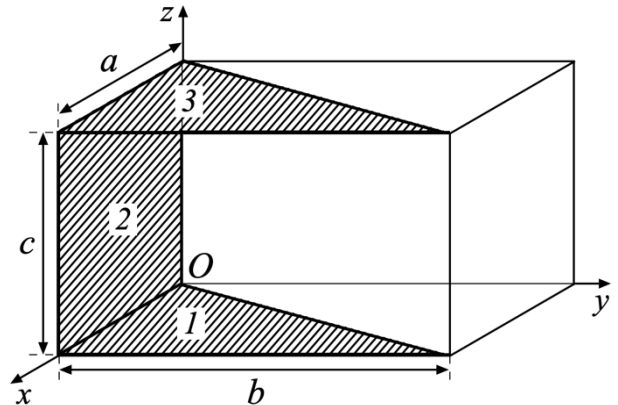


Рисунок 1.26

и выпишем координаты каждой части и их площади, учитывая, что массы пропорциональны площадям, а центр тяжести треугольника находится в точке пересечения его медиан.

$$x_1 = \frac{2}{3}a, \quad y_1 = \frac{1}{3}b, \quad z_1 = 0, \quad m_1 = \frac{1}{2}ab,$$

$$x_2 = \frac{a}{2}, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = \frac{c}{2}, \quad m_2 = ac,$$

$$x_3 = \frac{2}{3}a, \quad y_3 = \frac{1}{3}b, \quad z_3 = c, \quad m_3 = \frac{1}{2}ab.$$

Теперь применим формулу (1.23) в проекциях на указанные оси

$$x_c = \frac{1}{a(b+c)} \cdot \left(\frac{1}{3}a^2b + \frac{1}{2}a^2c + \frac{1}{3}a^2b \right) = \frac{a(4b+3c)}{6(b+c)} \cong 0,36\text{м},$$

$$y_c = \frac{1}{a(b+c)} \cdot \left(\frac{1}{6}ab^2 + 0 + \frac{1}{6}ab^2 \right) = \frac{b^2}{3(b+c)} \cong 0,164\text{м},$$

$$z_c = \frac{1}{a(b+c)} \cdot \left(0 + \frac{1}{2}ac^2 + \frac{1}{2}abc \right) = \frac{1}{2}c = 0,25\text{м}.$$

Так как рассматриваемое тело имеет плоскость симметрии, то последнее равенство можно было записать сразу.

Пример 1.13. Определить координаты центра тяжести однородного тела, состоящего из конуса и цилиндра (рисунок 1.27), если высота $H_1 = 2H = 0,4$.

Решение. Рассматриваемое тело имеет ось симметрии, следовательно, $x_c = y_c = 0$.

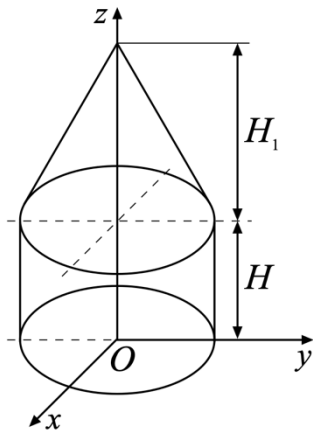


Рисунок 1.27

Объёмы составляющих тел $V_{\text{ц}} = \pi R^2 H$, $V_{\text{к}} = \frac{1}{3} \pi R^2 H_1$, а положения их центров тяжести согласно приведенной таблице:

$$z_{\text{ц}} = \frac{H}{2}, \quad z_{\text{к}} = H + \frac{1}{4} H_1 = \frac{3}{2} H.$$

Используя формулу (1.23) в проекции на ось Oz , получим

$$z_c = \frac{\frac{1}{2} \pi R^2 H^2 + \frac{1}{3} \pi R^2 H_1 \left(H + \frac{1}{4} H_1 \right)}{\pi R^2 \left(H + \frac{1}{3} H_1 \right)} = \frac{9}{10} H = 0,18.$$

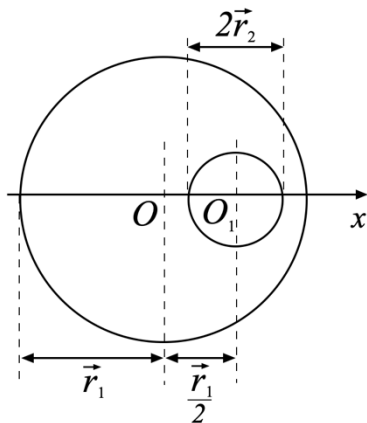


Рисунок 1.28

Пример 1.14. Определить положение центра тяжести однородного диска с круглым отверстием, используя данные, приведенные на рисунок 1.28.

Решение. Используем для решения этой задачи так называемый метод отрицательных масс, т.е. будем считать вырез телом с отрицательной массой. Поскольку рассматриваемое тело имеет ось симметрии x , то центр масс лежит на этой оси и

$$x_c = \frac{x_1 S_1 - x_2 S_2}{S_1 - S_2} = \frac{0 \cdot \pi r_1^2 - \frac{r_1}{2} \pi r_2^2}{\pi r_1^2 - \pi r_2^2} = \frac{r_1 r_2^2}{2(r_1^2 - r_2^2)}.$$

1.1.5.4. Общий случай равновесия твердого тела

Если на твердое тело действует произвольная система сил, не сводящаяся к перечисленным частным случаям, то для решения задач используются необходимые и достаточные условия равновесия в форме (1.13).

Пример 1.15. Квадратная однородная пластинка $ABCD$ со стороной a и весом $P = 5\text{ Н}$ закреплена в точке A при помощи шарового шарнира, а в точке B при помощи цилиндрического шарнира (рисунок 1.29). Сторона AB горизонтальна, в точке E пластина опирается на острие. В точке H на пластину действует сила $\vec{F}$ параллельно стороне AB . Найти реакции в точках A , B и E , если $CE = ED$, $BH = a/3$, $F = 10\text{ Н}$ и пластина образует с горизонтальной плоскостью угол $\alpha = 30^\circ$.

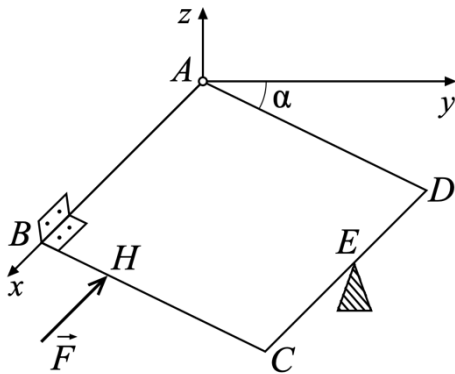


Рисунок 1.29

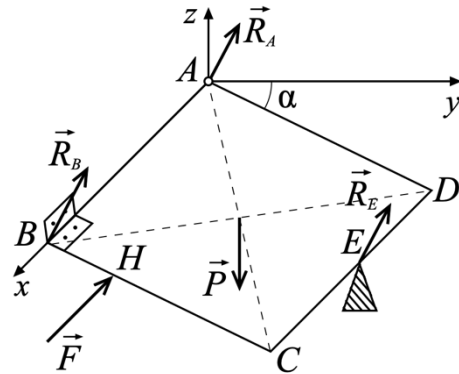


Рисунок 1.30

Решение. Действующие на пластину активные силы: $\vec{F}$ и вес $\vec{P}$. Пластина удерживается в равновесии тремя связями: шаровым шарниром A , реакция которого $\vec{R}_A(X_A, Y_A, Z_A)$, цилиндрическим шарниром B с реакцией $(0, Y_B, Z_B)$, и поддерживающей опорой E , реакция которой перпендикулярна плоскости пластины (рисунок 1.30). Для удобства решения задачи выпишем проекции и моменты всех сил относительно координатных осей в таблицу.

Чтобы записать условия равновесия, достаточно приравнять нулю суммы всех элементов каждого столбца.

Тогда из (1) получим $X_A = F = 10\text{ Н}$, из (4) $R_E = \frac{P}{2} \cos \alpha = \frac{P\sqrt{3}}{4} \cong 2,17\text{ Н}$, из

$$(6) Y_B = -F \frac{\sqrt{3}}{6} - P \frac{\sqrt{3}}{16} \cong -3,43\text{ Н}, \text{ из (5) } Z_B = \frac{F}{6} + \frac{P}{2} - \frac{3P}{16} \cong 3,23\text{ Н}, \text{ из (2)}$$

$$Y_A = -Y_B - \frac{1}{2} R_E \cong 2,35\text{ Н}, \text{ из (3) } Z_A = P - Z_B - R_E \frac{\sqrt{3}}{2} = -0,11\text{ Н}.$$

$\vec{F}_k$	F_{kx}	F_{ky}	F_{kz}	M_{kx}	M_{ky}	M_{kz}
$\vec{F}$	$-F$	0	0	0	$F \frac{a}{3} \sin \alpha$	$F \frac{a}{3} \cos \alpha$
$\vec{P}$	0	0	$-P$	$-P \frac{a}{2} \cos \alpha$	$P \frac{a}{2}$	0
$\vec{R}_A$	X_A	Y_A	Z_A	0	0	0
$\vec{R}_B$	0	Y_B	Z_B	0	$-Z_B a$	$Y_B a$
$\vec{R}_E$	0	$R_E \sin \alpha$	$R_E \cos \alpha$	$R_E a$	$-R_E \frac{a}{2} \cos \alpha$	$R_E \frac{a}{2} \sin \alpha$

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

Пример 1.16. Два одинаковых однородных стержня AC и BC длиной 2 м и весом 120 Н соединены между собой и с опорами сферическими шарнирами. В горизонтальном положении стержни удерживаются вертикальным тросом DE . К стержню AC приложена горизонтальная сила $F = 240$ Н, параллельная оси Ox , $EC = AN = 0,5$ м (рисунок 1.31). Определить реакции шарниров A и B и силу T натяжения нити.

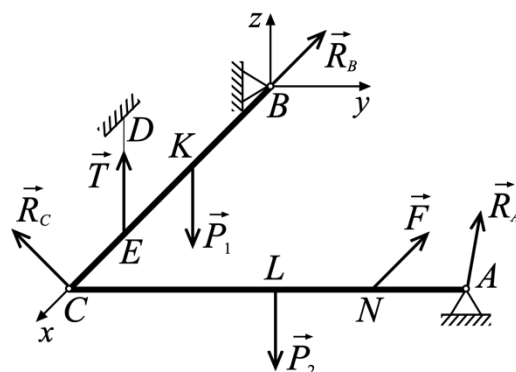


Рисунок 1.31

Решение. Система состоит из двух твердых тел, соединенных шарниром C . На стержень AC действуют силы $\vec{R}_A(X_A, Y_A, Z_A)$, $\vec{R}_C(X_C, Y_C, Z_C)$, $\vec{F}$, $\vec{P}_2$. На стержень BC действуют силы $\vec{R}_B(X_B, Y_B, Z_B)$, $-\vec{R}_C$, $\vec{P}_1$, $\vec{T}$. Запишем условия (1.13) равновесия систем сил, действующих на каждое тело.

AC :

$$R_x = X_A + X_C - F = 0, \quad (1)$$

$$R_y = Y_A + Y_C = 0, \quad (2)$$

$$R_z = Z_A + Z_C - P_2 = 0, \quad (3)$$

$$M_{Ox} = 2Z_A - P_2 = 0, \quad (4)$$

$$M_{Oy} = -2Z_A + 2P_2 - 2Z_C = 0, \quad (5)$$

$$M_{Oz} = -2X_A + 2Y_A + 1,5F + 2Y_C = 0. \quad (6)$$

BC :

$$R_x = X_B - X_C = 0, \quad (7)$$

$$R_y = Y_B - Y_C = 0, \quad (8)$$

$$R_z = Z_B - Z_C - P_1 + T = 0, \quad (9)$$

$$M_{Ox} = 0, \quad (10)$$

$$M_{Oy} = P_1 - 1,5T + 2Z_C = 0, \quad (11)$$

$$M_{Oz} = -2Y_C = 0. \quad (12)$$

Полученная система 12 уравнений содержит 10 неизвестных, но уравнение (10) удовлетворяется тождественно, а уравнения (3) и (5) эквивалентны. Из уравнений (12), (8) и (2) получаем $Y_C = Y_B = Y_A = 0$, из (4) находим $Z_A = 0,5P = 60$ Н, из (5) следует, что $Z_C = P - Z_A = 0,5P = 60$ Н, из (11) определяем $T = \frac{2}{3}(P + 2Z_C) = \frac{4}{3}P = 160$ Н, из (9) $Z_B = Z_C + P_1 - T = \frac{P}{6} = 20$ Н, из (6) $X_A = 0,75F = 180$ Н, из (1) $X_C = F - X_A = 0,25F = 60$ Н, из (7) $X_B = X_C = 60$ Н.

1.1.6. Приведение системы сил к произвольному центру.

Пусть на твердое тело действует сила $\vec{F}$, приложенная в точке А. Выберем любую другую точку В тела и приложим в ней уравновешенную систему сил $(\vec{F}', \vec{F}'')$, $\vec{F}' = -\vec{F}'' = \vec{F}$. Сила $\vec{F}$ будет эквивалентна системе трех сил $(\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}'')$, из которых $\vec{F}, \vec{F}''$ образуют пару с моментом, равным $\overrightarrow{BA} \times \vec{F}$ (рисунок 1.32). Таким образом, верно утверждение:

Силу $\vec{F}$, приложенную в какой-либо точке А твердого тела можно, не изменяя ее действия на тело, перенести в любую другую точку В, добавив при этом пару сил, момент которой $\overrightarrow{BA} \times \vec{F}$ равен моменту переносимой силы относительно точки переноса.

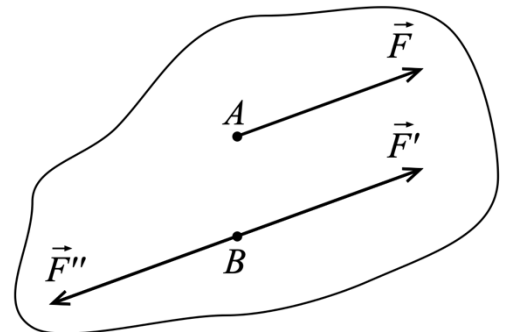


Рисунок 1.32

Пусть на тело действует система сил $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$, приложенных в точках A_k . Выберем произвольную точку О тела (центр приведения) и перенесем все силы

$\vec{F}_k$ в эту точку, добавив при этом соответствующие пары сил с моментами $\vec{r}_k \times \vec{F}_k$, $\vec{r}_k = \overrightarrow{OA_k}$. Складывая все силы, приложенные в точке O , и все вектор – моменты пар, получим, что система $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$ эквивалентна одной силе, равной главному вектору системы и одной паре, момент которой равен главному моменту системы относительно центра O :

Эти векторы называются **элементами приведения**.

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k, \quad \vec{M}_O = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k. \quad (1.24)$$

1.1.6.1. Инварианты приведения.

Если за центр приведения взять другую точку O' , то, очевидно, вектор $\vec{R}$ при этом не изменится, значит *главный вектор системы сил не зависит от выбора центра приведения и является ее первым инвариантом*.

Вычислим главный момент системы относительно точки O' (рисунок 1.33)

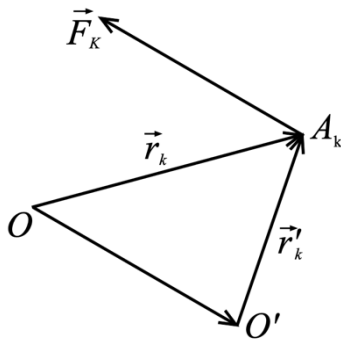


Рисунок 1.33

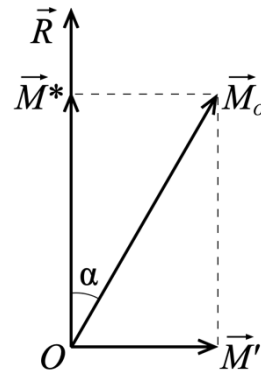


Рисунок 1.34

$$\vec{M}_{O'} = \sum_{k=1}^n \vec{r}'_k \times \vec{F}_k = \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k - \overrightarrow{OO'}) \times \vec{F}_k = \vec{M}_O - \overrightarrow{OO'} \times \vec{R}. \quad (1.25)$$

Из (1.25) следует, что главный момент системы *зависит* от выбора центра приведения.

Умножим скалярно обе части равенства (1.25) на вектор $\vec{R}$ и получим $\vec{M}_{O'} \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot \vec{R}$, так как $(\overrightarrow{OO'} \times \vec{R}) \cdot \vec{R} = 0$. Это значит, что *вторым инвариантом приведения системы сил является скалярное произведение $\vec{M}_O \cdot \vec{R}$* .

Учитывая, что $\vec{M}_O \cdot \vec{R} = M_O R \cos \alpha$ и для данной системы сил $R = \text{const}$, получим, что при любом центре приведения $M_O \cos \alpha = M^*$ (рисунок 1.34)

является величиной постоянной, то есть *проекция главного момента системы сил на направление ее главного вектора не изменяется с изменением центра приведения*.

1.1.6.2. Динамический винт

Итак, любая система сил, действующих на твердое тело, приводится к силе $\vec{R}$, приложенной в точке O , и паре сил с моментом $\vec{M}_O$. При приведении к новому центру O' меняется вектор $\vec{M}_O$, но сохраняется его проекция на вектор $\vec{R}$, следовательно, меняется только его ортогональная составляющая $\vec{M}'$ (рисунок 1.34). Найдем такой центр O^* , при приведении к которому эта составляющая будет равна нулю, то есть вектор $\vec{M}_{O^*} = \vec{M}^*$ будет параллелен силе $\vec{R}$ и его величина M^* будет наименьшей.

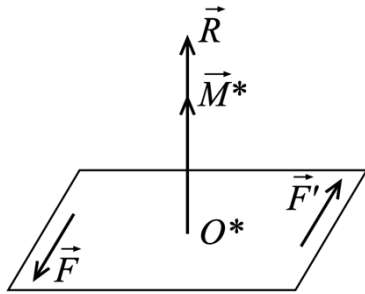


Рисунок 1.35

Такую систему сил, состоящую из силы $\vec{R}$ и пары сил с моментом $\vec{M}^* \parallel \vec{R}$, называют **динамическим винтом** или **динамой** (рисунок 1.35).

С учетом условия (1.25) вектор $\overrightarrow{OO^*}$, дающий положение центра O^* , при приведении к которому система сил становится динамическим винтом, найдется из векторного уравнения

$$\vec{M}_O - \overrightarrow{OO^*} \times \vec{R} = p\vec{R}. \quad (1.26)$$

Величину p , которая называется **параметром винта**, найдем, умножив скалярно это равенство на вектор $\vec{R}$:

$$\vec{R} \cdot \vec{M}_O = pR^2 \Rightarrow p = \frac{\vec{R} \cdot \vec{M}_O}{R^2}. \quad (1.27)$$

Равенство (1.26), выражающее параллельность векторов $\vec{M}_{O^*}$ и $\vec{R}$ можно записать в виде

$$\frac{\vec{M}_O - \overrightarrow{OO^*} \times \vec{R}}{\vec{R}} = p, \quad (1.28)$$

или в скалярной форме с учетом того, что $\overrightarrow{OO^*}(x, y, z)$:

$$\frac{M_x - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{M_y - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \frac{M_z - (xR_y - yR_x)}{R_z} = p. \quad (1.29)$$

Векторное уравнение (1.28), или скалярные уравнения (1.29) задают прямую линию, которая называется **центральной винтовой осью** системы сил. При

приведении системы сил к любой точке центральной винтовой оси система сил заменяется динамой.

1.1.6.3. Частные случаи приведения.

1. Если в результате приведения системы сил к центру O оказалось, что второй инвариант $\vec{M}_O \cdot \vec{R} \neq 0$, то система сил приводится к невырожденной динаме с параметром $p \neq 0$ (1.27) и центральной винтовой осью, определяемой уравнениями (1.29).

2. Если при приведении к центру O : $\vec{R} = 0$, а $\vec{M}_O \neq 0$, то динама вырождается в пару сил с моментом $\vec{M}_O$, который в силу (1.25) не будет зависеть от выбора центра приведения.

3. Если $\vec{M}_O = 0$, а $\vec{R} \neq 0$, то система приводится к равнодействующей, проходящей через точку O .

4. Если $\vec{M}_O \cdot \vec{R} = 0$, а $\vec{R} \neq 0$ и $\vec{M}_O \neq 0$, то $\vec{M}_O \perp \vec{R}$ и представляя $\vec{M}_O$ парой $(\vec{R}', \vec{R}'')$, $\vec{R}' = -\vec{R}'' = \vec{R}$ (рисунок 1.36), получим, что система приводится к равнодействующей $\vec{R}$, линия действия которой, определяемая уравнением (1.29)

при $p = 0$, лежит на расстоянии $d = \frac{M_O}{R}$ от точки O .

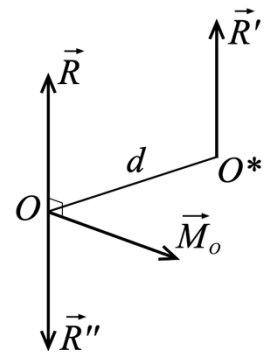


Рисунок 1.36

5. При $\vec{R} = 0$ и $\vec{M}_O = 0$ система сил является уравновешенной (эквивалентной нулю).

1.1.6.4. План решения задач на приведение произвольной системы сил к простейшему виду.

1. Изобразить на рисунке все приложенные к телу силы.
2. Найти проекции главного вектора

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \quad R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz}$$

и главного момента

$$M_{Ox} = \sum_{k=1}^n \text{mom}_x \vec{F}_k, \quad M_{Oy} = \sum_{k=1}^n \text{mom}_y \vec{F}_k, \quad M_{Oz} = \sum_{k=1}^n \text{mom}_z \vec{F}_k$$

в выбранной системе координат.

3. Найти величины главного вектора и главного момента:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}, \quad M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2}.$$

4. Вычислить второй инвариант приведения:

$$\vec{R} \cdot \vec{M}_O = R_x M_{Ox} + R_y M_{Oy} + R_z M_{Oz}.$$

5. Найти наименьший главный момент $M^* = \frac{\vec{R} \cdot \vec{M}_O}{R}$ и параметр винта

$$p = \frac{\vec{R} \cdot \vec{M}_O}{R^2} = \frac{M^*}{R}.$$

6. Записать уравнение центральной винтовой оси (1.29).

Анализируя полученные результаты, сделать заключение о том, к какому простейшему виду приводится данная система сил.

Пример 1.17. При приведении системы сил к центру O получены главный вектор $R = 10 \text{ Н}$ и главный момент $M_O = 20 \text{ Н} \cdot \text{м}$ (рисунок 1.37). Определить главный момент в центре приведения A , если расстояние $OA = 2 \text{ м}$.

Решение. Согласно формуле (1.26):

$$\vec{M}_A = \vec{M}_O - \vec{OA} \times \vec{R} = M_O \vec{i} - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & OA & 0 \\ 0 & 0 & R \end{vmatrix} = (M_O - OA \cdot R) \vec{i} = 0.$$

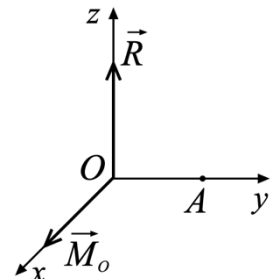


Рисунок 1.37

Пример 1.18. По ребрам прямоугольного параллелепипеда, соответственно равным 10 м, 4 м и 5 м, действуют 6 сил, указанных на рисунок 1.38.

$P_1 = 4 \text{ Н}$, $P_2 = 6 \text{ Н}$, $P_3 = 3 \text{ Н}$,
 $P_4 = 2 \text{ Н}$, $P_5 = 6 \text{ Н}$, $P_6 = 8 \text{ Н}$. Привести эту систему сил к простейшему виду и определить координаты точки пересечения центральной винтовой оси с координатными плоскостями.

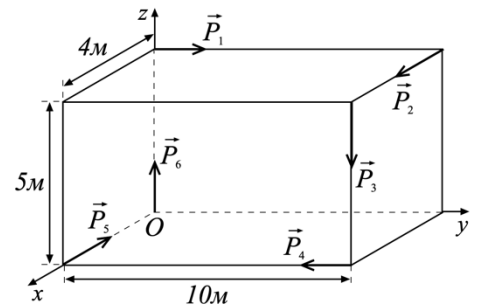


Рисунок 1.38

Решение. Следуя общему плану, найдём проекции главного вектора изображённой на рисунке системы сил

$$R_x = P_2 - P_5 = 0, \quad R_y = P_1 - P_4 = 2, \quad R_z = P_6 - P_3 = 5, \quad R = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29} \approx 5,39.$$

Проекции главного момента системы сил на оси координат имеют вид:

$$M_x = -5P_1 - 10P_3 = -50, \quad M_y = 5P_2 + 4P_4 = 42, \quad M_z = -10P_2 - 4P_4 = -68,$$

$$M_0 = \sqrt{50^2 + 42^2 + 68^2} \cong 94,28.$$

Второй инвариант приведения $\vec{R} \cdot \vec{M}_0 = -50 \cdot 0 + 2 \cdot 42 - 5 \cdot 68 = -256 \neq 0$, значит, система приводится к динаме с моментом $M^* = \frac{\vec{R} \cdot \vec{M}_0}{R} = -\frac{256}{5,39} \cong -47,5$.

Знак «-» показывает, что векторы $\vec{R}$ и $\vec{M}^*$ имеют противоположные направления.

Уравнение центральной винтовой оси (1.29) имеет вид:

$$\frac{-50 - (5y - 2z)}{0} = \frac{42 - (0 \cdot z - 5x)}{2} = \frac{-68 - (2x - 0 \cdot y)}{5} = \frac{M^*}{R} = -\frac{256}{29} = -8,83.$$

Из этого уравнения находим $\begin{cases} 5y - 2z = -50 \\ x = -11,93 \end{cases}$ – уравнение прямой, лежащей

в плоскости $x = -11,93$.

Центральная винтовая ось, проходящая через точки $A_1(-11,93; -10; 0)$ и $A_2(-11,93; 0; 25)$, параллельна главному вектору $\vec{R}(0; 2; 5)$ ($\vec{A_1A_2}(0; 10; 25)$).

На схематическом рисунке 1.39 показаны все элементы приведения.

Следует отметить, что $\vec{R}$, $\vec{M}_0$ и длины отрезков – величины разных размерностей, поэтому могут откладываться в разных масштабах.

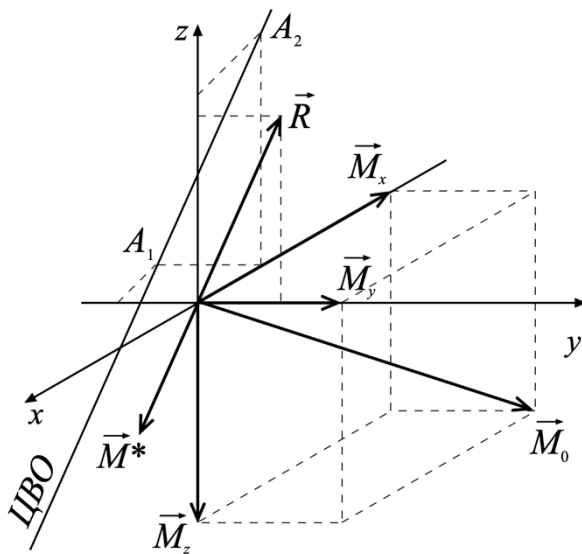


Рисунок 1.39

Пример 1.19. Вес радиомачты с бетонным основанием $G = 14 \text{ кН}$. К мачте приложены сила натяжения антенны $F = 2 \text{ кН}$ и равнодействующая сил давления ветра $P = 5 \text{ кН}$; обе силы горизонтальны и расположены во взаимно перпендикулярных плоскостях; $H = 15 \text{ м}$, $h = 6 \text{ м}$ (рисунок 1.40). Определить результирующую реакцию грунта, в котором уложено основание мачты.

Решение. Результирующая реакция грунта будет состоять из силы и пары, противоположных главному вектору и главному моменту системы сил $\{\vec{R}, \vec{F}, \vec{G}\}$, действующих на мачту. Найдём эти величины:

$$R_x = P = 5, R_y = F = 2, R_z = -G = -14; M_x = -FH = -30, M_y = Ph = 30, M_z = 0.$$

Так как $\vec{R} \cdot \vec{M}_0 = -150 + 60 = -90 \neq 0$, то система приводится к динаме с наименьшим моментом $M^* = \frac{\vec{R} \cdot \vec{M}_0}{R} = -6$. Ось динамы определяется уравнениями

$$\frac{-30 - (-14y - 2z)}{5} = \frac{30 - (5z + 14x)}{2} = \frac{0 - (2x - 5y)}{-14} = -\frac{2}{5}$$

или $\begin{cases} z + 7y = 14, \\ 2x - 5y = -5,6 \end{cases}$ и пересекает плоскость основания в точке $(2, 2; 2; 0)$.

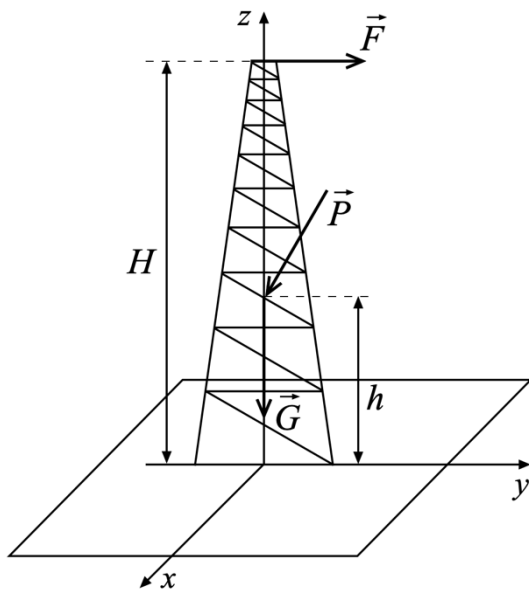


Рисунок 1.40

Таким образом, силы реакции грунта приводятся к динаме, состоящей из силы $\vec{R}'(-5, -2, 14)$ и пары с главным моментом $M'^* = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

1.2. Кинематика.

1.2.1. Способы задания движения материальной точки. Кинематические характеристики движения точки.

1.2.1.1. Способы задания движения материальной точки.

В кинематике точки решаются две задачи:

- 1) описать движение точки;
- 2) найти кинематические характеристики этого движения: траекторию, скорость и ускорение.

Задать (описать) движение материальной точки – значит определить ее положение относительно некоторой системы отсчета в любой момент времени. Это может быть сделано одним из следующих способов.

1. Векторный (координатный) способ.

Введем декартову систему координат $Oxyz$, относительно которой будем рассматривать движение точки (рисунок 2.1). Положение точки в любой момент времени будет известно, если задан ее радиус – вектор как функция времени

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad (2.1)$$

либо его координаты

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t). \quad (2.2)$$

Кривая, которую описывает конец радиус – вектора в процессе движения точки (*годограф вектора*), называется **траекторией** точки. В силу непрерывности движения траектория точки есть некоторая непрерывная кривая Γ неподвижная относительно системы $Oxyz$. Равенства (2.2) задают **уравнения движения** точки и ее траекторию в параметрической форме.

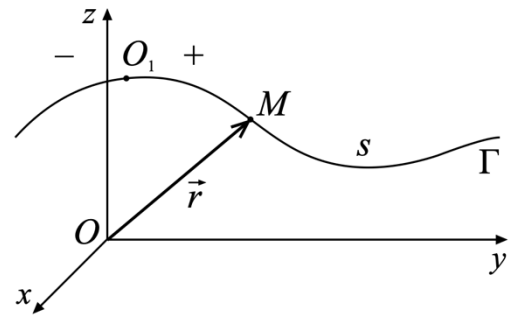


Рисунок 2.1

2. Естественный способ.

В выбранной системе координат каким-либо способом задается траектория Γ материальной точки, на которой указывается начало O_1 и положительное направление отсчета дуговой координаты s . Тогда положение точки в любой момент времени будет известно, если задан **закон движения** точки по траектории

$$s = s(t). \quad (2.3)$$

1.2.1.2. Скорость точки.

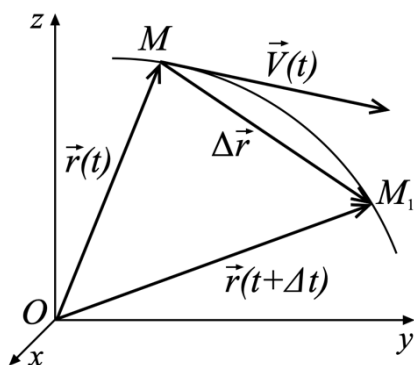


Рисунок 2.2

Вектор $\Delta \vec{r} = \overline{MM_1} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ (рисунок 2.2) определяет изменение положения точки за время Δt и направлен по хорде траектории. Вектор

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V} \quad (2.4)$$

приложен в точке M , направлен по касательной к траектории в сторону движения и называется **скоростью** материальной точки.

Если движение задано координатным способом, то проекции скорости на оси декартовых координат:

$$V_x(t) = \dot{x}(t), V_y(t) = \dot{y}(t), V_z(t) = \dot{z}(t). \quad (2.5)$$

Здесь и далее точкой обозначается производная по времени.

Если движение точки задано естественным способом (2.3) и единичный вектор касательной к траектории $\vec{\tau}$ направлен в сторону увеличения параметра s , то

$$\vec{V} = V_{\tau} \vec{\tau} \text{ и } V_{\tau}(t) = \frac{ds(t)}{dt}. \quad (2.6)$$

Знаки скаляров V_{τ} и $\frac{ds}{dt}$, очевидно, совпадают, и поскольку длина кривой есть предел длины вписанной в эту кривую ломаной линии, то с точностью до величины первого порядка малости по отношению к Δt : $|\Delta \vec{r}| = \overset{\cup}{MM_1} = |\Delta s|$.

Следовательно, $|\vec{V}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta s|}{\Delta t} = \left| \frac{ds}{dt} \right|$, откуда и вытекают формулы (2.6).

Для краткости будем обозначать $V(t) = V_{\tau}(t)$, тогда $V(t) = \dot{s}(t)$.

1.2.1.3. Ускорение точки.

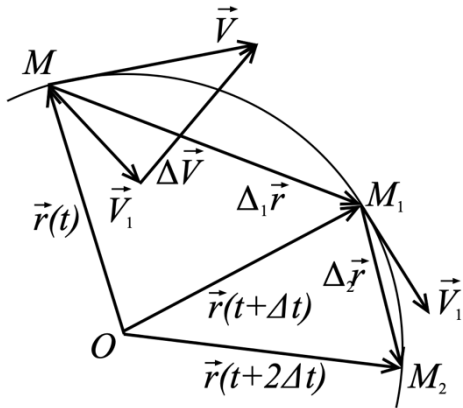


Рисунок 2.3

Вектор $\Delta \vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V} = \vec{V}(t + \Delta t) - \vec{V}(t)$ (рисунок 2.3) определяет изменение скорости точки за время Δt и направлен, очевидно, в сторону вогнутости траектории. Вектор

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{W}(t) \quad (2.7)$$

называется **ускорением** материальной точки.

Проекции ускорения на оси декартовых координат:

$$W_x(t) = \ddot{x}(t), W_y(t) = \ddot{y}(t), W_z(t) = \ddot{z}(t). \quad (2.8)$$

Чтобы определить ускорение при естественном способе задания движения, необходимо вспомнить некоторые понятия дифференциальной геометрии.

1. *Предельное положение плоскости, проходящей через три точки M, M_1, M_2 некоторой кривой, когда $M_1 \rightarrow M$ и $M_2 \rightarrow M$, называется **соприкасающейся плоскостью** этой кривой в точке M . Из рисунка 2.3 видно, что вектор ускорения лежит в соприкасающейся плоскости и направлен в сторону вогнутости траектории.*

2. *Единичный вектор $\vec{n}$, лежащий в соприкасающейся плоскости некоторой кривой в точке M , направленный в сторону вогнутости кривой и*

перпендикулярный вектору касательной $\vec{\tau}$, называется **вектором главной нормали кривой** в точке M . Вектор $\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}$ называется **вектором бинормали кривой** в точке M . Векторы $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$ определяют правую систему координат, которая движется вместе с точкой и называется **естественным, натуральным** или **сопровождающим** трехгранником траектории (рисунок 2.4).

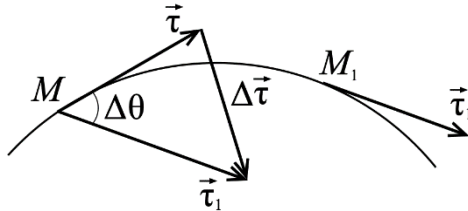


Рисунок 2.4

При перемещении материальной точки по траектории на расстояние Δs за время Δt вектор касательной $\vec{\tau}$ повернется на некоторый угол $\Delta\theta$ и вектор $\Delta\vec{\tau}$ будет направлен в сторону вогнутости траектории (рисунок 2.4). Так как

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \vec{\tau} = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (\vec{\tau} \cdot \vec{\tau}) = 0, \quad (\text{производная единичного}$$

вектора перпендикулярна этому вектору), и

$$\left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s} \right| = 2 \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} = k, \quad \text{то} \quad \frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{n}.$$

3. Скаляр $k(s) \geq 0$ называется **кривизной** кривой в точке M . Величина $\rho = \frac{1}{k}$ называется **радиусом кривизны** кривой в точке M .

Вектор ускорения можно представить в виде

$$\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(V\vec{\tau}) = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + V \frac{d\vec{\tau}}{dt}.$$

Поскольку $\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = kV\vec{n}$, то

$$\vec{W} = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + \frac{V^2}{\rho}\vec{n}. \quad (2.9)$$

Таким образом, при естественном способе задания движения вектор ускорения раскладывается на составляющие по осям естественного трехгранника:

$$W_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad W_n = \frac{V^2}{\rho}, \quad W_b = 0 \quad \text{и} \quad \text{tg} \mu = \frac{W_\tau}{W_n}, \quad (2.10)$$

где μ – угол, который вектор полного ускорения образует с нормалью к траектории точки.

Из этих формул следует, что касательное ускорение точки характеризует изменение величины скорости, а нормальное ускорение – изменение ее направления.

$$V = \omega R, W_{\tau} = \varepsilon R, W_n = R\omega^2, W = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \operatorname{tg} \mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}, \quad (2.14)$$

Пример 2.1. При отходе от станции скорость поезда возрастает равномерно и достигает величины 72 км/ч через 3 мин; путь расположен на закруглении радиусом 800 м. Определить касательное, нормальное и полное ускорение поезда через 2 мин после начала движения, а также пройденный за это время путь.

Решение. Движение поезда происходит по законам (2.11) при $s_0 = 0$, $V_0 = 0$ и в момент $t = 180$ с из первого уравнения находим $W_{\tau} = \frac{V}{t} = \frac{1}{9} \text{ м/с}^2$. При $t = 120$ с : $V = W_{\tau} t = \frac{1}{9} \cdot 120 = \frac{40}{3} \text{ м/с}$ и $W_n = \frac{V^2}{R} = \frac{1600}{9 \cdot 800} = \frac{2}{9} \text{ м/с}^2$, $W = \sqrt{W_{\tau}^2 + W_n^2} \cong 0,248 \text{ м/с}^2$. Пройденный путь определяется из второго уравнения (2.11): $s = W_{\tau} \frac{t^2}{2} = \frac{120^2}{18} = 800 \text{ м}$.

Пример 2.2. Даны уравнения движения снаряда, начальная скорость которого $\vec{V}_0$ составляет угол α с горизонтом: $x = V_0 t \cos \alpha$, $y = V_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$. Здесь g – ускорение силы тяжести, ось x горизонтальна, ось y направлена вертикально вверх. Требуется определить:

- 1) траекторию снаряда, высоту H , дальность L и время T полета;
- 2) при каком угле бросания α дальность полета будет максимальной и соответствующие высоту и время полета;
- 3) угол α , при котором снаряд попадет в заданную точку $A(x; y)$;
- 4) кривую безопасности (все точки, лежащие вне этой кривой, не могут быть достигнуты снарядом при заданной начальной скорости и любом угле бросания α);
- 5) радиус кривизны траектории в начальной и наивысшей точках.

Решение.

1) Исключая t из уравнений движения, получим уравнение траектории: $y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$. В наивысшей точке траектории скорость снаряда горизонтальна, значит $\dot{y} = V_0 \sin \alpha - gt = 0$, откуда находим время достижения наивысшей точки $t_1 = \frac{V_0 \sin \alpha}{g}$, так что $H = y(t_1) = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$.

Так как траекторией является парабола, симметричная относительно вертикали, проходящей через наивысшую точку, то время полета $T = 2t_1 = \frac{2V_0 \sin \alpha}{g}$, а дальность $L = x(T) = \frac{V_0^2}{g} \sin 2\alpha$.

2) Очевидно, что максимальная дальность $L_{\max} = \frac{V_0^2}{g}$ достигается при $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

. Соответствующие этому углу значения $H = \frac{V_0^2}{4g}$, $T = \sqrt{2} \frac{V_0}{g}$.

3) Так как $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$, то из уравнения траектории получим квадратное уравнение для $\operatorname{tg} \alpha$: $\operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{V_0^2}{gx} \operatorname{tg} \alpha + \frac{2V_0^2 y}{gx^2} + 1 = 0$, решение которого определяет искомый угол: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{V_0^2 \pm \sqrt{V_0^4 - 2V_0^2 gy - g^2 x^2}}{gx}$. Таких углов оказывается два.

Каждый из них обеспечивает попадание в заданную точку $A(x, y)$ по настильной или навесной траектории.

4) Если попадание в заданную точку невозможно, то квадратное уравнение п.3 для $\operatorname{tg} \alpha$ не имеет действительных корней, значит $V_0^4 - 2V_0^2 gy - g^2 x^2 < 0$ и искомой кривой безопасности будет парабола $y = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{2V_0^2} x^2$.

5) Радиус кривизны траектории можно определить по формуле (2.10) для нормального ускорения: $\rho = \frac{V^2}{W_n}$. По формулам (2.5): $V_x = \dot{x} = V_0 \cos \alpha$,

$$V_y = \dot{y} = V_0 \sin \alpha - gt, \quad V^2 = V_x^2 + V_y^2 = V_0^2 - 2V_0 gt \sin \alpha + g^2 t^2.$$

W_n определим как $W_n = \sqrt{W^2 - W_\tau^2}$, где $W^2 = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 = g^2$, а для нахождения W_τ продифференцируем по времени полученное выражение для V^2 : $2VW_\tau = -2V_0 g \sin \alpha + 2g^2 t$, откуда найдем $W_\tau = \frac{g^2 t - V_0 g \sin \alpha}{V}$.

В начальной точке при $t = 0$: $W_\tau = -g \sin \alpha$, $W_n = -g \cos \alpha$ и $\rho = \frac{V_0^2}{g \cos \alpha}$.

В наивысшей точке при $t = t_1$: $V = V_0 \cos \alpha$, $W_\tau = 0$, $W_n = g$ и $\rho = \frac{V_0^2 \cos^2 \alpha}{g}$.

Пример 2.3. На проволоочной окружности радиуса $0,1 \text{ м}$ надето колечко M ; через него проходит стержень OA , который равномерно вращается вокруг точки O , лежащей на той же окружности (рисунок 2.6); угловая скорость стержня такова, что он поворачивается на прямой угол за 5 сек. Определить скорость и ускорение колечка.

Решение. Колечко M совершает круговое движение. Так как $\varphi = 2\psi$ (рисунок 2.6), а $\dot{\psi} = \frac{\pi}{10}$, то угловая скорость вращения радиуса CM равна $\omega = \dot{\varphi} = \frac{\pi}{5}$ и $\varepsilon = 0$. Тогда по формулам (2.14) $V = \omega R = 0,02\pi \text{ м/с}$, $W_\tau = 0$, $W = W_n = \omega^2 R = 0,004\pi^2 \text{ м/с}^2$.

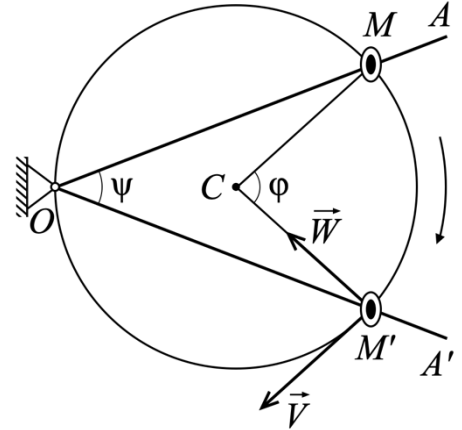


Рисунок 2.6

1.2.2. Простейшие движения абсолютно твердого тела.

Основные задачи кинематики твердого тела состоят в следующем:

- 1) описать движение тела в целом и найти его кинематические характеристики;
- 2) описать движение и найти кинематические характеристики любой точки тела.

1.2.2.1. Поступательное движение твердого тела.

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, принадлежащая телу, перемещается параллельно самой себе.

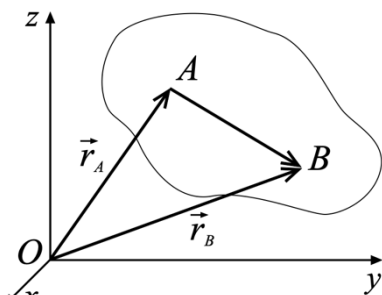


Рисунок 2.7

Возьмем произвольные точки A, B тела, заданные векторами $\vec{r}_A, \vec{r}_B$ (рисунок 2.7). Во все время движения очевидно выполняется равенство

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overline{AB}, \quad (2.15)$$

в котором вектор $\overline{AB}$ постоянен по величине (тело абсолютно твердое) и по направлению (движение поступательное). Следовательно, траектории точек тела

при поступательном движении получаются друг из друга параллельным переносом на постоянный вектор, характеризующий относительное положение этих точек в теле. Дифференцируя равенство (2.15), получаем

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B, \vec{W}_A = \vec{W}_B.$$

Это значит, что при поступательном движении абсолютно твердого тела скорости и ускорения всех его точек одинаковы, т. е. скорость и ускорение тела являются свободными векторами.

Таким образом, поступательное движение абсолютно твердого тела полностью описывается движением одной из его точек и все кинематические характеристики движения тела совпадают с таковыми для свободной материальной точки.

1.2.2.2. Вращение тела вокруг неподвижной оси

*Вращательным движением абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое движение, при котором две его точки остаются неподвижными во все время движения. Прямая, проходящая через неподвижные точки, называется **осью вращения** тела.*

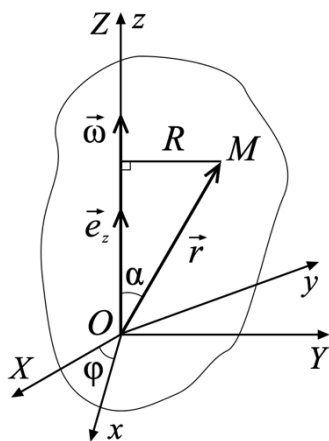


Рисунок 2.8

Введем неподвижную OXYZ и подвижную Oxyz системы координат с общим началом O так, чтобы оси OZ и Oz совпадали и лежали на оси вращения тела. Систему Oxyz считаем скрепленной с телом. Тогда положение тела относительно системы OXYZ однозначно определится одним параметром – углом φ между осями OX и Oх. Будем считать, что угол φ возрастает, если система Oxyz поворачивается против часовой стрелки при наблюдении с конца единичного вектора $\vec{e}_z$ оси Oz (рисунок 2.8). Таким образом, вращение тела вокруг неподвижной оси описывается уравнением

$$\varphi = \varphi(t).$$

Кинематическими характеристиками движения тела являются **угловая скорость** и **угловое ускорение**, введенные в п. 2.1.4:

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_z, \vec{\varepsilon} = \ddot{\varphi} \vec{e}_z.$$

Вращение тела с постоянной угловой скоростью ω называется **равномерным** и происходит по закону

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \quad (2.16)$$

Вращение тела с постоянным угловым ускорением ε называется **равнопеременным** и описывается соотношениями

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (2.17)$$

Любая точка M тела будет, очевидно, двигаться по окружности с центром на оси вращения и радиусом R , равным расстоянию от точки M до оси, то есть имеют место формулы (2.14), где $R = r \sin \alpha$. Очевидно, что

$$|V_M| = |\omega| r \sin \alpha = |\vec{\omega} \times \vec{r}|.$$

Из определения векторного произведения следует, что и направления векторов $\vec{V}_M$ и $\vec{\omega} \times \vec{r}$ совпадают, т. е. имеет место **формула Эйлера**.

$$\vec{V}_M = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (2.18)$$

Последняя формула дает также выражение производной $\frac{d\vec{r}}{dt}$ вектора постоянной длины $\vec{r}$ через сам вектор и угловую скорость его вращения.

Дифференцируя равенство (2.18), получим ускорение точки M в векторном виде:

$$\vec{W}_M = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V}_M, \quad \vec{W}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \quad \vec{W}_n = \vec{\omega} \times \vec{V}_M. \quad (2.19)$$

Пример 2.4. Гребной винт судна, имевший угловую скорость $\omega_0 = 20\pi$ рад/сек, останавливается через 20 сек вследствие сопротивления воды и трения в подшипниках. Считая вращение винта равнопеременным, определить угловое ускорение и число оборотов винта до остановки.

Решение. Так как вращение винта равнопеременное, используем формулы (2.17), принимая $\varphi_0 = 0$. Тогда в соответствии с условиями задачи получим

$$\text{систему } \begin{cases} 0 = \omega_0 + \varepsilon T, \\ \varphi = \omega_0 T + \frac{\varepsilon T^2}{2}, \end{cases} \quad \text{где } T \text{ — время вращения винта до остановки. Решая}$$

систему, находим $\varepsilon = -\frac{\omega_0}{T} = -\pi \text{ с}^{-2}$, $\varphi = \frac{\omega_0 T}{2} = 200\pi$ рад. Так как в процессе вращения ω и ε имеют разные знаки, то вращение является равнозамедленным.

До остановки винт сделает $N = \frac{\varphi}{2\pi} = 100$ оборотов.

Пример 2.5. Диск вращается вокруг неподвижной оси так, что в течение некоторого промежутка времени ускорения всех его точек составляют с их скоростями одинаковые углы, равные α . Определить угловую скорость диска как функцию времени, если в начальный момент времени она равнялась ω_0 .

Решение. Согласно формулам (2.14) $W_\tau = \varepsilon R$, $W_n = R\omega^2$,

$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{W_\tau}{W_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \text{const}$. Разделяя переменные в дифференциальном уравнении

и интегрируя в указанных пределах $\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\omega^2} = \operatorname{ctg} \alpha \int_0^t dt$, найдем $\omega = \frac{\omega_0}{1 - \omega_0 t \operatorname{ctg} \alpha}$.

Для выполнения условия задачи ω должна сохранять знак, поэтому $t < \frac{1}{\omega_0 \operatorname{ctg} \alpha}$.

1.2.3. Плоскопараллельное движения твердого тела.

Плоскопараллельным или **плоским** движением абсолютно твердого тела называется такое движение, при котором каждая точка тела движется в плоскости, параллельной некоторой неподвижной (основной) плоскости.

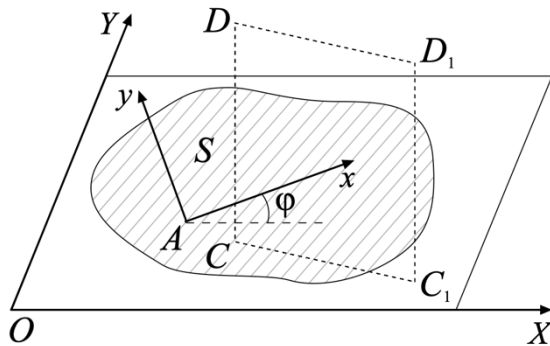


Рисунок 2.9

В качестве основной возьмем плоскость OXY неподвижной системы $OXYZ$. Подвижную систему $Axyz$, связанную с телом, выберем так, чтобы в некоторый момент времени плоскость Axy совпала с плоскостью OXY . Тогда, очевидно, эти плоскости будут совпадать во все время движения тела. Любой отрезок CD , перпендикулярный основной плоскости (рисунок 2.9), будет двигаться поступательно. Действительно, если C_1D_1 – положение этого отрезка в любой последующий момент времени, то CDD_1C_1 – прямоугольник ($CD = C_1D_1$, $CC_1 \parallel DD_1$), значит $C_1D_1 \parallel CD$. Отсюда следует, что движение всего тела определяется движением любого его сечения плоскостью, параллельной основной, или движением подвижной плоскости Axy относительно неподвижной OXY . Положение плоскости Axy однозначно определяется координатами X_A, Y_A точки A (полюса) и углом φ между осями OX и Ax (рисунок 2.10). Следовательно, плоскопараллельное движение абсолютно твердого тела будет известно, если заданы уравнения:

$$X_A = X_A(t), Y_A = Y_A(t), \varphi = \varphi(t).$$

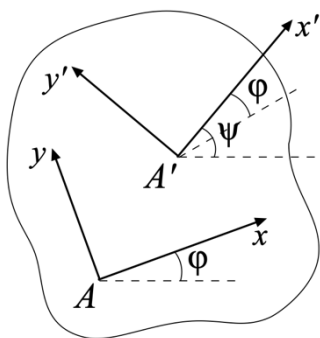


Рисунок 2.10

Кинематическими характеристиками плоскопараллельного движения тела являются скорость $\vec{V}_A$ и ускорение $\vec{W}_A$ полюса, **мгновенная угловая скорость** $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z = \dot{\phi} \vec{e}_z$ и **мгновенное угловое ускорение** $\vec{\varepsilon} = \varepsilon \vec{e}_z = \ddot{\phi} \vec{e}_z$ при вращении вокруг полюса. Первые две характеристики, очевидно, меняются с изменением полюса, а угловая скорость и угловое ускорение от выбора полюса не зависят. Действительно, если за полюс взять другую точку A' и связать с ней систему $A'x'y'$ (рисунок 2.10), то углы ϕ и ψ будут во все время движения отличаться на один и тот же постоянный угол α между осями Ax и $A'x'$, то есть $\dot{\phi} = \dot{\psi}$, $\ddot{\phi} = \ddot{\psi}$.

1.2.3.1. Скорости точек тела.

Возьмем произвольную точку M подвижной плоскости. В любой момент времени верно равенство (рисунок 2.11):

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}_A + \vec{r}. \quad (2.20)$$

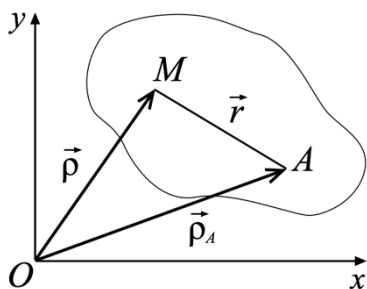


Рисунок 2.11

Вектор $\vec{r} = \overrightarrow{AM}$ соединяет две точки твердого тела и при движении плоской фигуры изменяет лишь свое направление, поэтому по (2.18) $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

Дифференцируя равенство (2.20) по времени и учитывая, что $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{V}_M$, $\frac{d\vec{\rho}_A}{dt} = \vec{V}_A$, будем иметь

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA}. \quad (2.21)$$

Вектор $\vec{V}_{MA} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ перпендикулярен AM и равен по величине и направлению скорости, которую имела бы точка M при вращении вокруг полюса A .

Таким образом, **скорость любой точки M подвижной плоскости есть векторная сумма скорости произвольно выбранного в плоскости полюса A и скорости точки M при вращении плоскости вокруг полюса.**

Полученный результат позволяет найти скорость любой точки подвижной плоскости, если известны скорость какой-нибудь одной ее точки и угловая скорость плоскости.

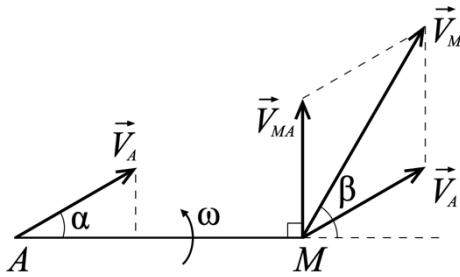


Рисунок 2.12

Проектируя (2.21) на направление отрезка AM , получим (рисунок 2.12):

$$V_A \cos \alpha = V_M \cos \beta.$$

(2.22)

Это равенство выражает **теорему Грасгофа**: *проекции скоростей концов неизменяемого отрезка, совершающего плоское движение, на направление этого отрезка равны между собой.*

Можно доказать, что теорема верна и для произвольного движения неизменяемого отрезка. Действительно, так как $|\overline{AM}|^2 = \overline{AM} \cdot \overline{AM} = \text{const}$, то дифференцируя это равенство получим $\overline{AM} \cdot \dot{\overline{AM}} = \overline{AM} \cdot (\dot{\rho}_M - \dot{\rho}_A) = 0$, откуда следует, что $\vec{V}_M \cdot \vec{e} = \vec{V}_A \cdot \vec{e}$, где $\vec{e} = \frac{\overline{AM}}{|\overline{AM}|}$ – единичный вектор $\overline{AM}$, что и доказывает теорему.

1.2.3.2. Мгновенный центр скоростей. Центроиды.

Пусть известны скорость некоторой точки A подвижной плоскости и угловая скорость $\vec{\omega}$. Покажем, что в каждый момент времени на подвижной плоскости существует точка P , скорость которой равна нулю. Эта точка называется **мгновенным центром скоростей** (МЦС), а соответствующая ей точка C неподвижной плоскости называется **мгновенным центром вращения** (МЦВ).

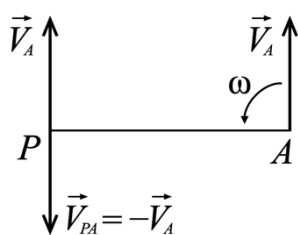


Рисунок 2.13

Действительно, $\vec{V}_P = \vec{V}_A + \vec{V}_{PA} = 0$, значит $\vec{V}_{PA} = \vec{\omega} \times \overline{PA} = -\vec{V}_A$, откуда следует, что точку P получим, повернув в плоскости вектор $\vec{V}_A$ на 90° вокруг точки A в направлении ω , и отложив на этом луче отрезок $AP = \frac{V_A}{\omega}$ (рисунок 2.13). Легко доказать, что эта точка единственная.

Если теперь за полюс взять мгновенный центр скоростей, то скорость любой точки подвижной плоскости в каждый момент времени будет направлена перпендикулярно радиусу, соединяющему эту точку с мгновенным центром скоростей, и равна по величине произведению этого радиуса на мгновенную угловую скорость. То есть распределение скоростей точек подвижной плоскости в каждый момент времени таково, как если бы плоскость вращалась вокруг МЦС,

но для разных моментов времени точки P и C будут разными точками своих плоскостей.

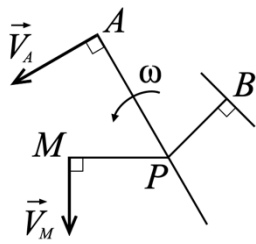


Рисунок 2.14

Если же известна скорость какой-то одной точки A и направление скорости любой другой точки B , то мгновенный центр скоростей P находится как пересечение перпендикуляров к направлениям скоростей в точках A и B (рисунок 2.14), после чего можно найти угловую скорость

$$\omega = \frac{V_A}{PA} \quad (2.23)$$

и скорость любой точки $V_M = \omega PM = V_A \frac{PM}{PA}$, откуда следует, что скорости точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям до мгновенного центра скоростей: $\frac{V_A}{PA} = \frac{V_B}{PB} = \frac{V_M}{PM} = \dots = \omega$.

Если перпендикуляры к скоростям совпадают, то нужно знать не только направление, но и величину скорости второй точки B . В этом случае МЦС будет точкой пересечения общего перпендикуляра с прямой, соединяющей концы векторов $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ (рисунок 2.15).

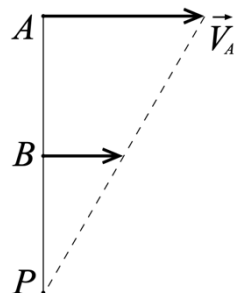


Рисунок 2.15

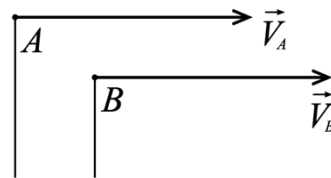


Рисунок 2.16

Если же перпендикуляры к направлениям скоростей параллельны (пересекаются в бесконечности), то $\omega = 0$ и скорости всех точек подвижной плоскости в данный момент времени одинаковы, т.е. плоскость совершает мгновенное поступательное движение (рисунок 2.16).

При движении мгновенные центры скоростей (мгновенные центры вращения) описывают в плоскости Axy (плоскости OXY) некоторую кривую, которая называется **подвижной (неподвижной) центроидой**.

Показано (Луи Пуансо, 1831 г.), что *всякое непоступательное движение плоской фигуры в неподвижной плоскости можно представить качением без скольжения подвижной центроиды по неподвижной*.

1.2.3.3. Ускорения точек тела.

Дифференцируя (2.21), найдем

$$\vec{W}_M = \vec{W}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V}. \quad (2.24)$$

Вектор $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ равен касательному ускорению $\vec{W}_{MA}^{\tau}$, которое имела бы точка M при вращении вокруг полюса. Используя известную формулу для двойного векторного произведения $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ и учитывая, что $\vec{\omega} \perp \vec{r}$, получим, что вектор $\vec{\omega} \times \vec{V} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r}\omega^2 = -\vec{r}\omega^2$ направлен от точки M к полюсу и равен нормальному ускорению $\vec{W}_{MA}^n$ при вращении точки вокруг полюса (рисунок 2.17). Равенство (2.24) можно переписать так:

$$\vec{W}_M = \vec{W}_A + \vec{W}_{MA}^{\tau} + \vec{W}_{MA}^n, \quad W_{MA}^{\tau} = \varepsilon r, \quad W_{MA}^n = \omega^2 r, \quad (2.25)$$

$$W_{MA} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (2.26)$$

Таким образом, ускорение точки M подвижной плоскости складывается векторно из ускорения произвольно выбранного в плоскости полюса A и ускорения точки M при вращении плоскости вокруг полюса.

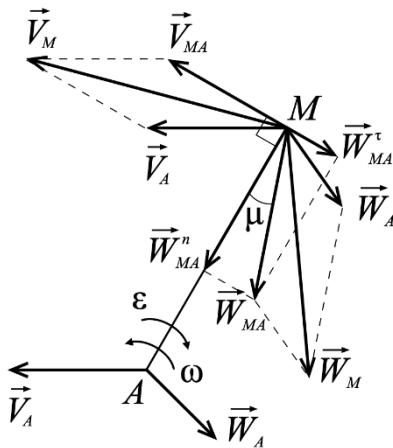


Рисунок 2.17

Компоненты скорости и ускорения точки M для случая, когда ω и ε имеют разные знаки, изображены на рисунок 2.17.

Подобно тому, как была найдена точка P , скорость которой в данный момент времени равна нулю, найдем точку Q плоскости с равным нулю ускорением. Такая точка называется **мгновенным центром ускорений** (МЦУ).

Будем считать, что известно ускорение некоторой точки A подвижной плоскости, угловая скорость ω и угловое ускорение ε . Повернем вектор $\vec{W}_A$ в плоскости Ax на угол μ (рисунок 2.18) в сторону, куда показывает ε , и

отложим на этом луче отрезок $AQ = \frac{W_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$. Точка Q и

будет искомой. Действительно, $\vec{W}_Q = \vec{W}_A + \vec{W}_{QA}$, но

$W_{QA} = AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = W_A$, а их направления противоположны, значит $\vec{W}_Q = 0$. Легко доказать, что эта точка единственная.

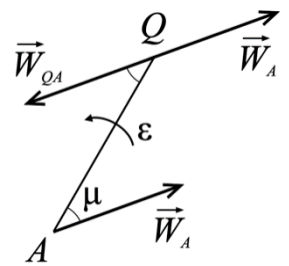


Рисунок 2.18

Если мгновенный центр ускорений принять за полюс,

то ускорение любой точки M подвижной плоскости в данный момент времени найдется по формуле

$$\vec{W}_M = \vec{W}_{MQ} = \vec{W}_{MQ}^{\tau} + \vec{W}_{MQ}^n, \quad W_M = MQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}, \quad (2.27)$$

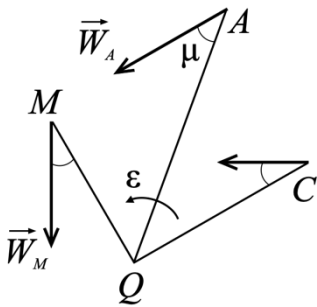


Рисунок 2.19

так что векторы ускорений образуют одинаковые углы μ с направлением на МЦУ, а их величины пропорциональны расстояниям до МЦУ (рисунок 2.19). Это значит, что распределение ускорений точек подвижной плоскости в каждый момент времени таково, как если бы плоскость совершала вращение вокруг МЦУ. Однако положение этого центра, как и положение МЦС, непрерывно меняется как в подвижной, так и в неподвижной плоскости, причем МЦС и МЦУ, вообще говоря, не совпадают.

Очевидно, что если кроме $\vec{W}_A$, ω и ε известно еще и направление ускорения какой-то другой точки, то положение МЦУ найдется на пересечении лучей, образующих угол μ с направлениями ускорений в этих двух точках.

Пример 2.6. Механизм Уатта состоит из коромысла O_1A , которое качаясь на оси O_1 , передает при помощи шатуна AB движение кривошипу OB , свободно насаженному на ось O . На той же оси сидит колесо 1, шатун оканчивается колесом 2, наглухо связанным с шатуном (рисунок 2.20). Определить угловые скорости кривошипа OB и колеса 1 в момент, когда $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 90^\circ$, если $r_1 = r_2 = 30\sqrt{3}$ см, $O_1A = 75$ см, $AB = 150$ см и угловая скорость коромысла $\omega_0 = 6 \text{ с}^{-1}$.

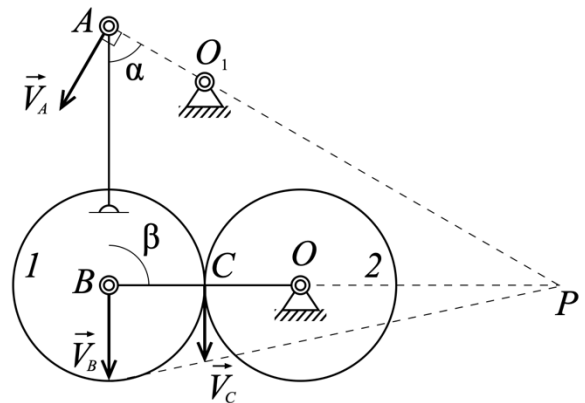


Рисунок 2.20

колеса 1 в момент, когда $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 90^\circ$, если $r_1 = r_2 = 30\sqrt{3}$ см, $O_1A = 75$ см, $AB = 150$ см и угловая скорость коромысла $\omega_0 = 6 \text{ с}^{-1}$.

Решение. Звенья механизма совершают следующие движения: коромысло O_1A вращается с заданной угловой скоростью ω_0 , шатун AB и наглухо связанный с ним диск 2 совершает плоское движение, кривошип OB и колесо 1 вращаются вокруг оси O .

По данным задачи можем найти величину и направление скорости точки A : $V_A = \omega_0 O_1A = 4,5$. Точки A и B принадлежат одному твердому телу, но так как точка B принадлежит и кривошипу OB , то ее скорость перпендикулярна

OB и по теореме Грасгофа находим $V_B = V_A \cos 30^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{4}$, значит $\omega_{OB} = \frac{V_B}{OB} = 3,75$.

Скорость точки C касания колес 1 и 2 найдем с помощью МЦС для тела 2 – точки P , которая лежит на пересечении перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$. $\omega_{AB+2} = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_A}{AB} \cos 60^\circ = 1,5$ и $V_C = \omega_{AB+2} \cdot CP = 1,5(AB \operatorname{tg} 60^\circ - r_2) = 1,8\sqrt{3}$, $\omega_1 = \frac{V_C}{r_1} = \frac{1,8\sqrt{3}}{0,3\sqrt{3}} = 6$.

Пример 2.7. Колесо радиусом R катится без скольжения по прямолинейному участку пути; скорость центра его постоянна и равна V_O . Найти угловую скорость и угловое ускорение колеса, а также скорости и ускорения концов его вертикального и горизонтального диаметров.

Решение. Так как колесо катится без скольжения, то скорость точки его касания с землей $V_P = 0$, значит, точка P является мгновенным центром скоростей (рисунок 2.21). По формуле (2.23)

$\omega = \frac{V_O}{OP} = \frac{V_O}{R} = \text{const}$ и это выражение ω имеет место для любого момента

времени, следовательно, $\varepsilon = 0$ и так как $CP = AP$, то $V_C = V_A = \omega \cdot AP = V_O \sqrt{2}$. Скорости этих точек можно было найти и по теореме Грасгофа: $V_A \cos 45^\circ = V_O$, откуда получаем то же значение. $V_B = \omega BP = 2V_O$.

Так как $V_O = \text{const}$, то $W_O = 0$ и центр колеса O является мгновенным центром ускорений. По формулам (2.27) $\operatorname{tg} \mu = 0$, значит, ускорения всех указанных точек будут направлены к точке O – МЦУ и равны по величине

$R\omega^2 = \frac{V_O^2}{R}$, так как расстояния всех точек до МЦУ одинаковы и равны R .

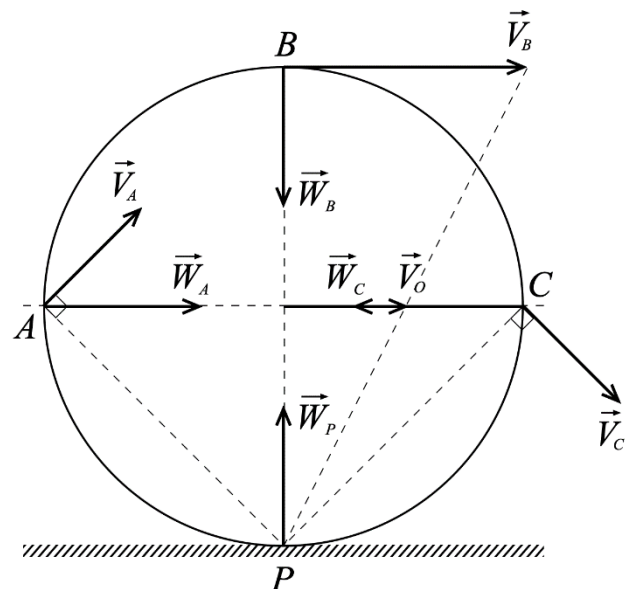


Рисунок 2.21

Пример 2.8. Решить предыдущую задачу, считая, что в данный момент времени скорость центра колеса V_O , его ускорение W_O и направлено противоположно скорости. Найти также положение МЦУ для данного момента времени, считая $R=1\text{ м}$, $V_O=1\text{ м/с}$, $W_O=1\text{ м/с}^2$.

Решение. В данном случае тоже $\omega = \frac{V_O}{R}$, и поскольку это выражение имеет место для любого момента времени, то дифференцируя его, получим: $\varepsilon = \frac{1}{R} \frac{dV_O}{dt} = -\frac{W_O}{R}$. Знак «-» показывает, что ε направлено противоположно ω (рисунок 2.22). Алгоритм вычисления скоростей остается прежним, так что $V_C = V_A = V_O \sqrt{2}$, $V_B = 2V_O$.

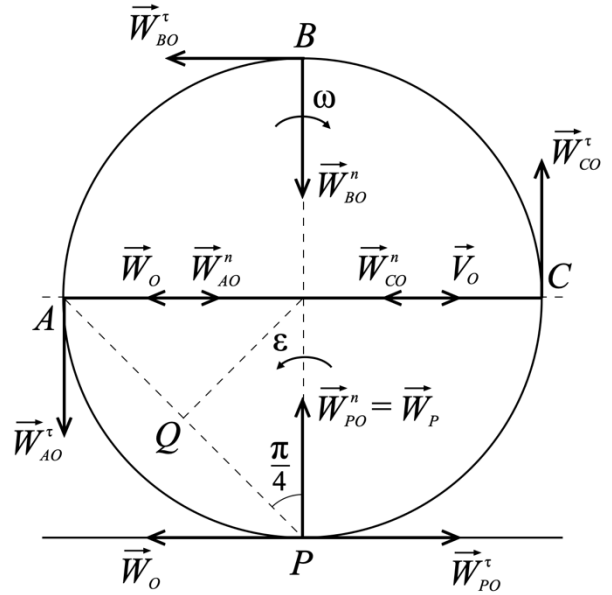


Рисунок 2.22

Поскольку положение МЦУ нам теперь неизвестно, будем пользоваться формулами (2.25), выбрав за полюс точку O : $\vec{W}_P = \vec{W}_O + \vec{W}_{PO}^n + \vec{W}_{PO}^\tau$.

Направление $\vec{W}_{PO}^n$ и $\vec{W}_{PO}^\tau$ показаны на рисунке, а их величины: $W_{PO}^n = \omega^2 R = \frac{V_O^2}{R}$, $W_{PO}^\tau = \varepsilon R = W_O$ и так как $\vec{W}_{PO}^\tau = -\vec{W}_O$, то полное ускорение точки P направлено к центру O и равно по величине $W_P = W_{PO}^n = \frac{V_O^2}{R}$.

Так как точки A, B, C находятся на равных расстояниях до полюса O , то $W_{AO}^n = W_{BO}^n = W_{CO}^n = \frac{V_O^2}{R}$, $W_{AO}^\tau = W_{BO}^\tau = W_{CO}^\tau = W_O$, а направления всех этих составляющих указаны на рисунке, так что

$$W_A = \sqrt{(W_{AO}^n - W_O)^2 + (W_{AO}^\tau)^2} = \sqrt{\left(\frac{V_O^2}{R} - W_O\right)^2 + W_O^2},$$

$$W_B = \sqrt{(W_O + W_{BO}^\tau)^2 + (W_{BO}^n)^2} = \sqrt{4W_O^2 + \frac{V_O^4}{R^2}},$$

$$W_C = \sqrt{(W_O + W_{CO}^n)^2 + (W_{CO}^\tau)^2} = \sqrt{\left(W_O + \frac{V_O^2}{R}\right)^2 + W_O^2}.$$

Чтобы определить положение МЦУ при указанных в задаче данных находим $\omega = 1$, $\varepsilon = 1$, $\operatorname{tg} \mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = 1$, откуда следует, что $\mu = 45^\circ$. Теперь повернем вектор $\vec{W}_P$ на угол 45° против часовой стрелки, как показывает ε , и на прямой PA отложим отрезок $PQ = \frac{W_P}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Так как $AP = \sqrt{2}$, то МЦУ находится в середине отрезка AP . В этом случае точки A и P , B и C будут находиться на равных расстояниях от МЦУ. Легко убедиться, что при указанных данных $W_A = W_P = 1$, $W_B = W_C = \sqrt{5}$.

1.2.4. Вращение твердого тела около неподвижной точки.

Вращением абсолютно твердого тела около неподвижной точки или сферическим движением называется такое движение, при котором одна точка тела неподвижна во все время движения.

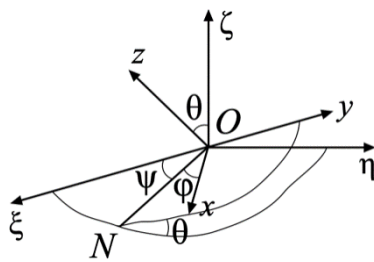


Рисунок 2.23

Положение твердого тела с неподвижной точкой O или связанной с ним системы $Oxyz$ по отношению к неподвижной системе $O\xi\eta\zeta$ в любой момент времени может быть задано тремя независимыми параметрами – *углами Эйлера*: φ – угол собственного вращения, ψ – угол прецессии, θ – угол нутации (рисунок 2.23). Прямая ON , по которой пересекаются плоскости Oxy и $O\xi\eta$ называется *линией узлов*.

Теорема (Даламбера—Эйлера). Для каждого момента времени существует такой вектор $\vec{\omega}$, что в этот момент скорости точек тела с неподвижной точкой O совпадают с таковыми при вращении тела с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг неподвижной оси, проходящей через точку O .

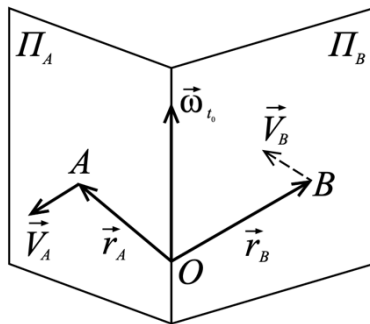


Рисунок 2.24

◀ Пусть тело совершает вращение вокруг неподвижной точки O и A , B – такие две точки, что в рассматриваемый момент времени их скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ не равны нулю и не параллельны между собой. Проведем через точки O , A плоскость Π_A а через точки O , B – плоскость Π_B , перпендикулярно направлениям скоростей в точках A и B (рисунок 2.24). Это можно сделать, так как точка O неподвижна, и, следовательно,

по теореме Грасгофа скорости точек A и B перпендикулярны соответственно векторам $\vec{r}_A, \vec{r}_B$. Из теоремы Грасгофа также следует, что любая точка плоскости Π_A или Π_B имеет скорость, перпендикулярную плоскости. Поэтому точки, лежащие на линии пересечения этих плоскостей, имеют нулевые скорости, т. е. линия пересечения есть ось вращения тела. Тогда вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ лежит на оси вращения и его величина $\omega = \frac{V_A}{h_A}$, где h_A – расстояние от точки A до оси вращения. Направление вектора $\vec{\omega}$ выбирается так, чтобы выполнялась формула Эйлера: $\vec{V}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_A$. ►

Скользящий вектор $\vec{\omega}$ и определяемую им ось называют соответственно **мгновенной угловой скоростью** и **мгновенной осью вращения** тела с неподвижной точкой.

Из доказанной теоремы следует, что в любой момент времени t скорость произвольной точки тела можно найти по формуле Эйлера:

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (2.28)$$

где $\vec{\omega}$ – мгновенная угловая скорость тела в этот момент времени.

Отличие равенства (2.28) от формулы (2.18) для вращательного движения тела вокруг неподвижной оси в том, что вектор $\vec{\omega}$, вообще говоря, меняет свое направление в пространстве, связанном как с неподвижной, так и с подвижной системой координат. При этом мгновенная ось вращения тела, определяемая вектором $\vec{\omega}$, описывает в неподвижном (подвижном) пространстве некоторую коническую поверхность с вершиной в точке O , называемую **неподвижным (подвижным) аксоидом**. В каждый момент времени мгновенная ось вращения является общей образующей подвижного и неподвижного аксоидов. Этот факт можно интерпретировать как **качение без скольжения подвижного аксоида по неподвижному**. Тогда справедливо следующее утверждение.

Вращение абсолютно твердого тела вокруг неподвижной точки можно получить качением без скольжения подвижного аксоида по неподвижному.

Если рассматривать плоскопараллельное движение как частный случай сферического движения с бесконечно удаленной неподвижной точкой, то аксоиды превращаются в цилиндры, а их пересечение с подвижной и неподвижной плоскостями образуют подвижную и неподвижную центроиды.

Скользящий вектор $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ называется **мгновенным угловым ускорением** тела.

Векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ принято откладывать от неподвижной точки O . Поскольку вектор $\vec{\omega}(t)$ изменяется со временем по величине и направлению, то представляя

$\vec{\omega} = \omega \vec{\omega}_0$, $|\vec{\omega}_0| = 1$, получим $\vec{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt} \vec{\omega}_0 + \omega \frac{d\vec{\omega}_0}{dt}$. По формуле (2.18) $\frac{d\vec{\omega}_0}{dt} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_0$, где $\vec{\omega}_1$ – угловая скорость вращения вектора $\vec{\omega}$ и

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt} \vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega} = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2. \quad (2.29)$$

Первое слагаемое (2.29) характеризует изменение угловой скорости по величине, второе – по направлению, так что векторы $\vec{\varepsilon}(t)$ и $\vec{\omega}(t)$, вообще говоря, не лежат на одной прямой.

Ускорение точки тела при его движении около неподвижной точки O получим, дифференцируя по времени равенство (2.28):

$$\vec{W} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (2.30)$$

Используя известную формулу для двойного векторного произведения можно записать

$$\vec{W} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r}\omega^2. \quad (2.31)$$

Учитывая, что $\vec{\omega} = \omega \vec{\omega}_0$, два последних слагаемых (2.31) можно представить в виде $\vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r}\omega^2 = \omega^2(\vec{\omega}_0(\vec{\omega}_0 \cdot \vec{r}) - \vec{r}) = \omega^2 \vec{h}$ (рисунок 2.27), так что

$$\vec{W} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \omega^2 \vec{h}. \quad (2.32)$$

Вектор $\omega^2 \vec{h}$, направленный к мгновенной оси вращения, называют **осецентростремительным ускорением**, вектор $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ – **вращательным ускорением**. Формулы (2.30), (2.32) **выражают теорему Ривальса**: ускорение точки тела при его движении около неподвижной точки O складывается геометрически из вращательного и центростремительного ускорений.

Пример 2.9. Найти величину угловой скорости ω тела, закрепленного в точке O и уравнение мгновенной оси вращения в системе координат, связанной с этой точкой, если известно, что скорость точки $M_1(0;0;2)$ равна $\vec{V}_1(1;2;0)$, а направление скорости точки $M_2(0;1;2)$ определяется единичным вектором $\vec{e}\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

Решение. Согласно формуле (2.28) $\vec{V}_1 = \vec{\omega} \times \vec{r}_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2\omega_y \\ -2\omega_x \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда находим $\omega_x = -1$, $\omega_y = \frac{1}{2}$.

$$\vec{V}_2 = V_2 \vec{e} = \vec{\omega} \times \vec{r}_2, \text{ или } V_2 \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1/2 & \omega_z \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \omega_z \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ откуда найдем}$$

$V_2 = 3, \omega_z = 3$, значит $\vec{\omega} = (-1; 1/2; 3)$ и $|\vec{\omega}| = \sqrt{10,25} \cong 3,2$.

Уравнение мгновенной оси вращения получим из условия, что все точки этой оси имеют нулевую скорость, так что $\vec{\omega} \times \vec{r} = 0$ и

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1/2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} z/2 - 3y \\ 3x + z \\ -y - x/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Искомое уравнение мгновенной оси можно представить как пересечение двух плоскостей: $x + 2y = 0, 3x + z = 0$.

Пример 2.10. Коническое зубчатое колесо 1 с углом раствора 2α , свободно насаженное на кривошип OA , обкатывается по неподвижному зубчатому основанию 2 радиусом R (рисунок 2.25). Модули угловой скорости и углового ускорения (их направления показаны на рисунке) кривошипа OA , вращающегося вокруг неподвижной оси O_1O ,

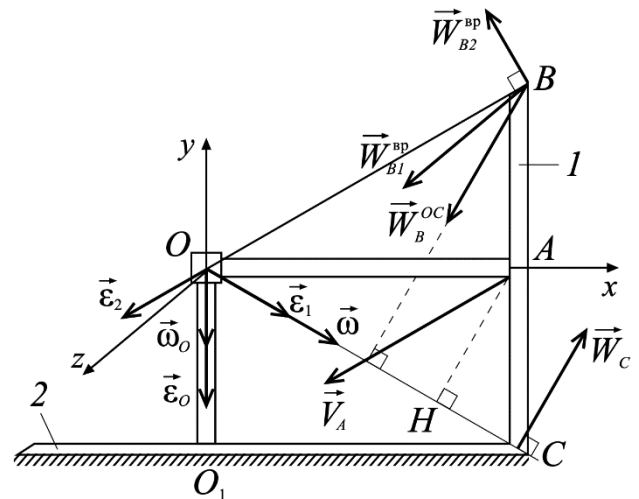


Рисунок 2.25

соответственно равны ω_0 и ϵ_0 . Определить: 1) угловую скорость ω и угловое ускорение ϵ катящегося колеса 1; 2) ускорения точек B и C .

Решение. Так как точка C касания колеса 1 с основанием имеет нулевую скорость, то прямая OC будет мгновенной осью вращения. Скорость точки A , как принадлежащей кривошипу OA равна $V_A = \omega_0 OA = \omega_0 R$. С другой стороны, точка A принадлежит колесу и ее скорость $V_A = \omega AH = \omega R \sin \alpha$. Из полученных выражений для V_A находим $\omega = \frac{\omega_0}{\sin \alpha}$. Направление $\vec{\omega}$ указано на рисунке.

Согласно формуле (2.29) угловое ускорение $\vec{\epsilon}$ колеса 1 складывается из $\vec{\epsilon}_1$, которое характеризует изменение угловой скорости по величине:

$\vec{\varepsilon}_1 = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{\sin \alpha} \frac{d\omega_0}{dt} = \frac{\varepsilon_0}{\sin \alpha}$ и $\vec{\varepsilon}_2 = \vec{\omega}_0 \times \vec{\omega}$, характеризующего изменение $\vec{\omega}$ по направлению. По величине $\varepsilon_2 = \omega_0 \omega \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \omega_0^2 \operatorname{ctg} \alpha$.

Направления векторов $\vec{\varepsilon}_1$ и $\vec{\varepsilon}_2$ указаны на рисунке.

Ускорение точки C тела находится по формуле $\vec{W}_C = \vec{W}_C^{oc} + \vec{W}_C^{ep}$, но $W_C^{oc} = \omega^2 h = 0$, так как точка C лежит на мгновенной оси, а $\vec{W}_C^{ep} = \vec{\varepsilon} \times \vec{OC} = \vec{\varepsilon}_1 \times \vec{OC} + \vec{\varepsilon}_2 \times \vec{OC}$. Но $\vec{\varepsilon}_1 \times \vec{OC} = 0$, так как $\vec{\varepsilon}_1$ параллельна $\vec{OC}$, значит $W_C = \varepsilon_2 OC = \omega_0^2 \operatorname{ctg} \alpha \frac{R}{\cos \alpha} = \frac{\omega_0^2 R}{\sin \alpha}$.

Ускорение точки B : $\vec{W}_B = \vec{W}_B^{oc} + \vec{W}_{B1}^{ep} + \vec{W}_{B2}^{ep}$, $\vec{W}_B^{oc} \perp OC$ и по величине $W_B^{oc} = \omega^2 \cdot 2AH = \frac{2R\omega_0^2}{\sin \alpha}$, $\vec{W}_{B1}^{ep} = \vec{\varepsilon}_1 \times \vec{OB}$, $\vec{W}_{B2}^{ep} = \vec{\varepsilon}_2 \times \vec{OB}$, а их величины: $W_{B1}^{ep} = \varepsilon_1 OB \sin 2\alpha = \frac{\varepsilon_0}{\sin \alpha} \cdot \frac{R}{\cos \alpha} \sin 2\alpha = 2\varepsilon_0 R$, $W_{B2}^{ep} = \varepsilon_2 OB = \omega_0^2 \operatorname{ctg} \alpha \frac{R}{\cos \alpha} = \frac{\omega_0^2 R}{\sin \alpha}$.

Направления всех составляющих ускорения точки B показаны на рисунке. Проекция $\vec{W}_B$ на оси координат:

$$W_{Bx} = -W_B^{oc} \cos 2\alpha - W_{B2}^{ep} \sin \alpha = \frac{2\omega_0^2 R}{\sin \alpha} \cos 2\alpha - \omega_0^2 R,$$

$$W_{By} = -W_B^{oc} \sin 2\alpha + W_{B2}^{ep} \cos \alpha = \frac{2\omega_0^2 R}{\sin \alpha} \sin 2\alpha + \omega_0^2 R \operatorname{ctg} \alpha, \quad W_{Bz} = W_{B1}^{ep} = 2\varepsilon_0 R,$$

$$\text{так что } W_B = \sqrt{W_{Bx}^2 + W_{By}^2 + W_{Bz}^2}.$$

1.2.5. Движение свободного твердого тела.

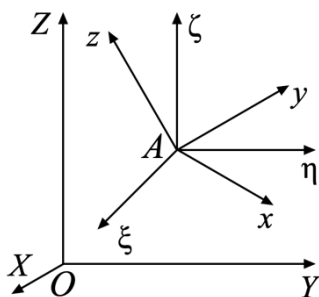


Рисунок 2.26

Для определения положения свободного твердого тела в пространстве введем неизменно связанную с ним систему координат $Axyz$ и систему $A\xi\eta\zeta$, оси которой при движении тела не изменяют свое направление относительно неподвижной системы $OXYZ$ (рисунок 2.26). Ясно, что система $A\xi\eta\zeta$ совершает поступательное движение относительно системы $OXYZ$, а система $Axyz$ — сферическое движение относительно системы $A\xi\eta\zeta$.

Тогда положение тела (подвижной системы $Axyz$) относительно системы $OXYZ$

определяется следующими независимыми параметрами: тремя координатами X_A, Y_A, Z_A точки A тела, называемой полюсом, и тремя углами Эйлера φ, ψ, θ , задающими положение системы $Axyz$ относительно системы $A\xi\eta\zeta$.

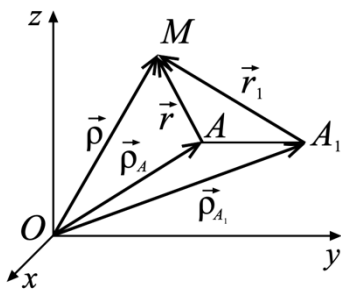


Рисунок 2.27

Найдем скорость $\vec{V}$ произвольной точки M тела, определяемой вектором $\vec{\rho}$ в системе $OXYZ$ и вектором $\vec{r}$ в системе $Axyz$ (рисунок 2.27). Дифференцируя по времени равенство $\vec{\rho} = \vec{\rho}_A + \vec{r}$, получаем $\vec{V} = \vec{V}_A + \frac{d\vec{r}}{dt}$.

Вектор $\vec{r}$ соединяет две точки абсолютно твердого тела и при движении тела изменяет лишь свое направление.

Поэтому $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega}_A \times \vec{r}$, где $\vec{\omega}_A$ – мгновенная угловая

скорость тела при его вращении вокруг точки A как неподвижной. Значит,

$$\vec{V} = \vec{V}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{r}. \quad (2.33)$$

Если в качестве полюса выбрать другую точку, например A_1 (рисунок 2.27), то $\vec{\rho} = \vec{\rho}_{A_1} + \vec{r}_1$ и

$$\vec{V} = \vec{V}_{A_1} + \vec{\omega}_{A_1} \times \vec{r}_1, \quad (2.34)$$

где $\vec{\omega}_{A_1}$ – мгновенная угловая скорость тела в сферическом движении вокруг точки A_1 .

Покажем, что *мгновенная угловая скорость тела в сферическом движении вокруг полюса не зависит от выбора этого полюса, т.е.*

$$\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_{A_1} = \vec{\omega}.$$

Действительно, если в качестве точки M взять точку A_1 , то из равенства (2.33) получим

$$\vec{V}_{A_1} = \vec{V}_A + \vec{\omega}_A \times \overrightarrow{AA_1}. \quad (2.35)$$

Поскольку $\vec{r} = \vec{r}_1 + \overrightarrow{AA_1}$, то из формул (2.33) – (2.35) имеем

$$\vec{V}_A + \vec{\omega}_A \times (\vec{r}_1 + \overrightarrow{AA_1}) = \vec{V}_A + \vec{\omega}_A \times \overrightarrow{AA_1} + \vec{\omega}_{A_1} \times \vec{r}_1.$$

Отсюда следует, что

$$(\vec{\omega}_A - \vec{\omega}_{A_1}) \times \vec{r}_1 = 0. \quad (2.36)$$

Так как равенство (2.36) выполняется для любого вектора $\vec{r}_1$, то

$$\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_{A_1} = \vec{\omega}.$$

Таким образом, *скорость любой точки M свободного твердого тела находится по формуле*

$$\vec{V} = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (2.37)$$

т.е. равна скорости полюса, сложенной со скоростью точки от вращения тела вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс.

Ускорение точки M найдем, дифференцируя равенство (2.37):

$$\vec{W} = \vec{W}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (2.38)$$

Из всего сказанного о движении свободного твердого тела следует теорема Шаля.

Теорема (Шаля). Движение свободного твердого тела состоит из поступательного движения, определяемого произвольно выбранным в теле полюсом, и вращательного движения вокруг этого полюса как вокруг неподвижной точки, причем угловая скорость вращательного движения не зависит от выбора полюса.

1.2.6. Сложное движение точки.

Пусть известны движение материальной точки относительно системы S_1 ($Axyz$) и движение системы S_1 по отношению к неподвижной системе $S(OXYZ)$. Требуется найти движение точки, ее скорость и ускорение по отношению к системе S . В сформулированной задаче движение точки по отношению к системе S является сложным, так как оно задается посредством движения системы S_1 и движения точки относительно S_1 .

Движение, скорость и ускорение точки относительно неподвижной системы S называется **абсолютным** движением, скоростью и ускорением.

Движение, скорость и ускорение точки относительно подвижной системы S_1 называется **относительным** движением, скоростью и ускорением.

Движение системы S_1 относительно системы S называется **переносным**.

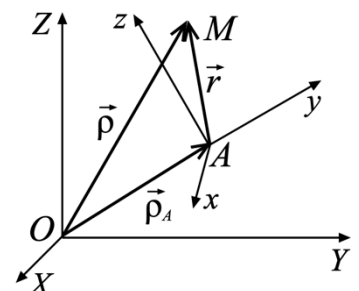
Переносными скоростью и ускорением материальной точки в некоторый момент времени называются абсолютные скорость и ускорение той геометрической точки подвижной системы S_1 , с которой в этот момент совпадает движущаяся материальная точка.

Положение материальной точки M относительно системы S задается вектором (рисунок 2.28):

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}_A + \vec{r}, \quad (2.39)$$

где вектор

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \quad (2.40)$$



задает положение точки M в системе S_1 .

Рисунок 2.28

Так как движение системы S_1 относительно системы S известно, то в этой системе известны координаты векторов $\vec{\rho}_A, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ как функции времени и абсолютное движение точки определяется вектором $\vec{\rho}(t)$ (2.39).

1.2.6.1. Абсолютная скорость материальной точки.

Дифференцируя по времени равенства (2.39) и (2.40), получаем

$$\dot{\vec{\rho}} = \dot{\vec{\rho}}_A + \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{\rho}}_A + \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z + x\dot{\vec{e}}_x + y\dot{\vec{e}}_y + z\dot{\vec{e}}_z. \quad (2.41)$$

Согласно определению

$$\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z = \vec{V}_{\text{отн}}, \quad \dot{\vec{\rho}} = \vec{V}_{\text{абс}}.$$

При движении системы S_1 меняется направление единичных векторов $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ ее осей. Поэтому по формуле Эйлера (2.18) $\dot{\vec{e}}_x = \vec{\omega} \times \vec{e}_x, \dot{\vec{e}}_y = \vec{\omega} \times \vec{e}_y, \dot{\vec{e}}_z = \vec{\omega} \times \vec{e}_z$ и $x\dot{\vec{e}}_x + y\dot{\vec{e}}_y + z\dot{\vec{e}}_z = \vec{\omega} \times \vec{r}$, тогда $\dot{\vec{r}} = \vec{V}_{\text{отн}} + \vec{\omega} \times \vec{r}$.

Это равенство связывает *абсолютную* или *полную производную* вектора $\vec{r}(t)$, определяющую скорость изменения этого вектора в неподвижной

системе S , и *относительную* или *локальную производную* $\frac{\tilde{d}\vec{r}}{dt} = \vec{V}_{\text{отн}}$, дающую скорость изменения вектора $\vec{r}(t)$ относительно подвижной системы S_1 :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (2.42)$$

Отсюда видно, что абсолютная производная вектора зависит лишь от мгновенной угловой скорости подвижной системы и не зависит от поступательной составляющей движения этой системы.

Теперь формула (2.41) примет вид

$$\vec{V}_{\text{абс}} = \vec{V}_{\text{отн}} + \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (2.43)$$

где $\vec{V}_A$ – абсолютная скорость точки A .

Из формулы (2.37) следует, что $\vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{V}_{\text{пер}}$ и окончательно получим:

$$\vec{V}_{\text{абс}} = \vec{V}_{\text{отн}} + \vec{V}_{\text{пер}}. \quad (2.44)$$

Таким образом, *абсолютная скорость материальной точки равна сумме ее относительной и переносной скоростей.*

1.2.6.2. Абсолютное ускорение материальной точки.

Дифференцируя равенство (2.43) и принимая во внимание определения имеем

$$\begin{aligned}\vec{W}_{\text{абс}} &= \dot{\vec{V}}_{\text{отн}} + \vec{W}_o + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = \\ &= \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z + \dot{x}\dot{\vec{e}}_x + \dot{y}\dot{\vec{e}}_y + \dot{z}\dot{\vec{e}}_z + \vec{W}_o + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{V}_{\text{отн}} + \vec{\omega} \times \vec{r}) = \\ &= \vec{W}_{\text{отн}} + \vec{\omega} \times \vec{V}_{\text{отн}} + \vec{W}_o + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V}_{\text{отн}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \\ &= \vec{W}_{\text{отн}} + \vec{W}_o + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2(\vec{\omega} \times \vec{V}_{\text{отн}}), \quad (2.45)\end{aligned}$$

Из формулы (2.38) следует, что

$$\vec{W}_o + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{W}_{\text{пер}}.$$

Вектор

$$\vec{W}_{\text{кор}} = 2(\vec{\omega} \times \vec{V}_{\text{отн}}) \quad (2.46)$$

называется **кориолисовым ускорением** материальной точки.

Равенство (2.45) теперь запишется в виде

$$\vec{W}_{\text{абс}} = \vec{W}_{\text{отн}} + \vec{W}_{\text{пер}} + \vec{W}_{\text{кор}}. \quad (2.47)$$

Полученный результат можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема (Кориолиса). *Абсолютное ускорение материальной точки равно сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений.*

Кориолисово ускорение (2.46) обращается в нуль в некоторый момент времени, если в этот момент выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- 1) $\vec{V}_{\text{отн}} = 0$;
- 2) $\omega = 0$, т.е. система S_1 совершает мгновенное поступательное движение;
- 3) $\vec{\omega} \parallel \vec{V}_{\text{отн}}$, т.е. вектор угловой скорости системы S_1 параллелен вектору относительной скорости точки.

Пример 2.11. На платформах, расположенных рядом и вращающихся в противоположных направлениях, находятся наблюдатели A_1 и A_2 , занимающие в данный момент положения,

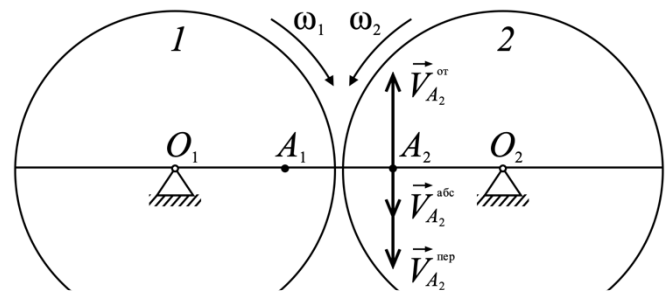


Рисунок 2.29

показанные на рисунке. Дано: $O_1O_2 = 5\text{ м}$, $O_1A_1 = O_2A_2 = 2\text{ м}$, $\omega_1 = \omega_2 = 1\text{ с}^{-1}$. С какой скоростью наблюдатель A_2 движется в данный момент относительно: 1) первой платформы, 2) относительно наблюдателя A_1 ?

Решение. В качестве подвижной системы отсчета выберем систему, связанную с платформой 1 (рисунок 2.29). Тогда:

$$V_{A_2}^{nep} = \omega_1 \cdot O_1A_2 = 3\omega_1 = 3,$$

$$V_{A_2}^{abc} = \omega_2 \cdot O_2A_2 = 2\omega_2 = 2.$$

Так как $\vec{V}_{A_2}^{abc} = \vec{V}_{A_2}^{nep} + \vec{V}_{A_2}^{omn}$, то $\vec{V}_{A_2}^{omn} = \vec{V}_{A_2}^{abc} - \vec{V}_{A_2}^{nep}$ и направлена по вертикали вверх, а по величине $V_{A_2}^{omn} = 3\omega_1 - 2\omega_2 = 1\text{ (м/с)}$.

Пример 2.12. По образующей вращающегося конуса движется от его вершины точка M по закону $S = S_0 + ut$ (S_0, u – постоянные). Определить уравнение вращения конуса $\varphi(t)$, если при $t = 0: \varphi = 0$, $\omega = \omega_0$, а абсолютное ускорение точки M расположено в плоскости, проходящей через ось конуса.

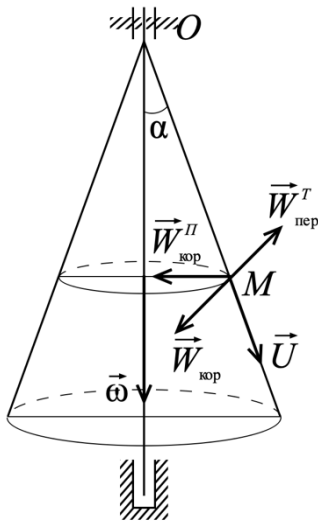


Рисунок 2.30

Решение. Относительным движением является равномерное прямолинейное движение точки по образующей, поэтому $W_{omn} = 0$. Переносным движением будет вращение конуса. Так как $\vec{W}_M = \vec{W}_{nep} + \vec{W}_{nep}^n + \vec{W}_{omn} + \vec{W}_{kor}$, а $\vec{W}_{nep}^n$ и $\vec{W}_{kor} = -2\vec{\omega} \times \vec{u}$ направлены $\perp$ плоскости, проходящей через ось конуса (рисунок 2.30), то $\vec{W}_M$ будет лежать в этой плоскости и совпадать с $\vec{W}_{nep}^n$ если $\vec{W}_{nep}^n = -\vec{W}_{kor}$, то есть $\varepsilon S \sin \alpha = -2\omega u \sin \alpha$. Знак « $-$ » в этом равенстве показывает, что $\vec{W}_{nep}^n$ и $\vec{W}_{kor}$ будут направлены в разные стороны, если ε и ω разных знаков. Таким образом,

$$\varepsilon = -\frac{d\omega}{dt} = -\frac{2\omega u}{S_0 + ut} \text{ и разделяя переменные, получим}$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\omega} = -2u \int_0^t \frac{dt}{S_0 + ut}, \text{ откуда найдем } \omega = \frac{\omega_0 S_0^2}{(S_0 + ut)^2} = \frac{d\varphi}{dt} \text{ и } \int_0^{\varphi} d\varphi = \omega_0 S_0^2 \int_0^t \frac{dt}{(S_0 + ut)^2},$$

$$\varphi = -\frac{\omega_0 S_0^2}{u} \left(\frac{1}{S_0 + ut} - \frac{1}{S_0} \right) = \frac{\omega_0 S_0}{S_0 + ut}.$$

Пример 2.13. На каком-то участке река течет с востока на запад по

параллели 30° северной широты со скоростью $V_r = 4 \text{ км/час}$. Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение частицы воды. Как изменятся эти величины, если река течет с запада на восток? Радиус Земли $R = 6,4 \cdot 10^6 \text{ м}$.

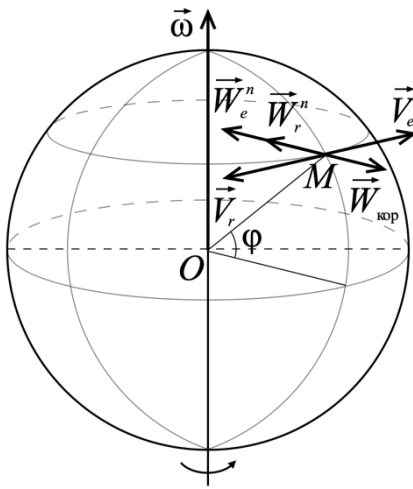


Рисунок 2.31

Решение. Вращение Земли вокруг своей оси является переносным движением и

$$V_e = \omega R \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} 7,29 \cdot 10^{-5} \cdot 6,4 \cdot 10^6 = 404,05 \text{ м/с}.$$

Учитывая, что относительная скорость частицы воды $V_r = 4 \text{ км/час} \cong 1,11 \text{ м/с}$, заключаем, что $V_a = V_e - V_r = 402,94 \text{ м/с}$ и направлена по касательной к параллели на восток (рисунок 2.31). Так как вращение земли равномерное, то $\vec{W}_e = \vec{W}_e^n$ и направлено к земной оси, а по модулю $W_e^n = \omega^2 R \cos 30^\circ = 2,94 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}^2$.

Относительное движение частицы воды – равномерное движение по окружности, поэтому $\vec{W}_r = \vec{W}_r^n$ и направлено также к земной оси, а по модулю

$$W_r = W_r^n = \frac{V_r^2}{R \cos 30^\circ} \cong 2,26 \cdot 10^{-7} \text{ м/с}^2.$$

Ускорение Кориолиса $\vec{W}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{V}_r$, направлено от земной оси и по величине $W_c = 2\omega V_r \sin 90^\circ \cong 1,62 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}^2$.

Абсолютное ускорение частицы воды будет направлено от земной оси и по модулю $W_a = W_c - W_r^n + W_e^n \cong 158,83 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}^2$.

Если река течет с запада на восток, то направление $\vec{V}_r$ и $\vec{V}_e$ совпадают и $V_a = V_r + V_e = 405,16 \text{ м/с}$, $\vec{W}_c$ поменяет свое направление на противоположное и $W_a = W_c + W_r^n + W_e^n \cong 165,16 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}^2$.

Пример 2.14. На каком-то участке река течет с юга на север по меридиану со скоростью $V_r = 4 \text{ км/час}$. Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение частицы воды на северной широте 30° . Как изменятся эти величины, если река течет с севера на юг?

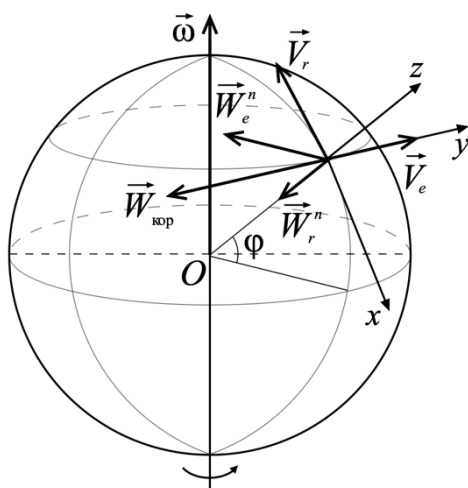


Рисунок 2.32

Решение. В отличие от предыдущей задачи относительная и переносная скорости будут здесь взаимно перпендикулярны (рисунок 2.32) и $V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} \cong 403 \text{ м/с}$, причем величина V_a не изменится, если частица воды движется с севера на юг. Переносное ускорение будет таким же, как в примере 2.13, а относительное ускорение будет направлено к центру Земли и

$$W_r = W_r^n = \frac{V_r^2}{R} \cong 1,92 \cdot 10^{-7} \text{ м/с}^2.$$

Кориолисово ускорение будет направлено по касательной к параллели на запад и $W_c = 2\omega V_r \sin 30^\circ \cong 8,09 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}^2$.

Проектируя равенство $\vec{W}_a = \vec{W}_r + \vec{W}_e + \vec{W}_c$ на оси координат, указанные на рисунок 2.32, получим $W_{ax} = -W_e^n \cos 60^\circ \cong -1,47 \cdot 10^{-6}$, $W_{ay} = -W_c \cong -80,9 \cdot 10^{-6}$, $W_{az} = -W_r^n - W_e^n \sin 60^\circ \cong -2,76 \cdot 10^{-6}$ и $W_a \cong 80,96 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}^2$.

При изменении направления движения реки на противоположное поменяется только направление кориолисова ускорения, а величина абсолютного ускорения не изменится.

1.2.7. Сложное движение твердого тела.

Пусть известно движение абсолютно твердого тела A по отношению системе S_1 (относительное движение) и движение системы S_1 относительно неподвижной системы S (переносное движение). Требуется определить, каким будет в данный момент времени результирующее (абсолютное) движение тела A .

Поскольку вид мгновенного движения абсолютно твердого тела определяется распределением скоростей его точек в данный момент времени, то для решения поставленной задачи воспользуемся формулой (2.44), согласно которой абсолютная скорость $\vec{V}$ произвольной точки M тела A равна сумме относительной $\vec{V}_1$ и переносной $\vec{V}_2$ скоростей:

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2. \quad (2.48)$$

Выберем некоторую точку P тела A в качестве полюса и будем считать тело свободным в относительном движении, т.е. совершающим произвольное движение относительно системы S_1 . Тогда, согласно формуле (2.37),

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_{1P} + \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{PM}, \quad (2.49)$$

где $\vec{V}_{1P}$ – относительная скорость полюса P ; $\vec{\omega}_1$ – мгновенная угловая скорость тела относительно системы S_1 .

Подвижную систему S_1 будем считать свободным абсолютно твердым телом, совершающим произвольное движение относительно системы S . Тогда переносная скорость $\vec{V}_2$ точки M также найдется по формуле (2.37) в виде

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_{2P} + \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{PM}, \quad (2.50)$$

если в качестве полюса тела S_1 взять ту его точку, которая в данный момент времени совпадает с точкой P тела A . Вектор $\vec{V}_{2P}$ в (2.50) является переносной скоростью точки P тела A , $\vec{\omega}_2$ – мгновенная угловая скорость тела (системы) S_1 относительно системы S . Объединяя равенства (2.48) – (2.50), получаем

$$\vec{V} = \vec{V}_{1P} + \vec{V}_{2P} + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \overrightarrow{PM}. \quad (2.51)$$

Однако если рассматривать движение тела A совершающимся непосредственно по отношению к системе S , то

$$\vec{V} = \vec{V}_P + \vec{\omega} \times \overrightarrow{PM}, \quad (2.52)$$

где $\vec{V}_P$, $\vec{\omega}$ – соответственно скорость точки P и мгновенная угловая скорость тела A относительно системы S . Сравнивая (2.51) и (2.52), имеем

$$\vec{V}_P = \vec{V}_{1P} + \vec{V}_{2P}, \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2. \quad (2.53)$$

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема. *В каждый момент времени абсолютная скорость любой точки твердого тела, совершающего сложное движение, находится по формуле (2.52), где абсолютная скорость $\vec{V}_P$ полюса P равна сумме его относительной и переносной скоростей, а абсолютная угловая скорость $\vec{\omega}$ равна сумме относительной и переносной угловых скоростей тела в этот момент времени.*

Найдем вид абсолютного движения твердого тела при некоторых частных предположениях относительно составляющих движений. В данном пособии ограничимся рассмотрением только двух случаев сложения простейших движений твердого тела.

1.2.7.1. Сложение поступательных движений.

Пусть относительное и переносное движения, т. е. движения тела A и системы S_1 , являются мгновенными поступательными. Это значит, что $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2 = 0$ и по формуле (2.51) все точки тела A имеют одинаковую абсолютную скорость

$$\vec{V} = \vec{V}_{1P} + \vec{V}_{2P}.$$

Следовательно, *тело А совершает мгновенное поступательное движение со скоростью, равной сумме относительной и переносной скоростей.*

1.2.7.2. Сложение вращений вокруг пересекающихся осей.

Пусть сложное движение тела А состоит из двух мгновенных вращений относительно осей, пересекающихся в некоторой точке, которую выберем в качестве полюса Р. В этом случае $\vec{V}_{1P} = \vec{V}_{2P} = \vec{0}$ и абсолютная скорость $\vec{V}$ точки М тела находится по формуле

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{PM},$$

где $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$; $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$ – угловые скорости мгновенных относительного и переносного движений.

Таким образом, *абсолютное движение тела является мгновенным вращательным вокруг оси, проходящей через точку пересечения осей составляющих движений, с угловой скоростью, равной сумме относительной и переносной угловых скоростей.*

Этот результат легко обобщается на случай n мгновенных вращений вокруг осей, пересекающихся в одной точке. Сферическое движение твердого тела, например, можно представить как сложное движение, состоящее из трех мгновенных вращений, каждое из которых изменяет лишь один из углов Эйлера (см. рисунок 2.24). Мгновенными угловыми скоростями этих вращений являются векторы $\dot{\varphi}\vec{e}_z, \dot{\psi}\vec{e}_\zeta, \dot{\theta}\vec{e}_N$, где $\vec{e}_z, \vec{e}_\zeta, \vec{e}_N$ – единичные векторы осей Ох, Оζ и линии узлов ON. Следовательно, мгновенная угловая скорость тела равна сумме угловых скоростей составляющих вращений:

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{e}_z + \dot{\psi}\vec{e}_\zeta + \dot{\theta}\vec{e}_N.$$

Спроектировав это равенство на оси подвижной системы Охуζ, связанной с телом, получим

$$p = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi, q = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi, r = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}. \quad (2.54)$$

Равенства (2.54) дают выражения проекций p, q, r угловой скорости тела в сферическом движении через углы Эйлера и называются **кинематическими уравнениями (формулами) Эйлера**.

Пример 2.15. Шар радиусом r катится без проскальзывания в цилиндрическом стакане радиусом R , касаясь одновременно его дна и стенки.

Вычислить абсолютные величины угловой скорости ω и углового ускорения ε шара, если скорость его центра постоянна по величине и равна V .

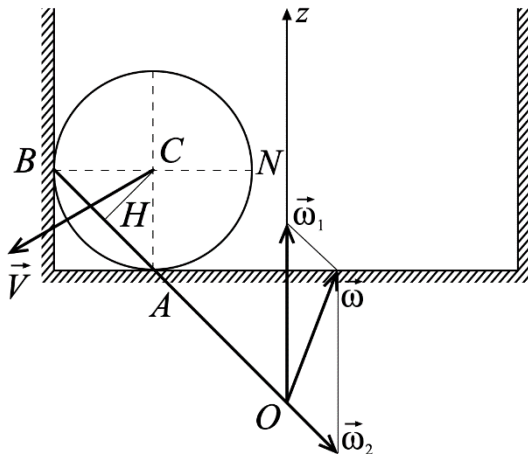


Рисунок 2.33

Решение. Шар участвует в сложном движении, состоящем из двух вращений с угловыми скоростями $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$. Вектор $\vec{\omega}_1$ направлен по оси Dz стакана, а его величина $\omega_1 = \frac{V}{CN} = \frac{V}{R-r}$. Так как скорости точек касания шара со стаканом $V_A = V_B = 0$, то AB – мгновенная ось вращения шара и $\omega_2 = \frac{V}{CH} = \frac{V\sqrt{2}}{r}$. Результирующим

движением шара будет вращение вокруг точки O пересечения прямых AB и Dz , как неподвижной точки, с угловой скоростью $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ (рисунок 2.33). Величина вектора $\vec{\omega}$ вычисляется по теореме косинусов: $\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\omega_1\omega_2 \cos 45^\circ$, что приводит к выражению

$$\omega = \frac{V}{r} \sqrt{1 + \left(\frac{R-2r}{R-r} \right)^2}.$$

Так как величины составляющих угловых скоростей постоянны, то по формуле (2.29) $\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_2 = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2$ и

$$\varepsilon = \frac{V\sqrt{2}}{r} \cdot \frac{V}{R-r} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{V^2}{r(R-r)}.$$

1.3. Динамика материальной точки.

В данной главе, на основании изложенной во введении системы аксиом, изучаются общие закономерности движения материальной точки под действием сил и исследуются некоторые специальные задачи.

1.3.1. Дифференциальные уравнения движения материальной точки.

1.3.1.1. Уравнения движения свободной материальной точки.

Для точки постоянной массы уравнение движения задается вторым законом Ньютона:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) \quad (3.1)$$

Это уравнение позволяет ставить и решать две задачи:

1) зная закон движения материальной точки $\vec{r} = \vec{r}(t)$, определить силу, под действием которой это движение происходит;

2) зная действующие на точку силы, а также ее начальное положение и начальную скорость, определить закон движения материальной точки.

Решение первой задачи сводится к дифференцированию известного соотношения $\vec{r} = \vec{r}(t)$, что позволяет однозначно определить действующую силу для каждого момента времени $\vec{F} = \vec{F}(t)$.

Для решения второй задачи, которая является в динамике **основной**, надо проинтегрировать уравнение (3.1), которое в проекциях на оси системы координат примет вид

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Правые части уравнений (3.2) являются известными, однозначными и конечными функциями указанных аргументов, вообще говоря, нелинейными, поэтому точное интегрирование системы удастся осуществить только для некоторых классов сил, т.е. при специальных правых частях. Общее решение системы (3.2) будет содержать шесть произвольных постоянных:

$$\vec{r} = \vec{r}(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6)$$

или

$$\begin{aligned} x &= x(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \quad y = y(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \\ z &= z(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Это говорит о том, что под действием заданной силы точка может совершать целый класс движений. Так, под действием силы тяжести точка может падать по вертикали или двигаться по параболе, если она брошена под углом к горизонту. Тот или иной характер движения, вызванного заданной силой, определяется **начальными условиями**: при $t = t_0$

$$\vec{r} = \vec{r}_0, \quad \vec{V} = \vec{V}_0 \quad \text{или} \quad x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0, \quad \dot{z} = \dot{z}_0. \quad (3.4)$$

Дифференцируя соотношения (3.3) по времени, находим проекции скорости:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \quad \dot{y} = \dot{y}(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \\ \dot{z} &= \dot{z}(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Подставив начальные условия (3.4) в (3.3) и (3.5), получим систему шести алгебраических уравнений относительно $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$. Эта система однозначно разрешима, так как ее функциональный определитель

$$\Delta = \frac{\partial(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)}{\partial(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6)} \neq 0$$

в силу независимости начального положения и начальной скорости. Решение $c_k = \overline{f_k(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)}$, $k = \overline{1, 6}$, будучи подставленным в (3.3), приводит к частному решению системы (3.2), удовлетворяющему начальным условиям (3.4):

$$\begin{aligned} x &= x(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \quad y = y(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ z &= z(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \end{aligned} \quad (3.6)$$

или в векторном виде

$$\vec{r} = \vec{r}(t, \vec{r}_0, \vec{V}_0). \quad (3.7)$$

Уравнения (3.6) (или (3.7)) дают решение основной задачи динамики свободной точки. Однако получить это решение удастся далеко не всегда, поэтому целесообразно и важно выявить некоторые следствия уравнений (3.2), характеризующие общие свойства движения и имеющие простую физическую интерпретацию. Такие следствия называются **общими теоремами динамики**.

Отметим, что при решении ряда задач динамики достаточно найти одно или несколько соотношений вида

$$f_k(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = c_k, \quad k \leq 6, \quad (3.8)$$

которые в силу уравнений (3.2) имеют место при любых начальных условиях. Эти соотношения называются **первыми интегралами** системы (3.2). Если известно общее решение системы, то, разрешая (3.3), (3.5) относительно произвольных постоянных, получим шесть первых интегралов вида (3.8). Наоборот, если каким-то образом найдены шесть независимых первых интегралов системы (3.2), то, выражая из них $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ в функциях времени и шести произвольных постоянных, получаем общее решение системы (3.3), (3.5).

1.3.1.2. Прямолинейное движение материальной точки.

Необходимые и достаточные условия прямолинейности движения даются следующей теоремой: *движение материальной точки будет прямолинейным тогда и только тогда, когда сила, действующая на точку, сохраняет постоянное направление, а начальная скорость направлена по силе или равна нулю.*

Действительно, если точка движется по прямой, вдоль которой направим ось Ox , то во все время движения

$$y = z = 0, \dot{y} = \dot{z} = 0, \ddot{y} = \ddot{z} = 0.$$

Следовательно, скорость точки в любой момент времени, а значит, и при $t = 0$, направлена по оси Ox или равна нулю. А так как дифференциальные уравнения движения точки имеют вид

$$m\ddot{x} = F_x, m\ddot{y} = F_y, m\ddot{z} = F_z, \quad (3.9)$$

то $F_x = F_y = 0$, т.е. сила направлена по оси Ox .

Пусть теперь сила, действующая на точку, сохраняет постоянное направление, вдоль которого направим ось Ox . Тогда $F_y = F_z = 0$. Это значит, что $\ddot{y} = \ddot{z} = 0$ и $\dot{y} = C_1, \dot{z} = C_2$.

Так как при $t = 0 \dot{y} = \dot{z} = 0$, то $C_1 = C_2 = 0$ и $y = C_3, z = C_4$.

Поскольку в начальный момент времени точка находилась на оси Ox , то $C_3 = C_4 = 0$ и $y = z = 0$ во все время движения, т. е. траекторией точки будет ось Ox .

Таким образом, если точка движется прямолинейно вдоль оси Ox , то два последних уравнения системы (3.9) удовлетворяются тождественно и движение точки описывается одним дифференциальным уравнением

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x(t, x, \dot{x}), \quad (3.10)$$

общее решение которого $x = x(t, C_1, C_2)$ содержит две произвольные постоянные, определяемые из начальных условий: при $t = 0: x = x_0, \dot{x} = \dot{x}_0$.

Однако даже в этом простейшем случае точное интегрирование уравнения движения не всегда возможно. Укажем некоторые классы сил, когда это интегрирование может быть выполнено в квадратурах.

1. Сила является функцией только времени: $F_x = F_x(t)$.

Уравнение (3.10) запишем в виде

$$m \frac{d\dot{x}}{dt} = F_x(t).$$

Разделяя переменные и интегрируя уравнение с учетом начальных условий, находим скорость как функцию времени:

$$\dot{x} = \dot{x}_0 + \frac{1}{m} \int_0^t F_x(t) dt.$$

Учитывая, что $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ и интегрируя еще раз, получаем

$$x = x_0 + \dot{x}_0 t + \frac{1}{m} \int_0^t \int_0^\tau F_x(\tau) d\tau dt.$$

2. Сила является функцией только положения точки: $F_x = F_x(x)$.

Представим ускорение в виде

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \frac{dx}{dt} = \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx}. \quad (3.11)$$

Разделив переменные в уравнении $m\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = F_x(x)$, найдем с учетом начальных условий $m \frac{\dot{x}^2}{2} - m \frac{\dot{x}_0^2}{2} = \int_{x_0}^x F_x(x) dx$.

$$\int_{x_0}^x F_x(x) dx = f(x)$$

Обозначая для краткости $f(x)$, из последнего уравнения получаем $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\dot{x}_0^2 + \frac{2}{m} f(x)}$. Разделив переменные и интегрируя, находим

$$t = \pm \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\dot{x}_0^2 + \frac{2}{m} f(x)}} = \varphi(x).$$

3. Сила является функцией только скорости точки: $F_x = F_x(\dot{x})$.

Разделив переменные в уравнении $m \frac{d\dot{x}}{dt} = F_x(\dot{x})$ и проинтегрировав, получим

$$t = m \int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \frac{d\dot{x}}{F_x(\dot{x})} = \varphi(\dot{x}). \quad (3.12)$$

Если из уравнения (3.12) можно определить $\dot{x}$ как функцию времени, т.е. $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \psi(t)$, то интегрируя получаем закон движения

$$x = x_0 + \int_0^t \psi(t) dt.$$

Если же $\dot{x}$ из соотношения (3.12) найти нельзя, то записывая уравнение движения в виде $m\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = F_x(\dot{x})$ и интегрируя, найдем

$$x = x_0 + m \int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \frac{\dot{x} d\dot{x}}{F_x(\dot{x})} = \eta(\dot{x}). \quad (3.13)$$

Соотношения (3.12) и (3.13) дают закон движения в параметрической форме.

Следует отметить, что случаи точного интегрирования уравнения не исчерпываются рассмотренными.

1.3.1.3. Прямолинейные колебания материальной точки.

Пусть на материальную точку действуют силы $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{R}$, направленные по оси Ox , такие что

$P_x = -cx$ — **восстанавливающая сила**, стремящаяся вернуть точку в положение покоя O , c — коэффициент упругости или коэффициент жесткости;

$R_x = -\alpha\dot{x}$ — **сила сопротивления** среды, α — коэффициент сопротивления;

$Q_x = H_0 \sin \omega t$ — **возмущающая сила**.

Если в начальный момент времени

$$t = 0: x = x_0, \dot{x} = V_0, y = \dot{y} = 0, z = \dot{z} = 0, \quad (3.14)$$

то точка будет двигаться по оси Ox согласно уравнению

$$m\ddot{x} = -cx - \alpha\dot{x} + H_0 \sin \omega t$$

или

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x = H \sin \omega t, \quad 2b = \frac{\alpha}{m}, k^2 = \frac{c}{m}, H = \frac{H_0}{m}. \quad (3.15)$$

(3.15) — неоднородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Его решение является суммой общего решения однородного уравнения, которое ищется в виде $x = Ce^{\lambda t}$ и частного решения неоднородного, которое при заданной в (3.15) правой части ищется в виде $x^* = A \sin(\omega t + \gamma)$.

Подстановка $x = Ce^{\lambda t}$ в левую часть однородного уравнения приводит к **характеристическому уравнению**

$$\lambda^2 + 2b\lambda + k^2 = 0,$$

корни которого при условии $b < k$ (случай малого сопротивления)

$$\lambda_{1,2} = -b \pm ik_1, \quad k_1 = \sqrt{k^2 - b^2},$$

так что общее решение однородного уравнения можно записать в виде

$$x = e^{-bt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t)$$

или

$$x = ae^{-bt} \sin(k_1 t + \beta).$$

Постоянные A и γ в частном решении находятся после подстановки функции x^* в уравнение (3.15):

$$A = \frac{H}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 b^2}}, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{-2b\omega}{k^2 - \omega^2}. \quad (3.16)$$

Таким образом, общее решение уравнения (3.15) имеет вид

$$x = ae^{-bt} \sin(k_1 t + \beta) + A \sin(\omega t + \gamma), \quad (3.17)$$

Значения постоянных интегрирования a и β определяются из начальных условий (3.14). После подстановки их в (3.17) получим закон движения, который можно представить в виде

$$x = e^{-bt} \left(\frac{V_0 + x_0 b}{k_1} \sin k_1 t + x_0 \cos k_1 t \right) - A e^{-bt} \left(\frac{b \sin \gamma + \omega \cos \gamma}{k_1} \sin k_1 t + \sin \gamma \cos k_1 t \right) + A \sin(\omega t + \gamma). \quad (3.18)$$

Анализируя (3.18), замечаем, что результирующее движение точки под действием указанных сил является результатом сложения трех типов колебаний. Первое слагаемое описывает собственные колебания точки с частотой k_1 , зависящие от начальных условий и затухающие со временем благодаря множителю e^{-bt} . Второе описывает затухающие колебания, имеющие частоту собственных, но генерированные возмущающей силой и не зависящие от начальных условий. Третье слагаемое описывает незатухающие вынужденные колебания, имеющие частоту возмущающей силы. Их амплитуда A , и величина γ , характеризующая сдвиг фазы вынужденных колебаний относительно фазы возмущающей силы, не зависят от начальных условий.

Но величина амплитуды вынужденных колебаний зависит от частоты возмущающей силы. Поскольку производная

$$\frac{d}{d\omega} \left((k^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 b^2 \right) = 4(\omega^2 - k^2 + 2b^2)\omega$$

при $k^2 > 2b^2$ (сопротивление мало) обращается в нуль при $\omega = 0$ и $\omega = \sqrt{k^2 - 2b^2}$, то, как легко убедиться, при $\omega_p = \sqrt{k^2 - 2b^2}$ амплитуда A имеет максимум, равный

$$A_{\max} = \frac{H}{2b\sqrt{k^2 - b^2}}.$$

В этом случае говорят, что имеет место **резонанс**, т.е. амплитуда вынужденных колебаний как функция частоты возмущающей силы достигает своего максимума. Когда $\omega > \omega_p$, то с увеличением ω амплитуда A убывает, стремясь к нулю при $\omega \rightarrow \infty$.

В случае, если сопротивление движению точки отсутствует ($b=0$), то $\omega_p = k$, т.е. резонансная частота возмущающей силы совпадает с частотой собственных колебаний и $A \rightarrow \infty$ при $\omega \rightarrow k$.

Если же $0 < k \leq b\sqrt{2}$ (случай большого сопротивления), то максимальное значение величина A принимает

лишь при $\omega=0$ и $A_{\max} = \frac{H}{k^2}$.

1.3.1.4. Движение несвободной материальной точки по заданной неподвижной кривой.

Рассмотрим случай, когда связи, наложенные на точку, удерживают ее во все время движения на некоторой заданной неподвижной кривой AB . Эффект действия связи эквивалентен действию некоторой силы, которая по третьему закону Ньютона равна и противоположна той, с которой точка действует на связь. Эта сила названа **реакцией связи**. С учетом этого уравнение движения точки (3.1)

$$m\vec{W} = \vec{F} + \vec{N} \quad (3.19)$$

будет содержать наперед неизвестную реакцию связи $\vec{N}$. **Основная задача динамики** в этом случае состоит в том, чтобы по заданным активным силам и начальным условиям определить движение точки и реакцию связи. Будем считать связь **идеальной (без трения)**. Реакция такой связи направлена по нормали к кривой, т.е. лежит в плоскости $(\vec{n}, \vec{b})$, перпендикулярной касательной $\vec{\tau}$. В этом случае удобно пользоваться проекциями уравнения (3.19) на оси естественного трехгранника кривой:

$$\vec{\tau}: m \frac{d^2 s}{dt^2} = F_{\tau}; \quad \vec{n}: m \frac{V^2}{\rho} = F_n + N_n; \quad \vec{b}: 0 = F_b + N_b. \quad (3.20)$$

Уравнения (3.20) называются **естественными уравнениями движения точки** по заданной неподвижной гладкой кривой. Первое из этих уравнений не содержит неизвестной реакции и служит для определения закона движения $s = s(t, s_0, \dot{s}_0)$ по заданной активной силе $\vec{F} = \vec{F}(t, s, \dot{s})$ и заданным начальным условиям при $t = t_0: s = s_0, \dot{s} = \dot{s}_0$.

Оставшиеся уравнения (3.20) служат для определения реакции связи, которая, очевидно, зависит от активной силы $\vec{F}$ и скорости движения.

Примером несвободной точки может служить математический маятник.

Математическим маятником называется тяжелая материальная точка, подвешенная на гибкой нерастяжимой нити. Такая точка может двигаться по дуге окружности (**плоский математический маятник**) или по сфере (**сферический маятник**).

Положение плоского математического маятника массой m и длиной l будем определять углом φ , отсчитываемым от вертикали (рисунок 3.1). Проектируя уравнение Ньютона

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{g} + \vec{T}$$

на оси естественного трехгранника, получаем

$$\vec{\tau}: m \frac{dV}{dt} = -mg \sin \varphi; \quad \vec{n}: m \frac{V^2}{l} = T - mg \cos \varphi \quad (3.21)$$

Учитывая, что $V = l\dot{\varphi}$ и обозначая $\frac{g}{l} = \omega^2$, перепишем первое уравнение (3.21) в виде

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2 \sin \varphi = 0. \quad (3.22)$$

Это уравнение служит для определения движения маятника, из второго уравнения (3.21) находится натяжение нити.

Заменяя в (3.22) $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ на $\dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}$ и разделив переменные, получим в результате интегрирования $\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \omega^2 \cos \varphi + C$.

Если обозначить через φ_0 угол максимального отклонения маятника, то $\dot{\varphi} = 0$ при $\varphi = \varphi_0$ и $C = -\omega^2 \cos \varphi_0$, поэтому

$$\dot{\varphi}^2 = 2\omega^2 (\cos \varphi - \cos \varphi_0). \quad (3.23)$$

Теперь можно определить натяжение нити $T = mg(3\cos \varphi - 2\cos \varphi_0)$.

Из (3.23) следует, что во время движения $\cos \varphi \geq \cos \varphi_0$, т. е. $|\varphi| \leq \varphi_0$, значит, маятник будет совершать колебательные движения. Если положить при $t = 0$: $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = 0$ и считать начальное отклонение φ_0 малым, то φ также мало и в уравнении (3.22) можно положить $\sin \varphi \approx \varphi$. Полученное уравнение **малых колебаний**

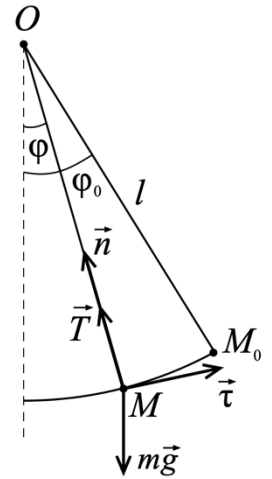


Рисунок 3.1

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0,$$

общее решение которого $\varphi = A\cos\omega t + B\sin\omega t$, дает с учетом принятых начальных условий закон движения

$$\varphi = \varphi_0 \cos\omega t.$$

Период малых колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

не зависит от начальных условий, т. е. колебания будут **изохронными**.

Точное решение задачи довольно громоздко и не выражается в элементарных функциях.

Пример 3.1. Точка массой 1 кг движется под действием переменной силы $F = 10(1-t)$ Н, где время t – в секундах. Через сколько секунд точка остановится, если начальная скорость $V_0 = 20$ м/с и сила совпадает по направлению с начальной скоростью? Какой путь пройдет точка до остановки?

Решение. Очевидно, точка будет совершать прямолинейное движение согласно уравнению $\ddot{x} = 10(1-t)$. Записывая это уравнение в виде $dV = 10(1-t)dt$ и интегрируя с учётом начальных условий в пределах $\int_{V_0}^V dx = 10 \int_0^t (1-t) dt$, находим: $V = V_0 + 10t - 5t^2$. Учитывая, что $V = \frac{dx}{dt}$ и разделяя

переменные, получим $x = V_0 t + 5t^2 - \frac{5}{3}t^3$. Полагая $V = 0$, найдём время движения до остановки: $T = 1 + \sqrt{5} \approx 3,236$ с. Подставляя это значение в выражение для x , находим пройденный путь $x(T) \approx 60,6$ м.

Пример 3.2. Точка падает на Землю с высоты H без начальной скорости под действием силы притяжения обратно пропорциональной квадрату расстояния до центра Земли. С какой скоростью точка упадет на Землю? Сопротивлением воздуха пренебречь. Радиус Земли равен R , ускорение силы тяжести у поверхности земли равно g .

Решение. Направим ось Ox по вертикали вверх и возьмём точку O на поверхности Земли. Так как на точку действует только сила тяготения, то уравнение движения в проекции на ось Ox запишем в виде

$$mV \frac{dV}{dx} = -\frac{k}{(R+x)^2}.$$

Коэффициент пропорциональности k найдём из того условия, что на поверхности Земли при $x=0$ сила тяготения равна весу тела, т.е. $mg = \frac{k}{R^2}$, откуда $k = mgR^2$ и уравнение движения после разделения переменных будет иметь вид:

$$VdV = -\frac{gR^2}{(R+x)^2} dx.$$

Интегрируя слева в пределах от 0 до V , а справа от H до 0, получим $\frac{V^2}{2} = gR^2 \frac{1}{R+x} \Big|_H^0 = gR^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right)$, откуда находим искомую скорость падения $V = \sqrt{\frac{2gRh}{R+H}}$.

Пример 3.3. На точку весом P , брошенную вертикально вверх с начальной скоростью V_0 , действует сила сопротивления воздуха пропорциональная квадрату скорости $R = k^2 PV^2$. За какое время T и на какую высоту H поднимется точка? С какой скоростью она упадет обратно на землю?

Решение. На точку действуют две силы: вес $\vec{P}$ и сила сопротивления воздуха $\vec{R}$, направленные вертикально вниз. Выберем начало координат в начальном положении точки и ось x направим вертикально вверх. Запишем дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки в виде

$$\frac{P}{g} \frac{dV}{dt} = -P - k^2 PV^2.$$

Разделив переменные $\frac{dV}{1+k^2 V^2} = -gdt$ и проинтегрировав с учетом начальных условий при $t=0$: $x=0$, $V=V_0$ получим

$$\frac{1}{k} (\arctg(kV) - \arctg(kV_0)) = -gt \text{ и } V = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{k} \operatorname{tg}(\arctg(kV_0) - kgt).$$

Полагая в этом соотношении $V=0$, что соответствует наивысшей точке, найдем искомое время: $T = \frac{1}{kg} \arctg(kV_0)$.

Для определения высоты H представим уравнение движения в виде $\frac{P}{g}V \frac{dV}{dx} = -P - k^2PV^2$, разделим переменные $\frac{VdV}{1+k^2V^2} = -gdx$ и проинтегрируем слева от V_0 до нуля. Тогда пределы интегрирования справа будут соответственно нуль и H , так как при $V = 0$ получаем максимальную высоту подъема тела. В результате найдем

$$H = \frac{1}{2k^2g} \ln(1 + k^2V_0^2).$$

Переходя в выражениях для T и H к пределу при $k \rightarrow 0$, получим соответствующие результаты для задачи о вертикальном движении точки в поле силы тяжести без учета сопротивления воздуха: $T = \frac{V_0}{g}$, $H = \frac{V_0^2}{2g}$.

Теперь рассмотрим движение точки вниз. Сила сопротивления воздуха поменяет свое направление, и уравнение движения запишется в виде

$$\frac{P}{g}V \frac{dV}{dx} = -P + k^2PV^2.$$

Разделяя переменные и проводя интегрирование в указанных ниже пределах $\int_0^{V_1} \frac{VdV}{1-k^2V^2} = -g \int_H^0 dx$, получим $gH = \frac{1}{2k^2} \ln \frac{1}{1-k^2V_1^2}$. Учитывая найденное

выражение для H , придем к уравнению $1 + k^2V_0^2 = \frac{1}{1-k^2V_1^2}$, откуда находим

$$V_1 = \frac{V_0}{\sqrt{1+k^2V_0^2}}.$$

искомую скорость падения

Пример 3.4. (Влияние постоянной силы на свободные колебания точки.) Точечный груз массой m подвешивают к концу A нерастянутой пружины жесткостью c и отпускают без начальной скорости. Найти закон движения груза.

Решение. При движении груза на него действует сила тяжести $m\vec{g}$ и сила упругости пружины, величина которой пропорциональна ее абсолютному удлинению $|F_x| = c\Delta l$. Вид дифференциального уравнения движения и начальных условий зависит от выбора начала координат.

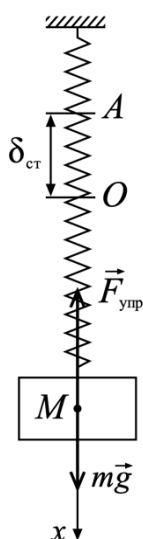


Рисунок 3.2

а) Выберем начало координат O в положении статического равновесия груза, т.е. в положении, где сила тяжести $m\vec{g}$ уравнивается той статической силой упругости, которая возникает при растяжении пружины на величину $\delta_{\text{ст}}$ при покое. Из условия статического равновесия груза имеем $mg = c\delta_{\text{ст}}$. В произвольном положении груза $\Delta l = |AM| = x + \delta_{\text{ст}}$ (рисунок 3.2), поэтому уравнение движения в проекции на ось Ox запишется в виде

$$m\ddot{x} = mg - c(x + \delta_{\text{ст}}) \text{ или } \ddot{x} + k^2x = 0, \quad k^2 = \frac{c}{m} = \frac{g}{\delta_{\text{ст}}}.$$

Решая это уравнение с учетом начальных условий при $t = 0$:

$$x = -\delta_{\text{ст}}, \quad \dot{x} = 0 \text{ получим } x = -\delta_{\text{ст}} \cos \sqrt{\frac{c}{m}}t.$$

Отсюда следует, что груз будет совершать свободные колебания, центр которых совпадает с началом координат, т. е. с положением статического равновесия.

б) Теперь выберем начало координат в точке A . Очевидно, что $\Delta l = |AM| = x$ и уравнение движения примет вид

$$m\ddot{x} = mg - cx \text{ или } \ddot{x} + k^2x = g.$$

В отличие от предыдущего пункта уравнение получилось неоднородным, а начальные условия в этом случае будут нулевыми при $t = 0$: $x = 0, \dot{x} = 0$ и

$$\text{решение задачи запишется в виде } x = \delta_{\text{ст}} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{c}{m}}t \right).$$

Центром колебаний по-прежнему будет положение статического равновесия груза $x = \delta_{\text{ст}}$.

Таким образом, при любом выборе начала координат закон движения груза под действием восстанавливающей силы и постоянной силы тяжести совпадает с законом свободных колебаний точки под действием одной только восстанавливающей силы, но при этом центр колебаний смещается на величину

$$\delta_{\text{ст}} = \frac{mg}{c} \text{ в сторону действия постоянной силы.}$$

Пример 3.5. Статический прогиб рессор груженого товарного вагона $\delta_{\text{ст}} = 5$ см. Определить критическую скорость движения, при которой начнется «галопирование» вагона, если на стыках рельсов вагон испытывает толчки, вызывающие вынужденные колебания вагона на рессорах. Длина рельсов 12 м.

Решение. «Галопирование» произойдёт при резонансе, когда период вынуждающей силы $\frac{L}{V}$ совпадёт с периодом собственных колебаний $2\pi\sqrt{\frac{\delta_{\text{ст}}}{g}}$, откуда найдём $V = \frac{L}{2\pi\sqrt{\delta_{\text{ст}}}} \cong 26,75 \frac{\text{м}}{\text{с}} \cong 96,3 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Пример 3.6. Точка M массой m движется под действием силы тяжести по гладкой внутренней поверхности полого цилиндра радиусом r . В начальный момент угол $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, а скорость точки равнялась нулю. Определить скорость точки M и реакцию поверхности цилиндра при угле $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

Решение. Изобразим точку M в текущем положении и действующие на неё силы: $m\vec{g}$ и реакцию $\vec{N}$ цилиндра (рисунок 3.3). Спроектируем уравнение движения $m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{g} + \vec{N}$ на касательную и нормаль к траектории:

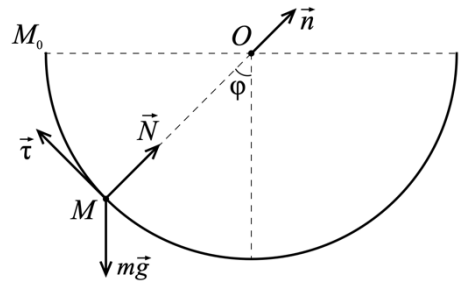


Рисунок 3.3

$$\begin{aligned} \tau : m \frac{dV}{dt} &= -mg \sin \varphi, \\ n : m \frac{V^2}{r} &= N - mg \cos \varphi. \end{aligned}$$

Заменяя в первом уравнении $\frac{dV}{dt}$ на $\frac{d(r\dot{\varphi})}{dt} = r\dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}$ и интегрируя в указанных пределах: $r \int_0^{\dot{\varphi}} \dot{\varphi} d\dot{\varphi} = -g \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sin \varphi d\varphi$, получим $r \frac{\dot{\varphi}^2}{2} = g(\cos \varphi - \cos \varphi_0)$, откуда $V^2 = 2gr(\cos \varphi - \cos \varphi_0)$ и при $\varphi = \frac{\pi}{3}$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ найдём искомую скорость $V = \sqrt[4]{3}\sqrt{gr}$. Подставляя это значение во второе уравнение, находим $N = \frac{3\sqrt{3}}{2}mg$.

Пример 3.7. Точка весом P , брошенная с начальной скоростью V_0 под углом α к горизонту, движется под влиянием силы тяжести и сопротивления

воздуха, пропорциональной первой степени скорости $\vec{R} = -kP\vec{V}$. Найти уравнения движения точки, определить наибольшую высоту над уровнем начального положения и расстояние по горизонтали, на котором эта высота достигается.

Решение. Совместим начало системы координат с начальным положением точки, а оси Ox, Oy направим по горизонтали и вертикали вверх.

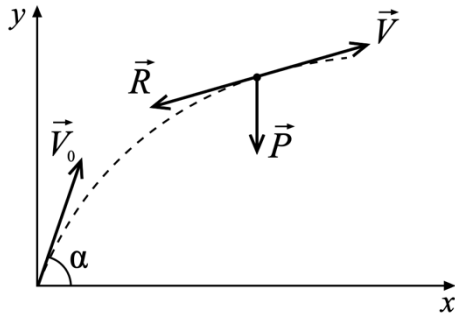


Рисунок 3.4

Спроектируем уравнение движения

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{P} - kP\vec{V} \text{ на оси координат (рисунок 3.4):}$$

$$x: \frac{P}{g} \ddot{x} = -kP\dot{x}, \quad y: \frac{P}{g} \ddot{y} = -P - kP\dot{y},$$

$$\text{откуда получим } \ddot{x} = -kg\dot{x}, \quad \ddot{y} = -g - kg\dot{y}.$$

Общее решение этих уравнений запишется в виде: $x = C_1 + C_2 e^{-kgt}$, $y = C_3 + C_4 e^{-kgt}$, а постоянные интегрирования найдутся из начальных условий при $t = 0$: $x = y = 0$, $\dot{x} = V_0 \cos \alpha$, $\dot{y} = V_0 \sin \alpha$, так что $C_1 = -C_2 = \frac{V_0}{kg} \cos \alpha$,

$C_3 = -C_4 = \frac{V_0}{kg} \sin \alpha + \frac{1}{k^2 g}$. Уравнения движения тела будут иметь вид

$$x = \frac{V_0 \cos \alpha}{kg} (1 - e^{-kgt}), \quad y = \frac{1}{kg} \left(V_0 \sin \alpha + \frac{1}{k} \right) (1 - e^{-kgt}) - \frac{t}{k}.$$

Высоту подъёма можно получить, приравнявая к нулю $\dot{y}$ и находя отсюда момент времени t , в который эта максимальная высота достигается. Подставляя это значение t в выражения для y и x , найдём максимальную высоту и расстояние по x , на котором она достигается. Предоставляя эти операции читателю, запишем ответ:

$$h = \frac{V_0 \sin \alpha}{gk} - \frac{1}{gk^2} \ln(1 + kV_0 \sin \alpha), \quad s = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{2g(1 + kV_0 \sin \alpha)}.$$

1.3.2. Теорема об изменении количества движения точки.

Количеством движения материальной точки называется вектор $m\vec{V}$.

Теорема об изменении количества движения для точки есть выражение второго закона Ньютона в виде

$$\frac{d}{dt}(m\vec{V}) = \vec{F} \quad (3.24)$$

или

$$d(m\vec{V}) = \vec{F}dt = d\vec{S} \quad (3.25)$$

Вектор $d\vec{S} = \vec{F}dt$ называется **элементарным импульсом силы**.

Теорему об изменении количества движения для точки в дифференциальной форме можно сформулировать так: *дифференциал количества движения материальной точки равен элементарному импульсу действующей на точку силы.*

В проекциях на оси координат (3.25) выглядит так:

$$d(m\dot{x}) = F_x dt = dS_x, \quad d(m\dot{y}) = F_y dt = dS_y, \quad d(m\dot{z}) = F_z dt = dS_z.$$

Интегрируя соотношение (3.25) слева в пределах от $\vec{V}_0$ до $\vec{V}$, а справа от t_0 до t и учитывая, что интеграл $\int_{t_0}^t \vec{F}dt = \vec{S}$ называется **импульсом силы $\vec{F}$** , получим

выражение теоремы об изменении количества движения точки **в интегральной форме**:

$$m\vec{V} - m\vec{V}_0 = \vec{S}. \quad (3.26)$$

Изменение количества движения материальной точки за некоторый промежуток времени равно импульсу действующей на точку силы за тот же промежуток времени.

В проекциях на оси (3.26) запишется так:

$$m\dot{x} - m\dot{x}_0 = S_x; \quad m\dot{y} - m\dot{y}_0 = S_y; \quad m\dot{z} - m\dot{z}_0 = S_z, \quad S_l = \int_{t_0}^t F_l dt. \quad (3.27)$$

Первые интегралы. Если $\vec{F} = 0$, то из (3.24) для точки постоянной массы получим векторный интеграл $\vec{V} = \overline{\text{const}}$. Ясно, что теорема может допускать один или два скалярные интегралы.

Следует отметить, что с помощью теоремы об изменении количества движения легко решаются задачи, в которых действующие на точку силы являются функциями времени (или постоянными), а в число данных и искомых величин входят действующие силы, время движения, начальная и конечная скорости, т. е. $\vec{F}(t)$, t , $\vec{V}_0$, $\vec{V}$.

Пример 3.8. Считая, что величина равнодействующей $\vec{R}$ всех сил, действующих на поршень (рисунок 3.5), изменяется по закону $R = amg(1 - \cos kt)$, где m – масса поршня, t – время, a, k – заданные

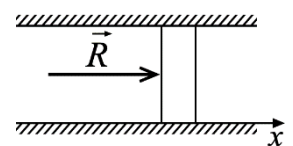


Рис. 3.5

постоянные, определить скорость поршня в момент t_1 , если в момент $t_0 = 0$ его скорость равна V_0 .

Решение. Так как действующая на поршень сила зависит от времени, воспользуемся для решения задачи первым уравнением (3.27)

$$mV_{x1} - mV_{x0} = S_x, \quad S_x = \int_0^{t_1} R_x dt = amg \left(t_1 - \frac{1}{k} \sin kt_1 \right).$$

Учитывая, что $V_{x1} = V_1$, $V_{x0} = V_0$, находим $V_1 = V_0 + ag \left(t_1 - \frac{1}{k} \sin kt_1 \right)$.

Пример 3.9. Каков должен быть коэффициент трения f колес заторможенного автомобиля о дорогу, если при скорости езды 20 м/с он останавливается через 6 с после начала торможения?

Решение. Запишем теорему об изменении количества движения в интегральной форме

$$m\vec{V} - m\vec{V}_0 = \int_0^t (m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}) dt$$

и спроектируем это равенство на ось движения с учётом того, что $N = mg$, $F_{\text{тр}} = fN$ и все силы постоянны. Получим $0 - mV_0 = -fmg t$, откуда находим

$$f = \frac{V}{gt} \cong 0,34.$$

Пример 3.10. Найти импульс равнодействующей всех сил, действующих на снаряд за время, когда снаряд из начального положения O переходит в наивысшее положение M . $V_0 = 500$ м/с, $\alpha = 60^\circ$, $V_1 = 200$ м/с, масса снаряда 100 кг.

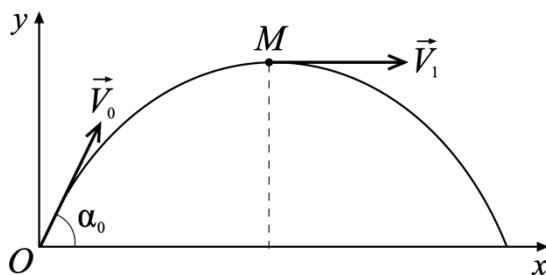


Рисунок 3.6

Решение. Проектируя выражение теоремы об изменении количества движения $m\vec{V}_1 - m\vec{V}_0 = \vec{S}$ на координатные оси (рисунок 3.6), найдём

$$S_x = mV_1 - mV_0 \cos \alpha = -2\,500 \text{ (Н} \cdot \text{с)},$$

$$S_y = -mV_0 \sin \alpha = -43\,300 \text{ (Н} \cdot \text{с)}.$$

1.3.3. Теорема об изменении кинетической энергии точки.

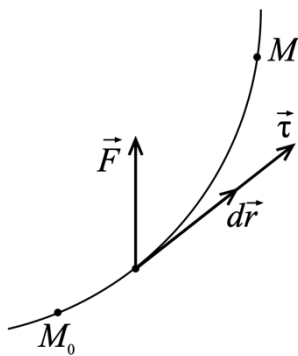
Кинетической энергией точки называется скалярная величина $\frac{mV^2}{2}$, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости.

Запишем основное уравнение динамики точки в виде

$$m d\vec{V} = \vec{F} dt,$$

умножим обе его части скалярно на $\vec{V}$ и учтем, что $\vec{V} dt = d\vec{r}$ и $m\vec{V} \cdot d\vec{V} = d\left(\frac{mV^2}{2}\right)$

. Тогда



$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (3.28)$$

Здесь $d\vec{r}$ – элементарное перемещение, которое совершает точка под действием силы $\vec{F}$ (рисунок 3.7).

Скалярная величина

$$\tilde{d}A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = F ds \cos(\vec{F}, d\vec{r}) = F_\tau ds$$

Рисунок 3.7

называется **элементарной работой силы $\vec{F}$** ($\tilde{d}$ означает, что элементарная работа не обязательно является дифференциалом некоторой функции).

Работа силы на конечном перемещении M_0M определяется как сумма соответствующих элементарных работ, т.е.

$$A_{M_0M} = \int_{M_0M} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{M_0M} F_\tau ds = \int_{M_0M} F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Единицей измерения работы в СИ является величина 1 Н·м, которая названа **джоулем**. 1 Дж = 1 Н·м.

Равенство (3.28) выражает **теорему об изменении кинетической энергии точки в дифференциальной форме**: дифференциал кинетической энергии материальной точки равен элементарной работе действующей на точку силы.

Если рассматривать конечное перемещение точки из положения M_0 , где она имела скорость $\vec{V}_0$, в положение M , где скорость точки равна $\vec{V}$, то, интегрируя равенство (3.28) в соответствующих пределах, получаем

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \int_{M_0M} \vec{F} \cdot d\vec{r} = A_{M_0M}. \quad (3.29)$$

Это есть выражение **теоремы об изменении кинетической энергии в интегральной форме**: изменение кинетической энергии точки на некотором конечном перемещении равно работе действующей на точку силы на том же перемещении.

Первые интегралы. Теорема (3.28) дает тривиальный интеграл, если $\vec{F} = 0$. В этом случае $\vec{V} = \text{const}$, что является следствием известного интеграла

теоремы об изменении количества движения. $\vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ и тогда, когда сила $\vec{F}$ все время перпендикулярна перемещению точки. Но при движении свободной точки ее траектория заранее неизвестна, поэтому проверить выполнение условия $\vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ до решения задачи невозможно.

Для получения нетривиального первого интеграла теоремы (3.28) надо, очевидно, указать такой класс сил, для которого элементарная работа является полным дифференциалом некоторой функции U :

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = dU(x, y, z). \quad (3.30)$$

Функция $U(x, y, z)$, дифференциал которой равен элементарной работе силы $\vec{F}$, называется **потенциальной** или **силовой функцией**.

Так как

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz,$$

то (3.30) эквивалентно равенствам

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad \text{или} \quad \vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} U. \quad (3.31)$$

Отсюда вытекает, что $\vec{F}$ зависит только от координат точки $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$, т.е. является **позиционной силой**. Поскольку сила $\vec{F}$ по своему смыслу является однозначной и ограниченной почти всюду функцией координат точки, то она образует **векторное поле**, которое называют **силовым**. Силовое поле, для которого существует силовая функция U , называют **потенциальным**.

Найдем, каким условиям должны удовлетворять силы поля, чтобы оно было потенциальным. Для этого возьмем от обеих частей равенств (3.31) частные производные по соответствующим координатам. Тогда, учитывая, что

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

и т.д., получаем

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0, \quad (3.32)$$

или

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 0. \quad (3.33)$$

Мы доказали, что если силовое поле $\vec{F}$ потенциально, то для него выполняется условие (3.33). Можно доказать, что это условие является также достаточным.

Таким образом, *если выполняется критерий (3.33) существования силовой функции, то сама функция определяется из (3.30) с точностью до аддитивной постоянной*:

$$U = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz) + \text{const} . \quad (3.34)$$

Работа потенциальной силы на конечном перемещении M_0M выражается формулой

$$A_{M_0M} = \int_{M_0M} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{M_0M} dU = U(M) - U(M_0),$$

из которой следует, что **работа потенциальной силы равна разности значений силовой функции в конечной и начальной точках и не зависит от формы пути, соединяющего эти точки**. В частности, если перемещение происходит по замкнутому контуру, то работа потенциальной силы на этом контуре будет равна нулю.

В потенциальном силовом поле можно ввести понятие **потенциальной энергии силы** как запаса работы, которую может совершить сила при перемещении материальной точки из занимаемого ею положения на поверхность $U(x, y, z) = 0$. Выбор этой поверхности условен и определяется выбором аддитивной постоянной в формуле (3.34). По определению потенциальная энергия Π силы $\vec{F}$ в любой точке $M(x, y, z)$ поля будет равна работе на перемещении MH , где H принадлежит поверхности $U(x, y, z) = 0$, т.е.

$$\Pi = U(H) - U(M) = -U(M),$$

или

$$\Pi(x, y, z) = -U(x, y, z).$$

Теперь можно получить нетривиальный первый интеграл теоремы об изменении кинетической энергии точки. Если действующая на точку сила потенциальна, т.е. $\vec{F} \cdot d\vec{r} = dU = -d\Pi$, то интегрируя (3.28), получаем

$$\frac{mV^2}{2} + \Pi(x, y, z) = h(\text{const}). \quad (3.35)$$

Равенство (3.35) и дает искомый **первый интеграл, который выражает закон сохранения механической энергии: при движении точки в потенциальном силовом поле ее механическая энергия, т.е. сумма кинетической энергии точки и потенциальной энергии действующей на нее силы, остается величиной постоянной**.

Значение постоянной h определяется начальными условиями. Если в некоторой точке поля (x_0, y_0, z_0) материальная точка имеет скорость $\vec{V}_0$, то

$$h = \frac{mV_0^2}{2} + \Pi(x_0, y_0, z_0).$$

Из равенства (3.35) видно, что скорость точки, движущейся в потенциальном силовом поле, зависит только от положения точки. В частности, при циклическом движении точки по замкнутому контуру скорость точки в некотором заданном положении будет одинакова для любого цикла.

Примеры потенциальных силовых полей

1. Сила, проекции которой на оси координат являются функциями только соответствующей координаты:

$$F_x = F_x(x), F_y = F_y(y), F_z = F_z(z).$$

Необходимые и достаточные условия существования силовой функции (3.32), очевидно, выполняются и по (3.34):

$$U(x, y, z) = \int (F_x(x)dx) + \int (F_y(y)dy) + \int (F_z(z)dz) + \text{const}.$$

Частным случаем рассмотренного класса сил являются постоянные силы. К ним относится **сила тяжести**, действующая в некоторой области вблизи поверхности Земли, размеры которой малы по сравнению с земным радиусом. Направляя ось Oz по вертикали вверх, будем иметь $P_x = 0, P_y = 0, P_z = -mg$, значит, $dU = P_x dx + P_y dy + P_z dz = -mgdz$, откуда $U = -mgz + \text{const}$. Полагая $U = 0$ при $z = 0$, находим силовую функцию однородного поля тяжести:

$$U = -mgz, \Pi = mgz.$$

Работа силы тяжести на перемещении M_0M будет

$$A_{M_0M} = U(M) - U(M_0) = mg(z_0 - z).$$

Если в положении M_0 точка имела скорость $\vec{V}_0$, то ее скорость в положении M можно определить по теореме об изменении кинетической энергии:

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = mg(z - z_0), \text{ откуда}$$

$$V = \sqrt{V_0^2 + 2g(z_0 - z)}. \quad (3.36)$$

Если $V_0 = 0$, то из (3.36) следует, что точка может двигаться только в направлении, при котором $z < z_0$, т.е. вниз.

2. Центральная сила, зависящая только от расстояния.

Центральной называется сила, линия действия которой во все время движения проходит через одну и ту же точку – центр силы. Выбрав в этой точке начало координат, вектор такой силы можно представить в виде

$$\vec{F} = F_r(r) \frac{\vec{r}}{r}.$$

Здесь F_r – проекция силы на направление $\vec{r}$; $F_r = \pm F$, где знак «+» соответствует отталкивающей силе, «–» – притягивающей. Элементарная работа силы $\vec{F}$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_r(r) \frac{\vec{r} \cdot d\vec{r}}{r} = F_r(r) dr = dU(r), \quad (3.37)$$

так как при дифференцировании равенства $\vec{r}^2 = r^2$ получаем $\vec{r} \cdot d\vec{r} = r dr$. Интегрируя (3.37), найдем силовую функцию поля центральной силы

$$U(r) = \int F_r(r) dr + \text{const}. \quad (3.38)$$

Рассмотрим два частных случая.

а) Если F_r линейно зависит от r : $F_r(r) = -c(r-a)$, где c и a – положительные, то такую центральную силу называют **квазиупругой**. При $r < a$ квазиупругая сила будет отталкивающей, при $r > a$ – притягивающей.

Примером квазиупругой силы является **сила упругости пружины**, один конец которой закреплен неподвижно в точке O ; a представляет длину ненапряженной пружины, $r-a$ – ее удлинение или сжатие; c называется **коэффициентом жесткости**. Из (3.38) находим $U = -\frac{c}{2}(r-a)^2 + \text{const}$. Считая $U = 0$ при $r = a$, получаем выражение для силовой функции и потенциальной энергии квазиупругой силы:

$$U = -\frac{c}{2}(r-a)^2, \quad \Pi = \frac{c}{2}(r-a)^2. \quad (3.39)$$

Работа квазиупругой силы на перемещении $M_0 M$

$$A_{M_0 M} = U(M) - U(M_0) = \frac{c}{2}[(r_0 - a)^2 - (r - a)^2].$$

Здесь $r_0 - a$ и $r - a$ – соответственно начальное и конечное удлинение (сжатие) пружины.

б) Сила, пропорциональная массе точки и обратно пропорциональная квадрату ее расстояния до притягивающего центра $F_r(r) = -\frac{\mu m}{r^2}$, называется **силой тяготения**. Для этой силы из (3.38) будем иметь $U = \frac{\mu m}{r} + \text{const}$.

Полагая $U = 0$ на бесконечности, получаем выражение силовой функции и потенциальной энергии силы тяготения:

$$U = \frac{\mu m}{r}, \quad \Pi = -\frac{\mu m}{r}. \quad (3.40)$$

Работа этой силы на перемещении $M_0 M$

$$A_{M_0 M} = U(M) - U(M_0) = \mu m \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right).$$

Очевидно, если точка приближается к притягивающему центру ($r < r_0$), то работа силы тяготения положительна.

Теорему об изменении кинетической энергии удобно применять к решению задач, если действующие на точку силы зависят от расстояния (или постоянны), а в число данных или искомых величин входят скорости и перемещения. Если движение точки происходит в потенциальном силовом поле, удобно использовать интеграл энергии.

Пример 3.11. Удерживаемую на глубине h_0 пустотелую стальную сферу отпустили. Сфера всплыла и выпрыгнула из воды (рисунок 3.8). Если бы не учитывалось сопротивление воды, то сфера должна была бы иметь при всплытии скорость, в два раза большую, чем с учетом сопротивления воды. Определить высоту, на которую выпрыгнет

сфера, если известно, что архимедова сила в три раза больше силы тяжести сферы, а сила сопротивления воды постоянна.

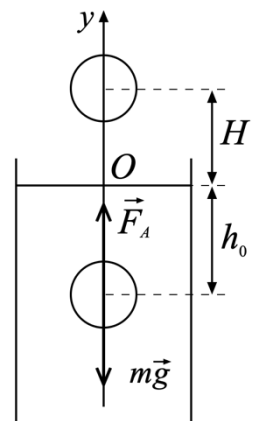


Рисунок 3.8

Решение. Уравнение движения сферы в воде, без учета сопротивления среды:

$$mV \frac{dV}{dy} = F_A - mg = 2mg \Rightarrow \int_0^V V dV = 2g \int_{-h_0}^0 dy \Rightarrow V^2 = 4gh_0.$$

Если учитывать сопротивление воды, то $V_c = \frac{1}{2}V = \sqrt{gh_0}$. Высота, на которую выпрыгнула сфера, определяется из закона сохранения энергии:

$$mgH = \frac{1}{2}mV_c^2 \Rightarrow H = \frac{1}{2}h_0.$$

Пример 3.12. На одном из участков пути состав, ведомый тепловозом, увеличивает скорость с 60 до 90 км/ч, а на другом – с 80 до 110 км/ч. Принимая

полное сопротивление движению для обоих случаев одинаковым и постоянным, определить, в каком случае будет израсходовано больше топлива.

Решение. Расход топлива пропорционален силе тяги. На первом участке $m\ddot{x}_1 = F_{m1} - F_c$, на втором: $m\ddot{x}_2 = F_{m2} - F_c$. Так как полное сопротивление движению на обоих участках одинаково, то работа, совершаемая силой тяги, идет на преодоление этого сопротивления и на сообщение составу ускорения.

$$A_{\text{тяги}1} = \frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_{01}^2}{2} = \frac{m}{2} \left(\frac{75^2}{9} - \frac{50^2}{9} \right) = \frac{m \cdot 25 \cdot 125}{18} = 173,6m;$$

$$A_{\text{тяги}2} = \frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_{02}^2}{2} = \frac{m}{2} \left(\frac{275^2}{81} - \frac{200^2}{81} \right) = \frac{m \cdot 75 \cdot 475}{18} = 219,9m.$$

Т.к. $A_{\text{тяги}2} \geq A_{\text{тяги}1}$, то и $F_{\text{тяги}2} \geq F_{\text{тяги}1}$, значит на втором участке топлива будет израсходовано больше.

Пример 3.13. Какую вертикальную силу, постоянную по величине и направлению, надо приложить к материальной точке, чтобы при падении ее на Землю с высоты, равной радиусу Земли, эта сила сообщила точке такую же скорость, как и сила притяжения к Земле, обратно пропорциональная квадрату расстояния точки до центра Земли?

Решение. Применяя закон сохранения энергии к движению точки под действием постоянной силы F , находим $FR = \frac{mV^2}{2}$. Если точка движется под

действием силы притяжения к центру Земли $F_r = -\mu \frac{m}{r^2}$, то её потенциальная энергия $\Pi = \frac{\mu m}{r}$, $\mu = gR^2$ (см. пример 3.2) и закон сохранения энергии примет

вид $\frac{mgR^2}{2R} = \frac{mV^2}{2}$, откуда находим $F = \frac{1}{2}mg = \frac{1}{2}P$.

1.3.4. Теорема об изменении момента количества движения точки.

Рассмотрим материальную точку M массы m , движущуюся под действием силы $\vec{F}$. Умножая основное уравнение динамики $m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}$ слева векторно на $\vec{r}$ и учитывая, что

$$\vec{r} \times m \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{V}) - \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{V} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{V}),$$

так как $\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{V} = 0$, получаем

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{V}) = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (3.41)$$

По определению $\vec{r} \times \vec{F}$ есть момент силы $\vec{F}$ относительно центра O . Аналогично, $\vec{r} \times m\vec{V}$ называют **моментом количества движения точки относительно центра O** .

Равенство (3.41) выражает **теорему об изменении момента количества движения материальной точки**: производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно какого-либо неподвижного центра равна моменту действующей на эту точку силы относительно того же центра.

В проекциях на оси координат равенство (3.41) запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\text{mom}_x m\vec{V}) &= \text{mom}_x \vec{F}, \quad \frac{d}{dt}(\text{mom}_y m\vec{V}) = \text{mom}_y \vec{F}, \\ \frac{d}{dt}(\text{mom}_z m\vec{V}) &= \text{mom}_z \vec{F} \end{aligned} \quad (3.42)$$

или с учетом выражений для проекций моментов на оси координат:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}m(y\dot{z} - z\dot{y}) &= yF_z - zF_y, \quad \frac{d}{dt}m(z\dot{x} - x\dot{z}) = zF_x - xF_z, \\ \frac{d}{dt}m(x\dot{y} - y\dot{x}) &= xF_y - yF_x. \end{aligned}$$

Закон площадей. Равенство $\vec{r} \times \vec{F} = 0$ выполняется в трех случаях: а) $\vec{r} = 0$, б) $\vec{F} = 0$, в) $\vec{r} \parallel \vec{F}$. Первый случай интереса не представляет, так как точка покоится в начале координат, второй приводит к закону инерции. Последний случай возможен, если линия действия силы во все время движения проходит через точку O , то есть сила является **центральной**. В этом случае (3.41) дает первый интеграл, который с учетом постоянства массы можно записать так:

$$\vec{r} \times \vec{V} = \overrightarrow{\text{const}}. \quad (3.43)$$

Так как вектор $\vec{r} \times \vec{V}$ сохраняет постоянное направление во все время движения, то векторы $\vec{r}$ и $\vec{V}$ должны принадлежать одной плоскости, т.е. *под действием центральной силы точка описывает плоскую кривую*.

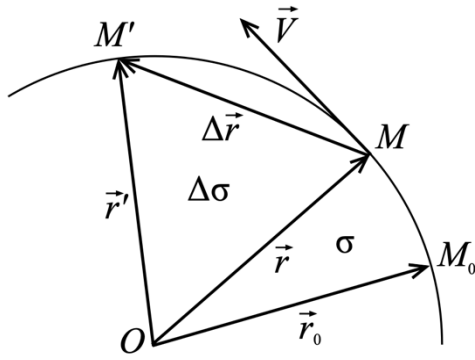


Рисунок 3.9

Модуль вектора $|\vec{r} \times \vec{V}| = |\overrightarrow{mom_O \vec{V}}|$ имеет определенный кинематический смысл. Пусть $\vec{r}$ – радиус-вектор движущейся точки M в момент времени t , $\vec{r}'$ – в момент $t + \Delta t$. За промежуток времени Δt вектор $\vec{r}$ описывает некоторую площадь OMM' , которая при малом Δt приблизительно равняется площади $\Delta OMM'$ (рисунок 3.9), т.е.

$$\Delta \sigma = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \Delta \vec{r}|.$$

Секторной скоростью $\vec{V}_\sigma$ точки M относительно центра O называется предел отношения площади, описываемой радиус-вектором точки, к соответствующему промежутку времени:

$$V_\sigma = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \sigma}{\Delta t} = \frac{d\sigma}{dt}. \quad (3.44)$$

Очевидно, что

$$2V_\sigma = |\vec{r} \times \vec{V}| = |\overrightarrow{mom_O \vec{V}}| = c. \quad (3.45)$$

Следовательно, если действующая на точку сила центральная, то $|\vec{r} \times \vec{V}| = \text{const}$ и из (3.44), (3.45) получаем

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{c}{2} t,$$

т.е. площади, описываемые радиус-вектором точки, растут пропорционально времени (**закон площадей**).

Таким образом, **если на точку действует центральная сила, то точка движется по плоской кривой, следуя закону площадей**. Этот результат и представляет собой первый векторный интеграл теоремы (3.41). Легко показать и обратное: если во все время движения точки $\vec{r} \times \vec{V} = \overrightarrow{const}$, то действующая на точку сила – центральная. Для этого достаточно продифференцировать (3.43) по времени и учесть основной закон динамики.

Теорема может давать и скалярные интегралы. Так, если $\text{mom}_x \vec{F} = 0$, то из первого уравнения (3.42) следует, что $\text{mom}_x \vec{V} = \text{const}$ или $y\dot{z} - z\dot{y} = c$.

Закон площадей является одним из главных законов небесной механики, основы которой рассматриваются в следующем параграфе.

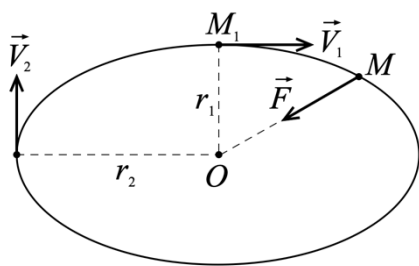


Рисунок 3.10

Пример 3.14. Точка M движется вокруг неподвижного центра под действием силы притяжения к этому центру (рисунок 3.10). Найти скорость V_2 в наиболее удаленной от центра точке траектории, если скорость в наиболее близком к нему положении $V_1 = 30$ см/с, а r_2 в пять раз больше r_1 .

Решение. Согласно закону площадей

$$\text{mom}_O \vec{V} = \text{const}, \text{ откуда следует } r_1 V_1 = r_2 V_2 \text{ и } V_2 = V_1 \frac{r_1}{r_2} = 5V_1.$$

1.3.5. Движение свободной материальной точки в поле центральных сил.

1.3.5.1. Дифференциальные уравнения движения точки под действием центральной силы. Формула Бине.

Постоянная площадей c , введенная формулой (3.45) определяется, очевидно, из начальных условий:

$$c = |\overrightarrow{\text{mom}}_O \vec{V}_0| = r_0 V_0 \sin(\vec{r}_0, \vec{V}_0).$$

В полярных координатах (рисунок 3.11)

$$|\overrightarrow{\text{mom}}_O \vec{V}| = V_\phi r = r^2 \frac{d\phi}{dt} \text{ и закон площадей примет вид}$$

$$r^2 \frac{d\phi}{dt} = c. \quad (3.46)$$

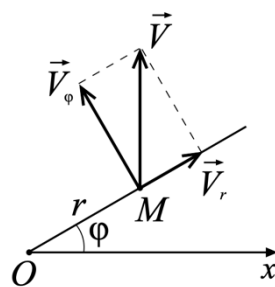


Рисунок 3.11

Используем это равенство для выражения скорости точки, движущейся под действием центральной силы. Из кинематики известно, что

$$V^2 = V_r^2 + V_\phi^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2. \quad (3.47)$$

Исключая из (3.47) время и учитывая (3.46), получим

$$V_r = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = \frac{c}{r^2} \frac{dr}{d\phi}, \quad V_\phi = r \frac{d\phi}{dt} = \frac{c}{r}.$$

Введем новую переменную

$$u = \frac{1}{r}, \quad (3.48)$$

тогда

$$\frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \quad (3.49)$$

и

$$V_r = -c \frac{du}{d\varphi}, \quad V_\varphi = cu. \quad (3.50)$$

Подставляя эти выражения в (3.47), получаем окончательную формулу:

$$V^2 = c^2 \left(\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \right). \quad (3.51)$$

Теперь обратимся к теореме об изменении кинетической энергии материальной точки

$$d \left(\frac{mV^2}{2} \right) = F_r dr.$$

Здесь $F_r = -F$ – для притягивающей силы и $F_r = F$ – для отталкивающей. Деля обе части последнего равенства на $d\varphi$, заменяя V^2 его выражением по (3.51) и учитывая связь (3.49) между $\frac{dr}{d\varphi}$ и $\frac{du}{d\varphi}$, получаем

$$\frac{c^2 m}{2} \frac{d}{d\varphi} \left(\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \right) = -\frac{F_r}{u^2} \frac{du}{d\varphi}.$$

Производя дифференцирование в левой части и сокращая на $\frac{du}{d\varphi}$, окончательно найдем

$$F_r = -mc^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \right) \quad (\text{формула Бине}). \quad (3.52)$$

В общем случае F_r является функцией $t, r, \varphi, V_r, V_\varphi$ или с учетом (3.48), (3.50) $F_r = F_r \left(t, u, \varphi, \frac{du}{d\varphi} \right)$. Присоединяя к (3.52) выражение закона площадей в виде

$$\frac{d\varphi}{dt} = cu^2, \quad (3.53)$$

получаем систему двух дифференциальных уравнений для определения $u(t)$ и $\varphi(t)$, если действующая сила F_r известна. Для определения трех постоянных интегрирования и постоянной площадей s необходимо задать начальные условия: при $t = 0$

$$r = r_0, \varphi = \varphi_0, V_r = V_{r0}, V_\varphi = V_{\varphi0}.$$

Особый интерес представляет случай, когда действующая сила не зависит явно от времени. Тогда уравнение (3.52) представляет собой дифференциальное уравнение траектории точки. Из него можно определить силу, под действием которой точка описывает данную траекторию, или, наоборот, найти траекторию, которую будет описывать точка под действием заданной центральной силы. Зная $u(\varphi)$ (или $r(\varphi)$), затем можно определить закон движения точки, интегрируя уравнение (3.53).

Полученные уравнения (3.51), (3.52) и (3.53) являются основными уравнениями **небесной механики** – раздела, в котором изучается движение небесных тел и искусственных космических объектов, моделируемых свободными материальными точками. При этом учитывается притяжение только одного космического тела на точку, движение которой изучается. Так, при изучении движения планет учитывается только притяжение их Солнцем, при изучении движения искусственных спутников принимается во внимание только притяжение их Землей. Такой подход, конечно, приближенно справедлив только внутри сферы притяжения данного небесного тела – сферы, внутри которой сила, действующая со стороны данного тела на точку, больше силы притяжения ее другими телами. Более общая задача о движении n материальных точек, взаимно притягивающихся друг к другу (**задача n тел**), связана с большими математическими трудностями, и ее точное решение не удалось пока найти даже для $n = 3$.

В простейшем случае движения точки по окружности $r = a = \text{const}$ из формулы Бине (3.52) и формулы (3.51) находим

$$F_r = -mc^2 u^3 = -\frac{mc^2}{a^3}, \quad V = cu = \frac{c}{a},$$

т.е. движение свободной материальной точки массы m по окружности радиуса a происходит с постоянной скоростью $V = V_0$ под действием постоянной притягивающей силы $\frac{mc^2}{a^3} = \frac{mV^2}{a}$.

1.3.5.2. Законы Кеплера. Закон всемирного тяготения.

Исторически законы небесной механики были заложены Иоганном Кеплером (1571–1630). Им сформулированы три закона, полученные в результате обобщения наблюдений датского астронома Тихо Браге над движением планет. Законы эти заключаются в следующем.

1. Все планеты и кометы описывают вокруг Солнца плоские орбиты, следуя закону площадей.

2. Орбиты эти являются коническими сечениями, в одном из фокусов которых находится Солнце.

3. Квадраты звездных времен обращения планет вокруг Солнца пропорциональны кубам больших полуосей их орбит.

Следует отметить, что в этом изложении все небесные тела считаются материальными точками. Законы Кеплера дают кинематическую картину движения небесных тел. На их основании Ньютон открыл закон изменения силы, действующей на планету при ее движении вокруг Солнца, и пришел к закону всемирного тяготения.

Действительно, из первого закона следует, что действующая на планету сила есть сила центральная, и ее центр находится в центре Солнца. Второй закон определяет траекторию планеты. Уравнение конического сечения в полярных координатах, полюс которых расположен в центре Солнца, имеет вид

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \text{ или } u = \frac{1 + e \cos \varphi}{p},$$

где $e = \frac{c'}{a}$ – эксцентриситет орбиты; p – параметр (в случае эллипса или

гиперболы $p = \frac{b^2}{a}$); a, b – большая и малая полуоси; $c' = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Зная траекторию, можно найти силу по формуле Бине (3.52):

$$F_r = -\frac{mc^2 u^2}{p} (-e \cos \varphi + 1 + e \cos \varphi) = -\frac{c^2 m u^2}{p}$$

Обозначая

$$\frac{c^2}{p} = \mu \text{ (постоянная Гаусса)} \quad (3.54)$$

и учитывая, что $u = \frac{1}{r}$, получаем закон изменения силы, действующей на планету со стороны Солнца:

$$F_r = -\mu \frac{m}{r^2}. \quad (3.55)$$

Из третьего закона Кеплера вытекает, что постоянная μ определяется только притягивающим центром и не зависит от движущихся в его поле тел. Действительно, так как постоянная площадей s равна удвоенной секторной скорости точки, т. е. площади, описываемой ее радиус-вектором в единицу времени, а площадь эллипса равна πab , то

$$c^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2} = \frac{4\pi^2 a^3 p}{T^2}.$$

Отсюда следует

$$\mu = \frac{c^2}{p} = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} = \text{const}. \quad (3.56)$$

Для каждого притягивающего центра существует своя гауссова постоянная.

Например, сила, с которой тело 1 притягивает тело 2, равна $F_{r1} = -\mu_1 \frac{m_2}{r^2}$, а сила,

с которой тело 2 притягивает тело 1, есть $F_{r2} = -\mu_2 \frac{m_1}{r^2}$.

По закону равенства действия и противодействия $\mu_1 \frac{m_2}{r^2} = \mu_2 \frac{m_1}{r^2}$, т.е.

$$\frac{\mu_1}{m_1} = \frac{\mu_2}{m_2} = \dots = \frac{\mu_n}{m_n} = \text{const},$$

где μ_n – гауссова постоянная какого-либо небесного тела; m_n – его масса.

Таким образом, *отношение гауссовой постоянной любого тела к его массе есть величина постоянная*. Она называется **гравитационной постоянной** f , поэтому

$$\mu_i = f m_i.$$

В системе СИ $f = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{с}^2$. Подставляя это значение μ_i – в (3.61) и обозначая $|F_{r1}| = |F_{r2}| = F$, получаем

$$F = f \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (3.57)$$

Эта формула выражает **закон всемирного тяготения**: *два тела притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними*.

Этот закон справедлив не только для тел Солнечной системы, но и вообще для всех макротел, т. е. является универсальным законом природы.

1.3.5.3. Определение траектории материальной точки, движущейся в ньютоновом поле тяготения (задача Ньютона).

Будем считать, что точка массой m движется под действием силы тяготения (3.55). Определим траекторию точки, для чего воспользуемся формулой Бине (3.52),

$$mc^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \right) = \mu m r^2,$$

которая приводит к уравнению

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{\mu}{c^2}. \quad (3.58)$$

Общее решение этого неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид

$$u = \frac{\mu}{c^2} + \alpha \cos(\varphi + \varepsilon),$$

где α, ε – константы интегрирования.

Учитывая, что по (3.54) $p = \frac{c^2}{\mu}$, и вводя новую постоянную интегрирования

$e = \alpha p$, запишем решение уравнения (3.58) в виде

$$u = \frac{1 + e \cos(\varphi + \varepsilon)}{p} \text{ или } r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi + \varepsilon)}. \quad (3.59)$$

Это есть уравнение конического сечения. Конкретный вид траектории зависит от постоянных интегрирования e, ε , т.е. от начальных условий.

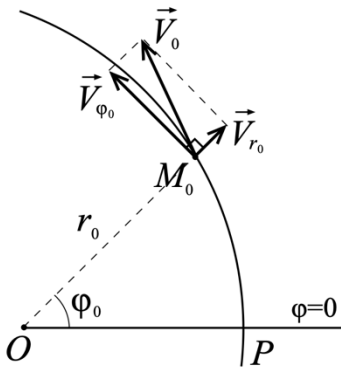


Рисунок 3.12

Если постоянную ε положить равной нулю, то $r(-\varphi) = r(\varphi)$, а это значит, что кривая (3.59) будет симметрична относительно полярной оси и при $\varphi = 0$ r будет иметь минимальное значение, т.е. φ будет отсчитываться от точки орбиты, ближайшей к притягивающему центру P (**перицентр**) (рисунок 3.12). Положение этой точки наперед неизвестно и подлежит определению из начальных условий. Таким образом, постоянная ε не определяет вида кривой, а определяет лишь ее расположение относительно полярной оси.

Выбрав указанным образом эту ось, уравнение траектории (3.59) запишем в виде

$$u = \frac{1 + e \cos \varphi}{p} \text{ или } r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}. \quad (3.60)$$

Пусть при $t = 0$ точка M_0 находится от притягивающего центра на расстоянии r_0 и имеет начальную скорость $\vec{V}_0$ (рисунок 3.12). При этом $\angle POM_0 = \varphi_0$ указывает положение перицентра по отношению к начальному положению точки и подлежит определению, т.е. неизвестными будут постоянная интегрирования e и угол φ_0 . Из (3.60) находим

$$\frac{du}{d\varphi} = -\frac{e}{p} \sin \varphi, \quad (3.61)$$

а выражая $\frac{du}{d\varphi}$ из (3.51), получаем

$$\frac{du}{d\varphi} = \pm \sqrt{\frac{V^2}{c^2} - u^2}. \quad (3.62)$$

Если равенство (3.62) рассматривать для начального положения точки, т.е. при $\varphi = \varphi_0$, то знак перед корнем надо выбирать из следующих соображений: если скорость $\vec{V}_0$ направлена так, что знаки V_{0r} , $V_{0\varphi}$, а следовательно dr_0 , $d\varphi_0$, одинаковы (как на рисунок 3.11), то, как видно из равенства (3.62) должно быть $\left(\frac{du}{d\varphi}\right)_0 < 0$ и перед корнем надо брать знак «-»; если же V_{0r} , $V_{0\varphi}$ разных знаков, то перед корнем берется знак «+».

Таким образом, начальные условия (для случая, изображенного на рисунок (3.11) будут иметь вид при $\varphi = \varphi_0$

$$u = u_0 = \frac{1}{r_0}, \quad \left(\frac{du}{d\varphi}\right)_0 = -\sqrt{\frac{V_0^2}{c^2} - u_0^2}. \quad (3.63)$$

Подставляя их в равенства (3.60) и (3.61), получаем

$$u_0 = \frac{1 + e \cos \varphi_0}{p}, \quad \frac{1}{c} \sqrt{V_0^2 - c^2 u_0^2} = \frac{e}{p} \sin \varphi_0,$$

или с учетом (3.54)

$$e \sin \varphi_0 = \frac{c}{\mu} \sqrt{V_0^2 - c^2 u_0^2}, \quad e \cos \varphi_0 = \frac{c^2}{\mu} u_0 - 1, \quad (3.64)$$

откуда определяем неизвестные φ_0 , e .

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{c \sqrt{V_0^2 - c^2 u_0^2}}{c^2 u_0^2 - \mu}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{c^2}{\mu^2} (V_0^2 - 2\mu u_0)}. \quad (3.65)$$

Если начальные условия таковы, что перед корнем в (3.62) надо брать знак «+», то изменится только знак φ_0 , величина же e останется без изменений. Эта величина, определяющая эксцентриситет траектории, зависит от знака выражения:

$$h = V_0^2 - 2\mu u_0 = \frac{2}{m} E_0, \quad (3.66)$$

где $E_0 = \frac{mV_0^2}{2} - \frac{\mu m}{r_0}$ – полная начальная энергия точки.

Если $E_0 < 0$, т.е. $V_0^2 < \frac{2\mu}{r_0}$, то $e < 1$ и траекторией точки является эллипс;

если $E_0 = 0$, т.е. $V_0^2 = \frac{2\mu}{r_0}$, то $e = 1$ и траекторией точки является парабола; если

$E_0 > 0$, т.е. $V_0^2 > \frac{2\mu}{r_0}$, то $e > 1$ и траекторией точки является гипербола.

Таким образом, если точка движется в ньютоновом поле силы притяжения к некоторому центру и влияние других притягивающих центров пренебрежимо мало, то в зависимости от знака начальной энергии точки ее траекторией будет эллипс, парабола или гипербола. Причем два последних случая возможны, если начальная скорость точки не меньше параболической

$V_{\text{пар}} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}$, называемой еще *скоростью освобождения*.

1.3.5.4. Движение в поле тяготения Земли. Искусственные спутники.

Считая Землю неподвижным притягивающим центром и пренебрегая сопротивлением воздуха (что допустимо для больших высот), применим полученные результаты к изучению движения тел в поле земного тяготения. Пусть в начальный момент времени точка массой m находится на расстоянии $R \geq R_0$ ($R_0 = 6378$ км – радиус Земли) от центра Земли и получает начальную скорость $\vec{V}_0$, направленную под углом α к горизонту (угол между направлением $\vec{V}_0$ и направлением касательной к окружности радиуса R).

Ускорение силы земного притяжения в точке M_0 будем считать равным g ($g_0 = 9,81$ м/с² – ускорение силы тяжести на поверхности Земли при $R = R_0$). Тогда постоянная площадей

$$c = \left| \overrightarrow{\text{mom}}_O \vec{V}_0 \right| = RV_0 \cos \alpha, \quad (3.67)$$

а величина гауссовой постоянной для Земли определяется из второго закона

Ньютона: $-mg = F_r = -\mu \frac{m}{R^2}$, поэтому

$$\mu = gR^2. \quad (3.68)$$

Согласно (3.60), траекторией точки является коническое сечение, а параметр p , эксцентриситет e траектории и угол φ_0 , определяемые формулами (3.54), (3.64), (3.65), с учетом выражений (3.67), (3.68) примут следующий вид:

$$p = \frac{c^2}{\mu} = V_0^2 \frac{\cos^2 \alpha}{g}; \quad (3.69)$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{V_0^2 \cos^2 \alpha}{g^2 R^2} (V_0^2 - 2gR)}; \quad (3.70)$$

$$e \sin \varphi_0 = \frac{V_0^2 \cos^2 \alpha}{gR} \operatorname{tg} \alpha; \quad e \cos \varphi_0 = \frac{V_0^2 \cos^2 \alpha}{gR} - 1. \quad (3.71)$$

Из (3.70) видно, что траекторией точки, движущейся в поле тяготения Земли, будет эллипс, если $V_0 < \sqrt{2gR}$, парабола, если $V_0 = \sqrt{2gR}$, и гипербола, если $V_0 > \sqrt{2gR}$.

Параболическая скорость, т. е. наименьшая начальная скорость, получив которую тело может покинуть поле земного тяготения, называется еще **второй космической скоростью**. Для $R = R_0$ (и соответственно $g = g_0$)

$$V_{\text{пар}} \approx 11,2 \text{ км/с.}$$

Если начальная скорость тела $V_0 < V_{\text{пар}}$, то оно или превращается в искусственный спутник Земли, или падает обратно на землю.

Искусственные спутники Земли. Космический объект искусственного или естественного происхождения, описывающий замкнутую траекторию вокруг небесного тела, называют его **спутником**. Тело, движущееся в поле земного притяжения, будет спутником Земли, если в любой точке траектории $r(\varphi) \geq r(\varphi_0)$, т.е.

$$\frac{p}{1 + e \cos \varphi} \geq \frac{p}{1 + e \cos \varphi_0},$$

а это возможно, когда $\varphi \geq \varphi_0$ для всех $\varphi \in [0; \pi]$. Последнее неравенство выполняется только при $\varphi_0 = 0$. Значит, *перигей искусственного спутника совпадает с его начальным положением M_0* .

Выражения (3.71) для $\varphi_0 = 0$ дают

$$\cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = 0, \quad \frac{V_0^2 \cos^2 \alpha}{gR} - 1 = e.$$

Так как $e > 0$, то $\cos^2 \alpha \neq 0$, следовательно, $\operatorname{tg} \alpha = 0$ и $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$. Из второго равенства (3.71) вытекает, что $e = \frac{V_0^2}{gR} - 1$ и, следовательно, $V_0^2 \geq gR$.

Таким образом, чтобы тело, брошенное с высоты H от поверхности Земли ($H = R - R_0$), превратилось в ее искусственный спутник, необходимо выполнение двух условий:

а) угол, который составляет начальная скорость с горизонтом, должен быть равен нулю ($\alpha = 0$);

б) начальная скорость V_0 должна находиться в пределах

$$\sqrt{gR} \leq V_0 < \sqrt{2gR}.$$

Если начальная скорость $V_0 = \sqrt{gR}$, то эксцентриситет орбиты, определяемый вторым равенством (3.71), равен нулю, и траекторией спутника будет окружность радиуса R . По этой причине скорость $V = \sqrt{gR}$ называют **круговой** или **первой космической скоростью**. Если $R = R_0$ и соответственно $g = g_0$, то $V_{кр} = \sqrt{g_0 R_0} \approx 7,9$ км/с. С возрастанием начальной скорости эксцентриситет орбиты увеличивается и эллипс становится все более вытянутым.

Если угол бросания $\alpha \neq 0$, то ни при какой начальной скорости V_0 тело, брошенное с поверхности Земли, не может стать ее искусственным спутником.

Пример 3.15. Точка M массой m движется около неподвижного центра O под влиянием силы F , исходящей из этого центра и зависящей только от расстояния $OM = r$. Зная, что скорость точки $V = \frac{a}{r}$, где a – величина постоянная, найти величину силы и траекторию точки.

Решение. По условию $V = au$, $u = \frac{1}{r}$. По формуле (3.51) $a^2 u^2 = c^2 (u'^2 + u^2)$, значит $u' = u \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c}$. Учитывая, что $u' = \frac{du}{d\varphi}$, разделяя переменные и интегрируя, придём к выражению $u = Ae^{\frac{a-c}{c}\varphi}$ или $r = \frac{1}{A} e^{-\frac{a-c}{c}\varphi}$, которое определяет траекторию как логарифмическую спираль (A и C – постоянные). Подставляя найденное выражение для u в формулу Бинэ (3.52), получим $F_r = -ma^2 u^3 = -\frac{ma^2}{r^3}$. Знак « $-$ » говорит о том, что искомая сила является силой притяжения.

Пример 3.16. Точка массой m описывает эллипс с полуосями a и b под действием притяжения к его центру. Когда точка находится в вершине большой

полуоси a , скорость равна V_0 . Найти силу притяжения как функцию радиуса-вектора $\vec{r}$.

Решение. Параметрические уравнения орбиты: $x = a \cos \omega t$, $y = b \sin \omega t$. В точке $(a; 0)$ $\vec{V}$ имеет составляющие $(0; V_0)$, значит $\dot{x} = -a\omega \sin \omega t = 0$ и $\cos \omega t = 1$, тогда $V_0 = b\omega$ и $\omega = \frac{V_0}{b}$.

$$\begin{cases} F_x = m\ddot{x} = -ma\omega^2 \cos \omega t = -m\omega^2 x, \\ F_y = m\ddot{y} = -mb\omega^2 \sin \omega t = -m\omega^2 y. \end{cases} \Rightarrow \vec{F} = -m\omega^2 \vec{r} = -m \frac{V_0^2}{b^2} \vec{r}.$$

Пример 3.17. Материальная точка массой m притягивается к неподвижному центру силой $F = \frac{10m}{r^3}$. При $t = 0$: $\varphi_0 = 0$, $r_0 = 1$, $V_0 = 2$ и начальная скорость составляет угол 45° с радиус-вектором точки. Найти уравнения движения точки и определить ее траекторию.

Решение. Постоянная площадей $c = m\omega_0 \vec{V}_0 = \sqrt{2}$, и формула Бине: $F_r = -mc^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \right) = -10mu^2$ приводит к уравнению $u'' - 4u = 0$, общее решение которого $u = c_1 e^{2\varphi} + c_2 e^{-2\varphi}$.

Из начальных условий при $\varphi = 0$: $u_0 = 1$, $u' = -\sqrt{\frac{V_0^2}{c^2} - u_0^2} = -1$ находим $c_1 + c_2 = 1$, $2c_1 - 2c_2 = -1$, что дает $c_1 = \frac{1}{4}$, $c_2 = \frac{3}{4}$ и $r = \frac{4}{e^{2\varphi} + 3e^{-2\varphi}}$.

Подставляя это выражение в закон площадей $r^2 \frac{d\varphi}{dt} = c = \sqrt{2}$, получим:

$$\frac{e^{4\varphi} d\varphi}{(e^{4\varphi} + 3)^2} = \frac{\sqrt{2}}{16} dt. \text{ Для интегрирования введём замену } z = e^{4\varphi} + 3, \quad dz = 4e^{4\varphi} d\varphi,$$

$$\text{тогда } \int_4^z \frac{dz}{z^2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \int_0^t dt \text{ и } z = \frac{4}{1 - \sqrt{2}t}, \quad 2\varphi = \ln \sqrt{\frac{1 + 3\sqrt{2}t}{1 - \sqrt{2}t}} = \ln \sqrt{A(t)},$$

$-2\varphi = \ln \sqrt{\frac{1}{A}}$. Возвращаясь к выражению для r : $r = \frac{4}{e^{2\varphi} + 3e^{-2\varphi}}$ и учитывая, что $e^{2\varphi} + 3e^{-2\varphi} = \sqrt{A} + 3\sqrt{\frac{1}{A}} = \frac{A+3}{\sqrt{A}}$, после преобразований получим $r = \sqrt{1 + 2\sqrt{2}t - 6t^2}$, $0 < t < \frac{\sqrt{2}}{2}$, $0 \leq r \leq 1$.

1.3.6. Динамика относительного движения материальной точки.

1.3.6.1. Уравнения относительного движения.

Если движение какой-либо системы отсчета относительно инерциальной системы не является поступательным, равномерным и прямолинейным, то такая система называется **неинерциальной**.

Пусть материальная точка M , на которую действует сила $\vec{F}$, движется по отношению к системе $Axyz$, которая в свою очередь перемещается относительно инерциальной системы $O\xi\eta\zeta$. Систему $Axyz$ считаем неинерциальной, поэтому движение точки в ней не может быть описано вторым законом Ньютона. Однако этот закон описывает абсолютное движение точки в инерциальной системе $O\xi\eta\zeta$, поэтому

$$m\vec{W}_a = \vec{F}. \quad (3.72)$$

Из кинематики известно, что

$$\vec{W}_a = \vec{W}_r + \vec{W}_e + \vec{W}_c, \quad (3.73)$$

где $\vec{W}_r = \vec{W}$ – ускорение точки в системе $Axyz$, $\vec{W}_e$ – переносное ускорение, $\vec{W}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{V}_r$ – кориолисово ускорение точки M .

Тогда (3.72) с учетом (3.73) можно записать в виде

$$m\vec{W} = \vec{F} + (-m\vec{W}_e) + (-m\vec{W}_c). \quad (3.74)$$

Называя величины

$$-m\vec{W}_e = \vec{I}_e \text{ и } -m\vec{W}_c = \vec{I}_c$$

соответственно **переносной** и **кориолисовой** силами инерции, можем представить уравнение (3.74) в виде

$$m\vec{W} = \vec{F} + \vec{I}_e + \vec{I}_c \quad (3.75)$$

Уравнение (3.75) называется **основным уравнением динамики относительного движения материальной точки**. Формально это уравнение имеет тот же вид, что и в инерциальной системе (3.72), но к действующим на точку силам добавляются переносная и кориолисова силы инерции.

Если подвижная система перемещается относительно неподвижной поступательно ($\vec{\omega} = 0$), равномерно и прямолинейно ($\vec{V}_e = \text{const}$), т.е. сама является инерциальной, то $\vec{I}_e = \vec{I}_c = 0$ и уравнение (3.75) совпадает с (3.72).

Очевидно, что в динамике относительного движения имеют место все общие теоремы, но при этом учитываются силы инерции. Следует отметить, что *работа кориолисовой силы инерции всегда равняется нулю*, $dA = -2m(\vec{\omega} \times \vec{V}) \cdot d\vec{r} = 0$ в силу коллинеарности векторов $\vec{V}$ и $d\vec{r}$.

В случае *относительного движения несвободной точки* сила $\vec{F}$ в уравнении (3.75) является равнодействующей активной силы и неизвестной реакции связи $\vec{F} = \vec{F}^a + \vec{N}$. Проекция уравнения (3.75) на оси естественного трехгранника будут иметь вид

$$m \frac{dV}{dt} = F_\tau^a + I_{e\tau}, \quad m \frac{V^2}{\rho} = F_n^a + N_n + I_{en} + I_{cn}, \quad 0 = F_b^a + N_b + I_{eb} + I_{cb}.$$

Если точка M в системе $Axyz$ неподвижна ($V = 0$ и $W = 0$), то $\vec{I}_c = 0$ и из (3.75) получаем **уравнение относительного покоя точки**:

$$\vec{F} + \vec{I}_e = 0. \quad (3.76)$$

Отметим, что если в инерциальной системе условие $\vec{F} = 0$ означает, что точка находится в покое или движется равномерно и прямолинейно, то в неинерциальной системе уравнение (3.76) означает только относительный покой. Так, если точка совершает в системе $Axyz$ равномерное прямолинейное движение ($\vec{V} = \text{const}$), то $\vec{I}_c \neq 0$ и уравнение такого движения имеет вид

$$0 = \vec{F} + \vec{I}_e + \vec{I}_c,$$

отличный от (3.76).

Пример 3.18. Относительный покой на поверхности Земли. Если учитывать суточное вращение Земли, угловая скорость которого

$$\omega = 1 \text{ об/сут} = \frac{2\pi}{86400} \approx 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1},$$

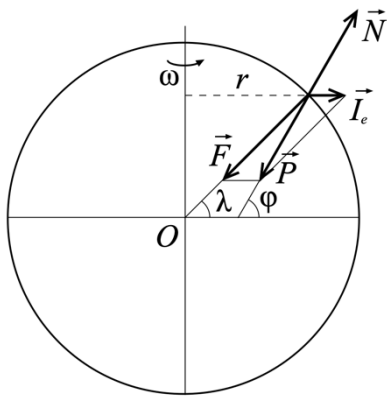


Рисунок 3.13

то системы координат, связанные с Землей, не являются инерциальными. На неподвижную материальную точку, подвешенную на нити, действуют: сила притяжения к центру Земли $\vec{F}_{\text{пр}}$, реакция нити $\vec{N}$ и переносная сила инерции $\vec{I}_e = -m(\vec{W}_e^{\tau} + \vec{W}_e^n)$. Так как $\omega = \text{const}$, то $W_e^{\tau} = \varepsilon r = 0$ и $\vec{I}_e$ перпендикулярна оси вращения Земли (рисунок 3.13). Согласно (3.76), $\vec{F}_{\text{пр}} + \vec{I}_e + \vec{N} = 0$. Обозначим $\vec{P} = \vec{F}_{\text{пр}} + \vec{I}_e$, тогда $\vec{P} + \vec{N} = 0$. Получается, что сила, с которой точка действует на нить (чашу весов) и которую мы называем весом тела, является равнодействующей силы притяжения Земли и переносной силы инерции. Так как $|\vec{I}_e| = m\omega^2 r$ является величиной малой по сравнению с $|\vec{F}_{\text{пр}}|$, то направление силы $\vec{P}$ мало отличается от направления $\vec{F}_{\text{пр}}$. Это направление силы $\vec{P}$ (линия отвеса) называется *кажущейся вертикалью*, а перпендикулярная этому направлению плоскость – *горизонтальной плоскостью*. Наибольшая разность показанных на рисунок 3.13 углов λ (геоцентрическая широта) и φ (астрономическая широта) имеет место при $\lambda = 45^\circ$ и приблизительно равняется $11'$.

Так как во всех практических расчетах равновесия тел вводится сила $\vec{P}$, определяемая взвешиванием, то в соответствующих уравнениях равновесия фактически учитывается влияние вращения Земли и никакие дополнительные поправки не требуются.

1.3.6.2. Относительное движение тел вблизи земной поверхности.

При движении вблизи поверхности Земли на тело, кроме веса $\vec{P} = \vec{F}_{\text{пр}} + \vec{I}_{\text{пер}}$ и некоторой возможной силы $\vec{F}$, действует еще кориолисова сила инерции $\vec{I}_{\text{кор}} = -2m\vec{\omega} \times \vec{V}_{\text{отн}}$. Ее действие приводит к отклонению тела от того движения, которое оно совершало бы под действием силы $\vec{F}$ в инерциальной системе.

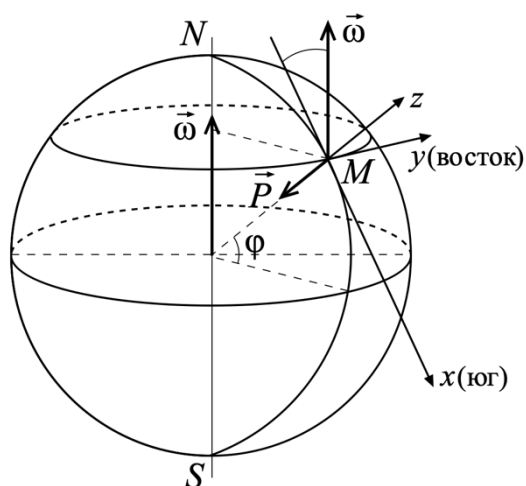


Рисунок 3.14

Направление и величина $\vec{I}_{\text{кор}}$ для Земли зависит от направления и величины относительной скорости тела и в показанной на рисунок 3.14 системе координат кориолисова сила инерции определяется соотношением

$$\vec{I}_{\text{кор}} = 2m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ -\omega \cos \varphi & 0 & \omega \sin \varphi \end{vmatrix}. \quad (3.77)$$

Рассмотрим несколько конкретных случаев движения тел вблизи земной поверхности.

1. Отклонение падающих тел от вертикали.

Пусть материальная точка свободно падает с высоты h ($h \ll R$) без начальной скорости. Тогда $\vec{F} = 0$ и относительную скорость движения можно в первом приближении считать направленной по силе $\vec{P}$. Направление $\vec{I}_{\text{кор}}$ в таком случае будет параллельным оси Oy и под действием этой силы точка при падении должна отклониться к востоку. Найдем количественную оценку этого отклонения.

Уравнения относительного движения точки в проекциях на оси выбранной системы координат с учетом (3.77) будут иметь следующий вид:

$$\ddot{x} = 2\omega \dot{y} \sin \varphi, \quad \ddot{y} = -2\omega(\dot{z} \cos \varphi + \dot{x} \sin \varphi), \quad \ddot{z} = -g + 2\omega \dot{y} \cos \varphi. \quad (3.78)$$

Совмещая начало координат с начальным положением точки, запишем начальные условия при $t = 0$:

$$x = y = z = 0, \quad \dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0. \quad (3.79)$$

Учитывая, что $\varphi = \text{const}$, и интегрируя (3.78) с учетом (3.79), получаем

$$\dot{x} = 2\omega y \sin \varphi, \quad \dot{y} = -2\omega(z \cos \varphi + x \sin \varphi), \quad \dot{z} = -gt + 2\omega y \cos \varphi. \quad (3.80)$$

Для дальнейшего интегрирования системы (3.80) используем метод последовательных приближений. Пренебрегая в (3.80) слагаемыми, содержащими множитель ω , приходим к системе

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = 0, \quad \dot{z} = -gt,$$

интегрирование которой с учетом (3.79) дает нулевое приближение:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = -\frac{1}{2}gt^2, \quad (3.81)$$

описывающее свободное падение точки без учета вращения Земли. Подставив теперь (3.81) в правые части (3.80), получим систему

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = \omega g t^2 \cos \varphi, \quad \dot{z} = -gt,$$

интегрируя которую с учетом (3.79), придем к первому приближению:

$$x = 0, \quad y = \frac{1}{3} \omega g t^3 \cos \varphi, \quad z = -\frac{1}{2} g t^2, \quad (3.82)$$

в котором появляется восточная составляющая движения. Исключив из (3.82) время, получим траекторию точки

$$y^2 = -\frac{8}{9g} \omega^2 z^3 \cos^2 \varphi.$$

Точка достигнет поверхности Земли при $z = -H$, при этом величина восточного отклонения ε становится равной $\varepsilon = \frac{2}{3} \omega \cos \varphi \sqrt{\frac{2H^3}{g}}$.

Эта величина, будучи пропорциональна ω , является малой. Так, на широте Минска ($\varphi = 53^\circ 54'$, $g = 9,82 \text{ м/с}^2$) при падении с высоты $H = 100 \text{ м}$ точка отклоняется к востоку на величину $\varepsilon = 0,013 \text{ м}$.

2. Влияние вращения Земли на движение тел вдоль земной поверхности.

Пусть материальная точка движется на поверхности Земли по гладкой горизонтальной плоскости xOy (рисунок 3.15). Кроме сил $\vec{P}$ и $\vec{I}_{\text{кор}}$, на точку

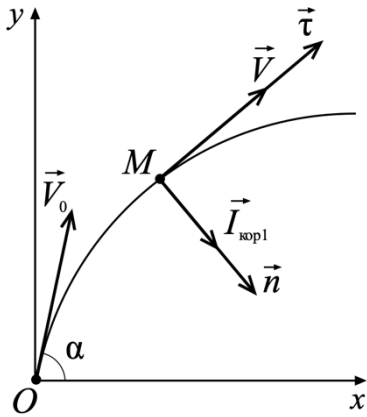


Рисунок 3.15

действует нормальная реакция $\vec{N}$ плоскости, и уравнение относительного движения примет вид

$$m\vec{W} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{I}_{\text{кор}}. \quad (3.83)$$

Так как силы $\vec{P}$, $\vec{N}$ перпендикулярны плоскости движения, то из теоремы об изменении кинетической энергии в относительном движении точки имеем

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = 0 \Rightarrow V = V_0 = \text{const}, \quad \text{т.е.} \quad \text{относительное}$$

движение происходит с постоянной по величине скоростью.

Вычисляя $\vec{I}_{\text{кор}}$ по формуле (3.77) с учетом того, что $\vec{V} = (\dot{x}, \dot{y}, 0)$, найдем

$$\vec{I}_{\text{кор}} = 2m\omega \sin \varphi (\dot{y}\vec{i} - \dot{x}\vec{j}) + 2m\omega \dot{y} \cos \varphi \vec{k} = \vec{I}_{\text{кор1}} + \vec{I}_{\text{кор2}}.$$

Составляющая $\vec{I}_{\text{кор2}} = 2m\omega \dot{y} \cos \varphi \vec{k}$ перпендикулярна плоскости xOy и не может изменить направления движения точки, $\vec{I}_{\text{кор1}} = 2m\omega \sin \varphi (\dot{y}\vec{i} - \dot{x}\vec{j})$ лежит в плоскости движения, перпендикулярна вектору $\vec{V}$ и направлена вправо от него (рисунок 3.15).

Именно под действием этой составляющей кориолисовой силы инерции точка будет отклоняться вправо от направления своего движения, если оно происходит в северном полушарии. Если же движение происходит в южном полушарии, где $\varphi < 0$ и $\sin \varphi < 0$, то направление $\vec{I}_{\text{кор1}}$ меняется на противоположное и точка под действием вращения Земли будет отклоняться влево от направления своего движения. Этим объясняется известный **закон Бэра**, согласно которому в северном полушарии реки подмывают правые берега, а в южном – левые.

Так как $\vec{I}_{\text{кор1}} \perp \vec{V}$ и направлена по нормали к траектории, то, проектируя (3.83) на ось $\vec{n}$, получаем $m \frac{V^2}{\rho} = 2m\omega \sin \varphi \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 2m\omega V \sin \varphi$, откуда найдем $\rho = \frac{V}{2\omega \sin \varphi}$.

Если перемещения таковы, что φ можно считать величиной постоянной, то траекторией точки будет дуга окружности очень большого радиуса (в силу малости ω).

Проектируя (3.83) на оси декартовых координат, получаем

$$0 = -P + N + I_{\text{кор2}}, \quad \ddot{x} = 2\omega \dot{y} \sin \varphi, \quad \ddot{y} = -2\omega \dot{x} \sin \varphi. \quad (3.84)$$

Первое из уравнений (3.84) служит для определения нормальной реакции плоскости, из двух оставшихся с учетом начальных условий при $t = 0$

$$x = y = 0, \quad \dot{x} = V_0 \cos \alpha, \quad \dot{y} = V_0 \sin \alpha$$

получим

$$\dot{x} = V_0 \cos \alpha + 2\omega y \sin \varphi, \quad \dot{y} = V_0 \sin \alpha - 2\omega x \sin \varphi. \quad (3.85)$$

Систему (3.85) также можно интегрировать методом последовательных приближений. Пренебрегая слагаемыми, содержащими ω , получаем в нулевом приближении уравнения прямолинейного равномерного движения точки без учета влияния вращения Земли:

$$x = V_0 t \cos \alpha, \quad y = V_0 t \sin \alpha. \quad (3.86)$$

Далее, подставляя (3.86) в правые части (3.85), найдем уравнение движения в первом приближении:

$$x = V_0 t \cos \alpha + \omega V_0 t^2 \sin \alpha \cdot \sin \varphi, \quad y = V_0 t \sin \alpha - \omega V_0 t^2 \cos \alpha \cdot \sin \varphi. \quad (3.87)$$

Из (3.87) следует, что за время t точка отклонится от соответствующего положения на прямой на величину

$$S = \omega V_0 t^2 \sin \varphi,$$

и это отклонение не будет зависеть от направления ее начальной скорости. Так, при скорости $V_0 = 900$ м/с, дальности $L = 18$ км и широте $\varphi = 60^\circ$ найдем

$$S = \omega V_0 \left(\frac{L}{V_0} \right)^2 \sin \varphi = \frac{\omega L^2}{V_0} \sin \varphi \cong 22,73 \text{ (м)}.$$

Пример 3.19. Точка O_1 подвеса маятника длиной l совершает прямолинейные горизонтальные гармонические колебания около неподвижной точки O по закону $s = OO_1 = a \sin pt$. Определить малые колебания маятника, считая, что в начальный момент $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = 0$.

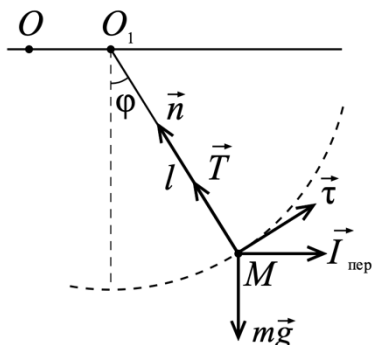


Рисунок 3.16

Решение. Переносным движением маятника является его поступательное движение вместе с точкой подвеса O_1 . $W_{\text{пер}} = \ddot{s} = -p^2 a \sin pt$, поэтому переносная сила инерции $\vec{I}_{\text{пер}} = -m\vec{W}_{\text{пер}}$ будет направлена вправо. Кориолисова сила инерции равна нулю, так как переносное движение поступательно. На точку, кроме переносной силы инерции, действует сила тяжести $m\vec{g}$ и натяжение $\vec{T}$ нити (рисунок 3.16). Проектируя уравнение относительного движения

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{I}_{\text{пер}}$$

на касательную к относительной

траектории и учитывая, что $V = l\dot{\varphi}$, получим $ml\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi + I_{\text{пер}} \cos \varphi$.

Поскольку колебания малые, $\sin \varphi \sim \varphi$, $\cos \varphi \sim 1$, то уравнение сводится к уравнению $\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = \frac{a}{l} p^2 \sin pt$, $k^2 = \frac{g}{l}$. Решение этого неоднородного линейного уравнения со специальной правой частью имеет вид:

$$\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{ap^2}{l(k^2 - p^2)} \sin pt.$$

Постоянные C_1 , C_2 определяются из заданных начальных условий и выражаются равенствами $C_1 = 0$, $C_2 = -\frac{ap^2}{kl(k^2 - p^2)}$, так что

$$\varphi = \frac{ap^2}{l(k^2 - p^2)} \left(\sin pt - \frac{p}{k} \cos kt \right).$$

Пример 3.20. Во сколько раз надо увеличить угловую скорость вращения Земли вокруг своей оси, чтобы тяжелая точка, находящаяся на поверхности Земли на экваторе, не имела бы веса? Радиус Земли $R = 6370$ км.

Решение. «Кажущийся» вес тела есть равнодействующая силы притяжения к центру Земли, равная mg на поверхности Земли, и переносной силы инерции, которая на экваторе равна $m\omega_1^2 R$. Точка будет невесомой, если $mg - m\omega_1^2 R = 0$ (т.к. эти силы направлены на экваторе в противоположные стороны), откуда следует, что $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{R}} \cong 124 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$. Учитывая, что угловая скорость вращения Земли равна $7,27 \cdot 10^{-5}$, получим: $\omega_1 \approx 17\omega$.

Пример 3.21. Тяжелая материальная точка массой m может двигаться без трения в плоскости xOz , вращающейся вокруг неподвижной вертикальной оси Oz с постоянной угловой скоростью ω . Определить относительное движение этой точки, если ее начальная скорость равна нулю. Определить также реакцию вращающейся плоскости.

Решение. Уравнение относительного движения точки:

$$m\vec{W} = m\vec{g} - m\vec{W}_{\text{пер}} - m\vec{W}_{\text{кор}} + \vec{N}, \text{ где}$$

$$\vec{W}_{\text{кор}} = 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{\text{отн}} = 2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ \dot{x} & 0 & \dot{z} \end{vmatrix}.$$

Проекция этого уравнения на оси координат:

$$m\ddot{x} = m\omega^2 x, \quad 0 = -2\omega m\dot{x} + N_y, \quad m\ddot{z} = -mg.$$

Из последнего уравнения с учетом начальных условий находим $z = z_0 - \frac{gt^2}{2}$. Решение первого уравнения $\ddot{x} - \omega^2 x = 0$ имеет вид $x = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}$, откуда с учетом начальных условий при $t = 0: x = x_0, \dot{x} = 0$, находим $C_1 = C_2 = \frac{x_0}{2}$ и определяем $x = x_0 \cosh \omega t$. Из второго уравнения системы получаем $N_y = N = 2m\omega^2 x_0 \sinh \omega t$.

1.4. Динамика механической системы.

1.4.1. Уравнения движения механической системы.

Механической системой называется совокупность материальных точек, положение и движение каждой из которых зависит от положения и движения остальных.

Пусть механическая система из n материальных точек движется относительно системы координат $Oxyz$ и $\vec{r}_k$ ($k = \overline{1, n}$) – радиус-векторы точек.

Условия (тела), накладывающие ограничения на положения и скорости точек системы при ее движении, называются **связями**.

Математической моделью связи является уравнение вида

$$f(t, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) = 0$$

(**геометрическая**, или **конечная**, связь) либо вида

$$f(t, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_n) = 0$$

(**дифференциальная**, или **кинематическая**, связь).

Если время t входит (не входит) явно в уравнения связей, то связи называются **нестационарными** (**стационарными**).

Механическая система только с геометрическими связями называется **голономной**. Если же среди связей системы имеются дифференциальные неинтегрируемые связи, то система называется **неголономной**. В дальнейшем нами будут изучаться только голономные системы.

Пусть на систему наложено l геометрических связей:

$$f_i(t, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) = 0, \quad i = \overline{1, l}.$$

Тогда из $3n$ координат точек системы независимых будет только $N = 3n - l$ координат, так как остальные l координат могут быть получены из уравнений связей. Число N независимых координат называется **числом степеней свободы голономной системы**.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек M_k с массами m_k . Силы, действующие на точки системы, можно разделить на **внешние** $\vec{F}^e$, действующие со стороны других тел, не входящих в систему, и **внутренние** $\vec{F}^i$ – силы взаимодействия между точками системы, так что сила, действующая на точку M_k

$$\vec{F}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i, \quad k = \overline{1, n}.$$

Третий закон Ньютона позволяет установить два важных свойства внутренних сил.

Выделим в системе две точки M_v и M_s (рисунок 4.1), которые действуют

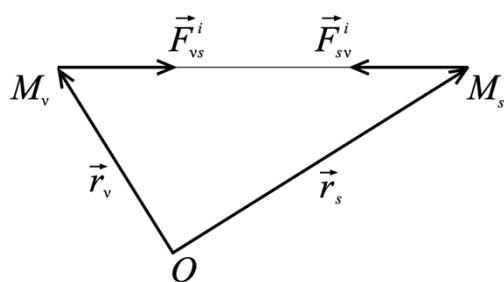


Рисунок 4.1

друг на друга соответственно с силами $\vec{F}_{sv}^i$ и $\vec{F}_{vs}^i$. По третьему закону Ньютона эти силы равны по величине и противоположно направлены, поэтому в выражении для главного вектора всех внутренних сил

$\vec{R}^i = \sum_{v=1}^n \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq v}}^n \vec{F}_{vs}^i$ находится четное число слагаемых, попарно равных нулю. Отсюда

получаем **первое свойство внутренних сил** системы: *главный вектор всех внутренних сил механической системы равен нулю.*

В выражение для главного момента всех внутренних сил относительно центра O : $\vec{M}_O^i = \sum_{v=1}^n \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq v}}^n \vec{r}_s \times \vec{F}_{vs}^i$ входят попарно слагаемые

$$\vec{r}_s \times \vec{F}_{vs}^i + \vec{r}_v \times \vec{F}_{sv}^i = (\vec{r}_s - \vec{r}_v) \times \vec{F}_{sv}^i = \overrightarrow{M_v M_s} \times \vec{F}_{sv}^i = 0,$$

так как векторы $\overrightarrow{M_v M_s}$ и $\vec{F}_{sv}^i$ коллинеарны. Отсюда следует **второе свойство внутренних сил**: *главный момент всех внутренних сил механической системы относительно произвольного центра равен нулю.*

Равнодействующую всех внешних сил, действующих на точку M_k , обозначим $\vec{F}_k^e = (X_k^e, Y_k^e, Z_k^e)$, а равнодействующую всех внутренних сил — $\vec{F}_k^i = (X_k^i, Y_k^i, Z_k^i)$. В эти выражения входят как внешние и внутренние активные силы, так и реакции внешних и внутренних связей. Для каждой точки системы можно записать уравнение Ньютона

$$m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i, \quad k = \overline{1, n} \quad \text{или} \quad \begin{cases} m_k \ddot{x}_k = X_k^e + X_k^i, \\ m_k \ddot{y}_k = Y_k^e + Y_k^i, \\ m_k \ddot{z}_k = Z_k^e + Z_k^i. \end{cases} \quad (4.1)$$

Полученная система n векторных или $3n$ скалярных дифференциальных уравнений движения системы включает $3n$ неизвестных координат точек $x_k = x_k(t)$, $y_k = y_k(t)$, $z_k = z_k(t)$, $k = \overline{1, n}$, а также неизвестные реакции внешних и внутренних связей. Характер внутренних сил, как правило, неизвестен, поэтому, как уже отмечалось в главе 3, целесообразно получить некоторые следствия уравнений (4.1), которые выявили бы общие свойства движения — **общие теоремы динамики.**

1.4.2. Теорема об изменении количества движения системы и теорема о движении центра масс.

Количеством движения системы называется *главный вектор количеств движения всех точек системы*

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^n m_k \vec{V}_k. \quad (4.2)$$

Для каждой точки системы векторное равенство (4.1) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}(m_k \vec{V}_k) = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i, \quad k = \overline{1, n}. \quad (4.3)$$

Суммируя равенства (4.3) по всем k от 1 до n и учитывая первое свойство внутренних сил, получаем

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e \quad \text{или} \quad \frac{dQ_x}{dt} = \sum_{k=1}^n X_k^e, \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum_{k=1}^n Y_k^e, \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum_{k=1}^n Z_k^e. \quad (4.4)$$

Эти равенства выражают **теорему об изменении количества движения системы в дифференциальной форме**: производная по времени от количества движения системы равна геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил.

Умножая обе части равенства (4.4) на dt и интегрируя в пределах от t_0 до t , получаем выражение теоремы в **интегральной форме**:

$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \sum_{k=1}^n \vec{S}_k^e \quad \text{или} \quad Q_x - Q_{0x} = \sum_{k=1}^n S_{kx}^e, \quad Q_y - Q_{0y} = \sum_{k=1}^n S_{ky}^e, \quad Q_z - Q_{0z} = \sum_{k=1}^n S_{kz}^e \quad (4.5)$$

изменение количества движения системы за некоторый конечный промежуток времени равно геометрической сумме импульсов всех внешних сил за тот же промежуток времени. Здесь $\vec{Q}_0$ – количество движения системы в момент t_0 ,

$$\vec{S}_k^e = \int_{t_0}^t \vec{F}_k^e dt.$$

Первые интегралы. Если главный вектор всех внешних сил системы $\vec{F}_k^e$ равен нулю, то из векторного равенства (4.4) получаем $\vec{Q} = \overrightarrow{\text{const}}$, т. е. количество движения системы, находящейся под действием только внутренних сил, не меняется со временем. Аналогично получаются скалярные первые интегралы.

Теорема о движении центра масс.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек M_k , массы которых – m_k , а радиус – векторы в некоторой выбранной системе отсчета – $\vec{r}_k$, $k = \overline{1, n}$. Из статики известно, что точку пространства, радиус-вектор которой определяется формулой

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^n m_k} \text{ или } x_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{\sum_{k=1}^n m_k}, y_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{\sum_{k=1}^n m_k}, z_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k z_k}{\sum_{k=1}^n m_k}, \quad (4.6)$$

называют **центром масс системы**, а величину $M = \sum_{k=1}^n m_k$ – **массой системы**.

Учитывая, что $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ и массы точек системы постоянны, равенство (4.2) с учетом (4.6) можно записать в виде

$$\vec{Q} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k = \frac{d}{dt} (M \vec{r}_C) = M \vec{V}_C. \quad (4.7)$$

Таким образом, *количество движения системы равно количеству движения центра масс, в предположении, что в этой точке сосредоточена масса всей системы.*

Теперь равенства (4.4) можно переписать в виде

$$M \frac{d\vec{V}_C}{dt} = M \vec{W}_C = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e \text{ или } M \ddot{x}_C = \sum_{k=1}^n X_k^e, M \ddot{y}_C = \sum_{k=1}^n Y_k^e, M \ddot{z}_C = \sum_{k=1}^n Z_k^e. \quad (4.8)$$

Равенства (4.8), будучи эквивалентны (4.4), выражают **теорему о движении центра масс**: *центр масс системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и на которую действуют все приложенные к системе внешние силы.*

Первые интегралы теоремы об изменении количества движения системы теперь можно трактовать следующим образом: *если на систему действуют только внутренние силы, т.е. $\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e = 0$, то центр масс системы движется по инерции $\vec{V}_C = \overrightarrow{\text{const}}$ (так как $\vec{Q} = \overrightarrow{\text{const}}$); если сумма проекций всех внешних сил на какую-то ось равна нулю, например $\sum_{k=1}^n X_k^e = 0$, то вдоль этой оси центр масс систем движется с постоянной скоростью $V_{Cx} = \text{const}$ (так как $Q_x = \text{const}$).*

Следует отметить важное общетеоретическое значение теоремы о движении центра масс. Она обосновывает право на существование абстрактного понятия материальной точки. Такой точкой, движение которой подчиняется второму закону Ньютона, является центр масс системы.

Пример 4.1. По горизонтальной платформе A , движущейся по инерции со скоростью V_0 , перемещается тележка B с постоянной относительной скоростью U_0 (рисунок 4.2). В

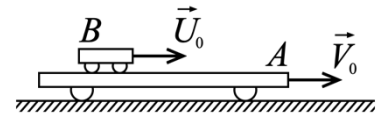


Рисунок 4.2

некоторый момент времени тележка была заторможена. Определить общую скорость V платформы с тележкой после ее остановки, если M – масса платформы, m – масса тележки.

Решение. Внешними силами, действующими на систему, платформа – тележка, являются вертикальные силы тяжести и реакция опорной плоскости на систему. Значит, теорема об изменении количества движения системы допускает скалярный первый интеграл $Q_x = \text{const}$, то есть количество движения системы до начала торможения равно её количеству движению и после того, как тележка на платформе остановилась. $MV_0 + m(V_0 + u_0) = (M + m)V$, откуда находим

$$V = V_0 + \frac{m}{M + m} u_0.$$

Пример 4.2. Грузы P_1 и P_2 , соединенные нерастяжимой нитью, переброшенной через блок A , начинают скользить по гладким боковым сторонам прямоугольного клина, опирающегося основанием BC на гладкую горизонтальную плоскость (рисунок 4.3).

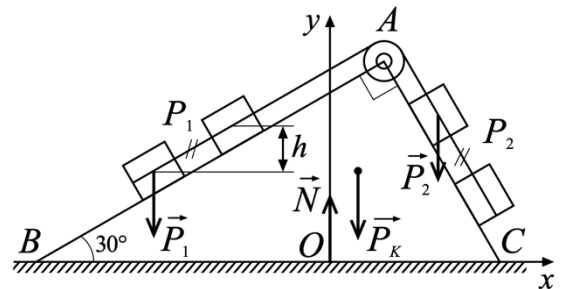


Рисунок 4.3

Найти перемещения клина при опускании

груза P_1 на высоту $h = 10 \text{ см}$. Масса клина $M = 4M_1 = 16M_2$, массой нитей и блока пренебречь.

Решение. Система состоит из клина, грузов, блока и соединительной нити. Внешними силами являются силы тяжести клина и грузов и сила реакции гладкой плоскости. Поскольку все силы вертикальны, то теорема о движении центра масс допускает первый скалярный интеграл $\dot{x}_C = \text{const}$ и так как движение начинается из состояния покоя, то $\dot{x}_C = 0$ и $x_C = \text{const}$. Выберем начало координат так, чтобы $x_C = 0$. Тогда в любой момент времени $x_1 M_1 + x_2 M_2 + x_k M_k = 0$.

При опускании груза 1 на высоту h изменятся абсциссы центров тяжести грузов и клина так, что $(x_1 + \Delta - h \text{tg} 60^\circ) M_1 + (x_2 + \Delta - h) M_2 + (x_k + \Delta) M_k = 0$, где

Δ – искомое смещение клина. Из этого равенств находим

$$\Delta = \frac{h(M_1\sqrt{3} + M_2)}{M_1 + M_2 + M_k} = \frac{h(4\sqrt{3} + 1)}{21} \cong 3,77 \text{ см}.$$

Пример 4.3. Электрический мотор массой M установлен без креплений на гладком горизонтальном фундаменте. На валу мотора под прямым углом закреплен одним концом однородный стержень длиной $2l$ и массой m , на другой конец стержня насажен точечный груз массой m_1 ; угловая скорость вала равна ω (рисунок 4.4). Определить: 1) горизонтальное движение мотора; 2) наибольшее горизонтальное усилие R , действующее на болты, если ими будет закреплен кожух мотора на фундаменте; 3) ту угловую скорость ω вала электромотора, при которой он будет подпрыгивать над фундаментом, не будучи к нему прикреплен болтами.

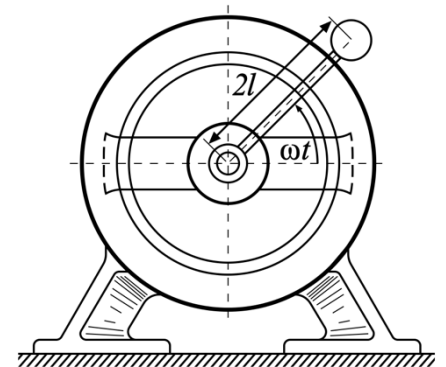


Рисунок 4.4

Решение. 1) Если мотор установлен на фундаменте без креплений, то действующими на систему внешними силами будут вертикальные силы тяжести кожуха, вращающихся частей мотора и сила реакции фундамента. Как и в предыдущем примере можно положить $x_C = 0$, так что

$$x_k M + (x_k + l \cos \omega t) m + (x_k + 2l \cos \omega t) m_1 = 0, \quad \text{откуда} \quad \text{находим}$$

$$x_k = -\frac{l(m + 2m_1)}{M + m + m_1} \cos \omega t, \quad \text{то есть мотор будет совершать гармонические}$$

колебания с амплитудой $\frac{l(m + 2m_1)}{M + m + m_1}$ и частотой ω .

2) Если кожух мотора закреплен болтами, то возникает горизонтальная сила реакции $\vec{R}$, и первый интеграл теоремы не будет иметь места. В проекции на горизонталь теорема о движении центра масс будет иметь вид:

$$(M + m + m_1) \ddot{x}_C = R_x, \quad \text{где} \quad x_C = \frac{x_k M + (x_k + l \cos \omega t) m + (x_k + 2l \cos \omega t) m_1}{M + m + m_1}.$$

Но теперь $x_k = \text{const}$, так как кожух мотора неподвижен и, следовательно $R_x = -l\omega^2(m + 2m_1) \cos \omega t$, значит, наибольшее горизонтальное усилие, действующее на болты, $R = l\omega^2(m + 2m_1)$.

3) Проектируем теорему о движении центра масс на вертикальную ось: $(M + m + m_1) \ddot{y}_C = N - (M + m + m_1)g$, где

$y_C = \frac{y_k M + (y_k + l \sin \omega t) m + (y_k + 2l \sin \omega t) m_1}{M + m + m_1}$. Учитывая, что $y_k = \text{const}$, находим

$$N = (M + m + m_1)g - l\omega^2(m + 2m_1)\sin \omega t.$$

Условие отрыва мотора от фундамента $N=0$ приводит к уравнению $\sin \omega t = \frac{(M + m + m_1)g}{l\omega^2(m + 2m_1)}$, которое имеет решение, если правая часть не превосходит 1, т.е. $\omega \geq \sqrt{\frac{(M + m + m_1)g}{l(m + 2m_1)}}$.

Пример 4.4. Человек весом P с гирей весом p в руках прыгает под углом α к горизонту со скоростью V_0 и, достигнув наибольшей высоты, бросает гирю назад с относительной скоростью V_0 . Насколько увеличится благодаря этому длина прыжка?

Решение. Уравнения движения человека с гирей (см. пример 2.2) $x = V_0 t \cos \alpha$, $y = V_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$. Максимальная высота подъема достигается при $T = \frac{V_0 \sin \alpha}{g}$ и равняется $H = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$, а длина прыжка была бы $x(2T) = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$.

В момент отбрасывания гири сохраняется главный вектор количества движения в проекции на ось Ox и $(P + p)V_0 \cos \alpha = PV + p(V - V_0)$, значит, скорость человека после отбрасывания гири становится равной $V = \frac{(P + p)V_0 \cos \alpha + pV_0}{P + p}$. Дальнейшее движение человека описывается

уравнениями $x = Vt$, $y = H - \frac{gt^2}{2}$ и длится промежуток времени

$t_n = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \frac{V_0 \sin \alpha}{g}$. За это время человек преодолевает расстояние

$x(t_n) = \frac{(P + p)V_0 \cos \alpha + pV_0}{P + p} \cdot \frac{V_0 \sin \alpha}{g}$, и результирующее горизонтальное

перемещение человека $L = x(T) + x(t_n) = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{2g} + \frac{V_0^2 \sin \alpha ((P + p) \cos \alpha + p)}{g(P + p)}$.

Таким образом, $\Delta l = L - x(2T) = \frac{V_0^2 \sin \alpha}{g} \cdot \frac{p}{P + p}$.

1.4.3. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы.

1.4.3.1. Кинетическая энергия системы и ее вычисление.

Кинетической энергией системы называют сумму кинетических энергий всех точек системы:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k V_k^2. \quad (4.9)$$

Пусть рассматриваемая механическая система движется относительно некоторой системы отсчета $Sx'y'z'$, связанной с центром масс C , которая, в свою очередь, движется поступательно со скоростью $\vec{V}_C$ относительно основной инерциальной системы $Oxyz$. По теореме о сложении скоростей

$$\vec{V}_k = \vec{V}_C + \vec{V}'_k,$$

где $\vec{V}'_k$ - скорость точки M_k по отношению к подвижной системе. Тогда

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k V_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k (\vec{V}_C + \vec{V}'_k)^2 = \frac{1}{2} V_C^2 \sum_{k=1}^n m_k + \vec{V}_C \cdot \sum_{k=1}^n m_k \frac{d\vec{r}'_k}{dt} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k V_k'^2.$$

$$\text{Но } \vec{V}_C \cdot \sum_{k=1}^n m_k \frac{d\vec{r}'_k}{dt} = \vec{V}_C \cdot \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^n m_k \vec{r}'_k \right) = \vec{V}_C \cdot \frac{d}{dt} (M \vec{r}'_C) = \vec{V}_C \cdot M \vec{V}'_C = 0,$$

поскольку центр масс системы неподвижен относительно системы $Sx'y'z'$ и значит $\vec{V}'_C = 0$. Следовательно

$$T = \frac{1}{2} M V_C^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k V_k'^2. \quad (4.10)$$

Равенство (4.10) называют **теоремой Кенига**: кинетическая энергия системы равна кинетической энергии центра масс, в предположении, что в нем сосредоточена масса всей системы, сложенной с кинетической энергией системы в ее движении относительно **репера Кенига** (подвижной системы отсчета, перемещающейся вместе с центром масс поступательно).

Найдем выражения для кинетической энергии неизменяемой системы при различных случаях движения.

Поступательное движение. Скорости всех точек системы одинаковы:

$$\vec{V}_k = \vec{V}_C, \quad k = \overline{1, n} \quad \text{и} \quad T = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n m_k \right) V_C^2 = \frac{1}{2} M V_C^2. \quad (4.11)$$

Вращение вокруг неподвижной оси. Если вращение происходит вокруг оси Ox с угловой скоростью ω , то $V_k = \omega h_k$, $k = \overline{1, n}$ и $T = \frac{1}{2} \omega^2 \left(\sum_{k=1}^n m_k h_k^2 \right)$.

Величина $\sum_{i=1}^n m_i h_i^2$, равная сумме произведений массы каждой точки системы на квадрат ее расстояния до некоторой оси, называется **моментом инерции системы** относительно этой оси.

Обозначив

$$\sum_{i=1}^n m_i h_i^2 = I_x, \quad (4.12)$$

получим

$$T = \frac{1}{2} I_x \omega^2. \quad (4.13)$$

Заметим, что формула (4.13) остается справедливой и в случае, когда ось Ox является мгновенной осью вращения, так как равенство $V_k = \omega h_k$ имеет место и для этого случая.

Формула (4.12), как и понятие момента инерции, играет важную роль в динамике твердого тела. В этом случае конечная сумма в выражении (4.12) должна заменяться интегралом по объему.

Плоскопараллельное движение. Для вычисления кинетической энергии можно применить теорему Кенига, учитывая, что $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k V_k'^2 = \frac{1}{2} I_{Cx} \omega^2$, где I_{Cx} – момент инерции системы относительно оси, перпендикулярной основной плоскости и проходящей через центр масс так, что

$$T = \frac{1}{2} M V_C^2 + \frac{1}{2} I_{Cx} \omega^2. \quad (4.14)$$

Сферическое движение. Так как движение тела с одной закрепленной точкой O в каждый момент времени представляет собой мгновенное вращение вокруг оси, проходящей через эту точку, то

$$T = \frac{1}{2} I_{Ox} \omega^2, \quad (4.15)$$

где I_{Ol} - момент инерции относительно мгновенной оси вращения. Величина I_{Ol} меняется в процессе движения, так как меняется положение в теле мгновенной оси вращения.

Общий случай движения. Так как по теореме Шалля движение неизменяемой системы относительно подвижных осей $Cx'y'z'$, перемещающихся вместе с центром масс поступательно, есть мгновенное вращение вокруг оси, проходящей через точку C , то $\sum_{k=1}^n m_k V_k'^2 = I_{Cl} \omega^2$ и теорема Кенига дает

$$T = \frac{1}{2} M V_C^2 + \frac{1}{2} I_{Cl} \omega^2. \quad (4.16)$$

Формулы (4.11), (4.13) – (4.16), полученные для неизменяемой системы, справедливы и для абсолютно твердого тела с той лишь разницей, что при вычислении моментов инерции относительно оси суммирование заменяется интегралом по объему тела.

Пример 4.5. Вычислить осевые моменты инерции некоторых твердых тел.

а) *Момент инерции однородного тонкого кольца относительно оси Ox , проходящей через его центр перпендикулярно плоскости кольца.*

Предположим, что кольцо радиуса R имеет массу m и сечение весьма малой площади. Разобьем кольцо на малые элементы массой dm . Так как расстояния от любого выделенного элемента кольца до оси Ox одинаковы и равны R , то момент инерции выделенного элемента $dI_x = R^2 dm$, а

$$I_x = R^2 \int_m dm = mR^2. \quad (4.17)$$

б) *Момент инерции однородной круглой пластины малой толщины относительно оси Ox , проходящей через ее центр O и перпендикулярной ее плоскости (рисунок 4.5).*

Считаем, что пластинка радиуса R имеет массу m . Выделим в пластинке элементарное кольцо радиусом r и шириной dr . Масса кольца $dm = \rho 2\pi r dr$, где

$\rho = \frac{m}{\pi R^2}$ – плотность пластинки. Тогда

$$dI_x = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r dr r^2 = \frac{2m}{R^2} r^3 dr \text{ и}$$

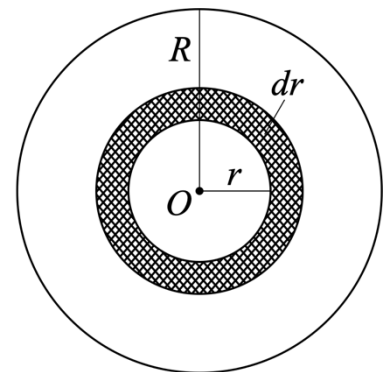


Рисунок 4.5

$$I_x = \int_0^R \frac{2m}{R^2} r^3 dr = \frac{1}{2} m R^2. \quad (4.18)$$

в) Момент инерции однородного тонкого стержня относительно перпендикулярной оси, проходящей через конец стержня (рисунок 4.6).

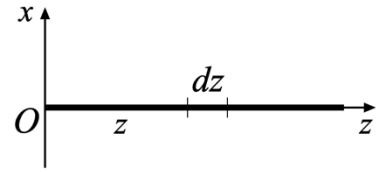


Рисунок 4.6

Стержень длиной l и массой m , имеющий постоянное малое сечение, разобьем на малые по длине элементы dz . Тогда $dI_x = \rho z^2 dz$, где $\rho = \frac{m}{l}$ и

$$I_x = \int_0^l \frac{m}{l} z^2 dz = \frac{1}{3} m l^2. \quad (4.19)$$

1.4.3.2. Теорема об изменении кинетической энергии системы.

Запишем теорему об изменении кинетической энергии для каждой точки механической системы:

$$d\left(\frac{m_k V_k^2}{2}\right) = \vec{F}_k^e \cdot d\vec{r}_k + \vec{F}_k^i \cdot d\vec{r}_k, \quad k = \overline{1, n}. \quad (4.20)$$

Складывая почленно уравнения (4.20) и учитывая (4.9), получаем

$$dT = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e \cdot d\vec{r}_k + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i \cdot d\vec{r}_k. \quad (4.21)$$

Равенство (4.21) выражает **теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме**: дифференциал кинетической энергии системы равен сумме элементарных работ всех действующих на систему внешних и внутренних сил.

Записывая для каждой точки системы теорему об изменении кинетической энергии в конечной форме

$$\frac{m_k V_k^2}{2} - \frac{m_k V_{k0}^2}{2} = A_k^e + A_k^i, \quad k = \overline{1, n}$$

и суммируя все полученные равенства, найдем

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^e + \sum_{k=1}^n A_k^i. \quad (4.22)$$

Равенство (4.22) выражает **теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме**: изменение кинетической энергии системы при ее перемещении из одной конфигурации в другую равно сумме работ всех действующих на систему внешних и внутренних сил на этом перемещении.

Сформулированная теорема характеризует абсолютное движение системы по отношению к основной инерциальной системе отсчета. Используя (4.10) и теорему о движении центра масс можно доказать, что при движении системы относительно репера Кенига теорема об изменении кинетической энергии будет иметь вид, аналогичный (4.21):

$$d\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n m_k V_k'^2\right) = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e \cdot d\vec{r}_k' + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i \cdot d\vec{r}_k'.$$

Это значит, что *дифференциал кинетической энергии системы в ее движении относительно репера Кенига равен сумме элементарных работ всех внешних и внутренних сил на перемещениях их точек приложения относительно центра масс.*

Если система неизменяема, то внутренние силы работы не совершают и (4.21) примет вид

$$dT = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e \cdot d\vec{r}_k, \quad (4.23)$$

т.е. *дифференциал кинетической энергии неизменяемой системы равен сумме элементарных работ всех внешних сил.*

Первые интегралы. Если система неизменяема и внешние силы потенциальны, т.е.

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e \cdot d\vec{r}_k = dU^e = -d\Pi^e,$$

то теорема об изменении кинетической энергии допускает первый интеграл. Действительно, равенство (4.23) перепишется в виде $d(T + \Pi^e) = 0$, откуда получим

$$E = T + \Pi^e = \text{const.} \quad (4.24)$$

В общем случае, когда внутренние силы зависят только от расстояний между точками системы, а внешние силы потенциальны, первый интеграл представляет собой *закон сохранения полной механической энергии системы.*

$$E = T + \Pi^e + \Pi^i = \text{const.} \quad (4.25)$$

Механическую систему, для которой имеет место интеграл энергии, называют *консервативной*.

Пример 4.6. Планетарный механизм, расположенный в горизонтальной плоскости, приводится в движение кривошипом OA , соединяющим оси трех

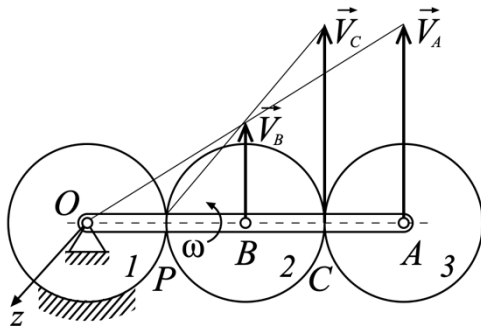


Рисунок 4.7

одинаковых колес 1, 2, 3 массой M и радиусом R каждое (рисунок 4.7). Кривошип массой m вращается с угловой скоростью ω . Вычислить кинетическую энергию механизма, считая колеса однородными дисками, а кривошип – однородным стержнем. Чему равна работа пары сил, приложенной к третьему колесу?

Решение. В данном механизме кривошип совершает вращательное движение, колёса 2 и 3 – плоскопараллельные движения.

Согласно формулам (4.13), (4.14):

$$T_2 = \frac{1}{2} M V_B^2 + \frac{1}{2} I_{2Bz} \omega^2, \quad T_3 = \frac{1}{2} M V_A^2 + \frac{1}{2} I_{3Az} \omega^2,$$

$$T_{кр} = \frac{1}{2} I_{Oz} \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m (4R)^2 \omega^2 = \frac{8}{3} m R^2 \omega^2.$$

Так как точка P касания колес 1 и 2 является мгновенным центром скоростей (МЦС) для колеса 2, то $\omega_2 = \frac{V_B}{BP} = \frac{2R\omega}{R} = 2\omega$ (рисунок 4.7). Положение МЦС для колеса 3 нам неизвестно, но можно найти скорости двух точек A и C этого колеса: $V_A = \omega OA = 4\omega R$, $V_C = \omega_2 PC = 4\omega R$. Так как скорости двух точек колеса 3 одинаковы в любой момент времени, то колесо 3 совершает поступательное движение и $\omega_3 = 0$. Так как $I_{2Bz} = I_{3Az} = \frac{1}{2} m R^2$, получаем окончательно: $T = T_{кр} + T_2 + T_3 = \frac{1}{3} R^2 \omega^2 (8m + 33M)$.

Работа пары сил с моментом $M(\varphi)$, вычисляется по формуле

$$A_M = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M(\varphi) d\varphi. \text{ Но так как колесо 3 движется без вращения, то работа пары}$$

приложенных к нему сил равна нулю.

Пример 4.7. Однородный стержень OA длиной l и весом P может вращаться вокруг горизонтальной неподвижной оси O , проходящей через его конец перпендикулярно к плоскости рисунка. Спиральная пружина с коэффициентом упругости C одним концом скреплена с неподвижной осью O , а другим – со стержнем. Стержень находится в покое в вертикальном положении, причем пружина при этом не деформирована (рисунок 4.8). Какую скорость надо сообщить концу A стержня для того, чтобы он отклонился от вертикали на угол 60° ?

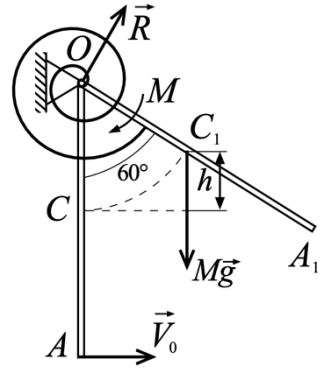


Рисунок 4.8

Решение. На стержень действуют: сила тяжести $\vec{P}$, приложенная в середине стержня, пара сил, создаваемая спиральной пружиной, момент которой равен $-c\varphi$, и реакция шарнира в точке подвеса стержня, но эта сила работы не совершает. Учитывая, что внутренние силы работы также не совершают по (4.22) будем иметь $T - T_0 = A_p - A_M$, $T = 0$. Так как стержень совершает вращательное

движение, то $T_0 = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Pl^2}{3g} \cdot \frac{V_A^2}{l^2} = \frac{P}{6g}V_A^2$. При повороте стержня на 60° его центр масс поднимется на высоту, равную $h = \frac{l}{4}$ значит $A_p = -P\frac{l}{4}$. Работа пары

$$A_M = -c \int_0^{\pi/3} \varphi d\varphi = -c \frac{\pi^2}{18}, \text{ так что } -\frac{P}{6g}V_A^2 = -P\frac{l}{4} - c \frac{\pi^2}{18} \text{ и } V_A = \sqrt{\frac{g(9Pl + 2c\pi^2)}{6P}}.$$

Пример 4.8. Однородный стержень AB длиной $2a$ падает, скользя концом

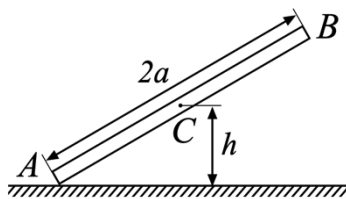


Рисунок 4.9

по гладкому горизонтальному полу. В начальный момент стержень занимал вертикальное положение и находился в покое. Определить скорость центра тяжести стержня в зависимости от его высоты h над полом (рисунок 4.9).

Решение. На стержень действуют только сила тяжести $m\vec{g}$ и нормальная реакция плоскости, которая работы не совершает. Имеет место закон сохранения энергии (4.24), согласно которому $T_0 + \Pi_0 = T_1 + \Pi_1$, где индекс 0 относится к начальному положению стержня, 1 – к положению, когда его центр тяжести находится на высоте h . Очевидно, что $T_0 = 0$, $\Pi_0 = mga$, $\Pi_1 = mgh$. Так

как стержень совершает плоское движение, то $T_1 = \frac{1}{2}mV_C^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$.

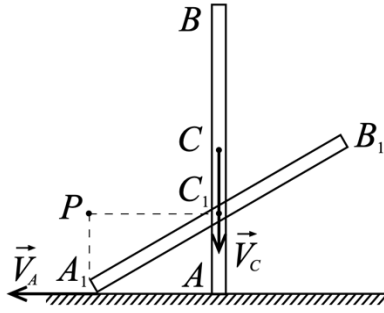


Рисунок 4.10

Поскольку действующие на стержень силы вертикальны и в начальный момент стержень находился в покое, то его центр масс остается во все время движения на одной вертикали и мгновенным центром скоростей будет точка P (рисунок 4.10).

Значит

$$\omega = \frac{V_C}{CP} = \frac{V_C}{\sqrt{a^2 - h^2}} \quad \text{и}$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} m (2a)^2 \frac{V_C^2}{a^2 - h^2} = \frac{m V_C^2}{6} \cdot \frac{4a^2 - 3h^2}{a^2 - h^2}.$$

(Момент инерции стержня относительно перпендикулярной оси, проходящей через его центр масс равен $\frac{1}{12} m l^2$). Подставляя все найденные величины в

выражение закона сохранения энергии, получим $mga = \frac{m V_C^2}{6} \cdot \frac{4a^2 - 3h^2}{a^2 - h^2} + mgh$,

откуда находим $V_C = (a - h) \sqrt{\frac{6g(a + h)}{4a^2 - 3h^2}}$.

1.4.4. Теорема об изменении кинетического момента системы.

1.4.4.1. Кинетический момент системы и его вычисление.

Кинетическим моментом системы относительно центра O называется главный момент количеств движения всех точек системы относительно этого центра:

$$\vec{K}_O = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{V}_i. \quad (4.26)$$

Кинетический момент системы относительно центра масс C найдется, очевидно, по формуле $\vec{K}_C = \sum_{i=1}^n \vec{r}'_i \times m_i \vec{V}_i$. Здесь $\vec{r}'_i = \overrightarrow{CM_i}$ – радиус-векторы точек

системы относительно центра C . Поскольку $\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{r}'_i$, то

$$\vec{K}_O = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_C + \vec{r}'_i) \times m_i \vec{V}_i = \vec{r}_C \times \sum_{i=1}^n m_i \vec{V}_i + \sum_{i=1}^n \vec{r}'_i \times m_i \vec{V}_i = \vec{r}_C \times \vec{Q} + \vec{K}_C, \quad (4.27)$$

где $\vec{Q}$ – главный вектор количества движения системы.

Учитывая, что $\vec{Q} = M \vec{V}_C$ из (4.27) получаем

$$\vec{K}_O = \vec{r}_C \times M\vec{V}_C + \vec{K}_C, \quad \vec{K}_C = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i' \times m_i \vec{V}_i. \quad (4.28)$$

Если с центром масс системы связать репер Кенига, то по теореме о сложении скоростей $\vec{V}_i = \vec{V}_C + \vec{V}_i'$, где $\vec{V}_i'$ - скорость точки M_i по отношению к системе $Sx'y'z'$. Тогда

$$\vec{K}_C = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i' \times m_i (\vec{V}_C + \vec{V}_i') = \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i' \right) \times \vec{V}_C + \sum_{i=1}^n \vec{r}_i' \times m_i \vec{V}_i' = \vec{K}_C',$$

так как $\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i' = M\vec{r}_C' = 0$ (центр масс в системе $Sx'y'z'$ совпадает с началом координат). Формулу (4.28) можно переписать так:

$$\vec{K}_O = \vec{r}_C \times M\vec{V}_C + \vec{K}_C'. \quad (4.29)$$

Таким образом, *кинетический момент системы относительно какого-либо неподвижного центра равен моменту относительно этого центра количества движения центра масс в предположении, что в нем сосредоточена масса всей системы, сложенному с кинетическим моментом системы относительно центра масс в ее движении по отношению к подвижной системе отсчета (реперу Кенига), перемещающейся вместе с центром масс поступательно.*

Как обычно, **кинетическим моментом системы относительно некоторой оси** называют проекцию на эту ось вектора $\vec{K}_O$, где O – произвольная точка оси. Например,

$$K_x = (\vec{K}_O)_x = \sum_{i=1}^n \text{mom}_x(m_i \vec{V}_i) = \sum_{i=1}^n m_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i).$$

Пример 4.9. Вычислить кинетический момент неизменяемой системы, вращающейся вокруг заданной неподвижной оси Ox с угловой скоростью ω .

Решение. В этом случае $V_i = \omega h_i$ и $\text{mom}_x(m_i \vec{V}_i) = h_i m_i V_i = \omega m_i h_i^2$. Значит,

$$K_x = \sum_{i=1}^n \text{mom}_x(m_i \vec{V}_i) = \omega \sum_{i=1}^n m_i h_i^2 = I_x \omega, \quad (4.30)$$

где I_x – момент инерции системы относительно оси Ox , введенный формулой (4.12).

1.4.4.2. Теорема об изменении кинетического момента.

Запишем теорему об изменении момента количества движения (3.45) для каждой точки системы, учитывая, что $\vec{F}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i$:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k) = \vec{r}_k \times \vec{F}_k^e + \vec{r}_k \times \vec{F}_k^i, \quad k = \overline{1, n}.$$

Суммируя все эти равенства и учитывая (4.26), а также второе свойство внутренних сил, получаем

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k^e. \quad (4.31)$$

Равенство (4.31) выражает **теорему об изменении кинетического момента системы**: производная по времени от кинетического момента системы относительно некоторого неподвижного центра равна сумме моментов всех действующих на систему внешних сил относительно того же центра.

В проекциях на оси координат (4.31) запишется в виде

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum_{k=1}^n \text{mom}_x \vec{F}_k^e, \quad \frac{dK_y}{dt} = \sum_{k=1}^n \text{mom}_y \vec{F}_k^e, \quad \frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^n \text{mom}_z \vec{F}_k^e. \quad (4.32)$$

Первые интегралы. Теорема дает **первый векторный интеграл**, если сумма моментов всех внешних сил относительно центра O равна нулю. В этом случае из (4.31) следует, что кинетический момент системы относительно центра O есть вектор постоянный: $\vec{K}_O = \overrightarrow{\text{const}}$.

Если сумма моментов всех внешних сил относительно некоторой оси равна нулю, например $\sum_{k=1}^n \text{mom}_x \vec{F}_k^e = 0$, то теорема дает **скалярный первый интеграл**: из первого уравнения (4.32) вытекает, что кинетический момент системы относительно оси Ox постоянен, т.е. $K_x = \text{const}$.

Теорема (4.31) сформулирована относительно неподвижного центра O . Легко доказать, что если за центр моментов взять центр масс C системы, то из (4.31) и (4.29) с учетом того, что $K_C = \vec{K}'_C$ можно получить

$$\frac{d\vec{K}'_C}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{r}'_k \times \vec{F}_k^e, \quad (4.33)$$

т.е. при движении системы относительно центра масс теорема об изменении кинетического момента имеет точно такое же выражение, как если бы центр масс был неподвижной точкой.

Применяя последнее равенство (4.32) к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси Oz , и учитывая, что кинетический момент тела относительно оси вращения определяется формулой (4.30), $K_z = I_z \omega$ и I_z есть величина постоянная, получаем

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = \sum_{k=1}^n \text{mom}_z \vec{F}_k^e. \quad (4.34)$$

Это уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Пример 4.10. Вычислить кинетический момент планетарной передачи, описанной в примере 4.6 (рисунок 4.7) относительно неподвижной оси, совпадающей с осью вращения кривошипа OA .

Решение. Кинетический момент системы равен сумме кинетических моментов всех ее тел. Кривошип совершает вращательное движение и по формуле (4.30) $K_{z_{кр}} = \frac{16}{3} mR^2 \omega$. Для вычисления кинетического момента колес 2 и 3 воспользуемся формулой (4.29). Все кинематические характеристики тел и точек системы вычислены в примере 4.6, поэтому

$$K_{2z} = 2MRV_B + I_{2Bz} \omega_2 = 4MR^2 \omega + \frac{1}{2} MR^2 2\omega = 5MR^2 \omega,$$

$$K_{3z} = 4MRV_A + I_{3Az} \omega_3 = 16MR^2 \omega.$$

$$\text{Суммарный кинетический момент системы равен } K_{Oz} = \left(21M + \frac{16}{3} m \right) R^2 \omega.$$

Пример 4.11. Тележка поворотного подъемного крана движется с постоянной скоростью V относительно стрелы (рисунок 4.11). Мотор, вращающий кран, создает в период разгона постоянный момент m_0 . Определить угловую скорость ω вращения крана в зависимости от расстояния x тележки до оси вращения AB , если вес тележки с грузом равен P , I – момент инерции крана (без тележки) относительно оси вращения; вращение начинается в момент, когда тележка находится на расстоянии x_0 от оси AB .

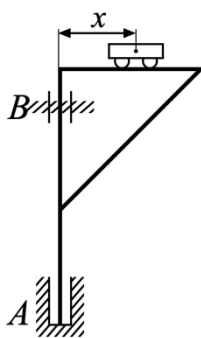


Рисунок 4.11

Решение. Действующими на систему внешними силами являются силы тяжести крана и тележки, силы реакции опорных подшипников в точках A и B , и вращающий момент мотора m_0 относительно оси AB , который и будет единственным ненулевым моментом относительно этой оси. Согласно последней формуле

$$(4.32): \frac{dK_z}{dt} = m_0. \text{ Кинетический момент системы складывается}$$

из кинетического момента крана $I\omega$ и момента количества движения тележки, скорость которой равна векторной сумме относительной скорости V и переносной скорости, равной по величине ωx .

Относительная скорость дает нулевой момент относительно оси AB , так как пересекает эту ось, значит, момент количества движения тележки относительно оси равен $\frac{P}{g}\omega x^2$ и $K_z = \left(I + \frac{P}{g}x^2\right)\omega$. Тогда $\frac{dK_z}{dt} = \frac{dK_z}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = V \frac{d}{dx} \left(\left(I + \frac{P}{g}x^2\right)\omega \right)$, откуда $Vd \left(\omega \left(I + \frac{P}{g}x^2\right) \right) = m_0 dx$.

Интегрируя это равенство в пределах от x_0 до x находим искомую угловую скорость $\omega = \frac{m_0}{I + \frac{P}{g}x^2} \cdot \frac{x - x_0}{V}$.

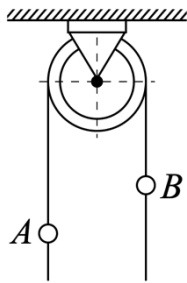


Рисунок 4.12

Пример 4.12. Через блок, масса m которого равномерно распределена по его ободу, перекинут канат; за конец A каната ухватился человек, масса которого в 4 раза больше массы блока, к другому концу B привязан груз одинаковой массы с человеком (рисунок 4.12). Что произойдет с грузом, если человек станет подниматься по канату со скоростью U относительно каната?

Решение. Действующими на систему внешними силами являются силы тяжести и сила реакции подшипника на ось блока. Сумма моментов всех этих сил относительно оси вращения блока равна нулю (моменты сил тяжести человека и груза равны по величине, но противоположны по знаку), значит, имеет место первый интеграл и кинетический момент системы относительно оси z блока постоянен и равен нулю, так как в начальный момент система находилась в покое. $K_{zgp} = 4mVr$, $K_{zчел} = -4m(U - V)r$, $K_{zбл} = I_z\omega = mrV$. Из равенства $K_z = K_{zgp} + K_{zчел} + K_{zбл} = 0$ получаем $mr(5V - 4U + 4V) = 0$, откуда следует, что груз будет подниматься со скоростью $V = \frac{4}{9}U$.

Пример 4.13. Твердое тело, находившееся в покое, приводится во вращение вокруг неподвижной вертикальной оси постоянным моментом, равным M ; при этом возникает момент сил сопротивления M_1 , пропорциональный квадрату угловой скорости вращения твердого тела: $M_1 = \alpha\omega^2$ (рисунок 4.13); момент инерции тела относительно оси равен I . Найти закон изменения угловой скорости тела.

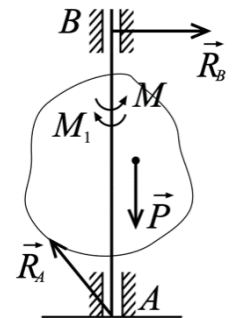


Рисунок 4.13

Решение. Внешними силами, действующими на тело, являются сила тяжести $\vec{P}$, реакции подшипников $\vec{R}_A$ и $\vec{R}_B$, вращательный момент M и момент сил сопротивления M_1 . Моменты сил $\vec{P}$, $\vec{R}_A$, $\vec{R}_B$ относительно оси Oz равны нулю, и из (4.34) будем иметь $I \frac{d\omega}{dt} = M - \alpha\omega^2$. Разделяя переменные

$\frac{Id\omega}{M - \alpha\omega^2} = dt$ и интегрируя это уравнение с учетом того, что при $t = 0$ $\omega = 0$,

получим $\frac{I}{2\sqrt{\alpha M}} \ln \frac{1 + \sqrt{\frac{\alpha}{M}}\omega}{1 - \sqrt{\frac{\alpha}{M}}\omega} = t$. Отсюда найдем $\omega = \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \frac{e^{\beta t} - 1}{e^{\beta t} + 1}$, где $\beta = \frac{2\sqrt{\alpha M}}{I}$.

1.4.5. Динамика точки переменной массы.

Тело, масса которого непрерывно изменяется со временем вследствие непрерывного присоединения и отделения частиц, называют **телом переменной массы**. Если размеры тела невелики по сравнению с проходимыми им расстояниями, то говорят о **точке переменной массы**.

1.4.5.1. Уравнение движения точки переменной массы (уравнение Мещерского).

Рассмотрим материальную точку массой $M(t)$ и обозначим $M_1(t)$ – массу вошедших в ее состав к моменту t присоединяющихся частиц, $M_2(t)$ – массу входящих в ее состав к этому же моменту отделяющихся частиц. Очевидно, что $M_1(t)$ – неубывающая, $M_2(t)$ – невозрастающая функции времени.

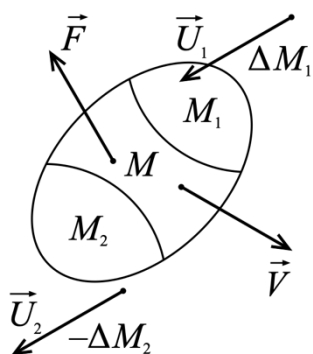


Рисунок 4.14

За промежуток времени Δt к точке присоединятся частицы с массой ΔM_1 и отделятся частицы с массой $(-\Delta M_2)$ (рисунок 4.14). Указанные частицы и точка образуют механическую систему только в момент времени t , поэтому все дальнейшие рассуждения будут справедливы лишь при $\Delta t \rightarrow 0$.

Применим к описанной системе теорему об изменении главного вектора количества движения:

$$\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \vec{F} \Delta t \quad (4.35)$$

Здесь $\vec{Q}_0, \vec{Q}_1$ количества движения системы соответственно в моменты $t, t + \Delta t$; $\vec{F}$ – равнодействующая приложенных к точке сил. Обозначим $\vec{V}$ абсолютную скорость точки, а $\vec{U}_1, \vec{U}_2$ – абсолютные скорости присоединяющихся и отделяющихся частиц в момент времени t . Тогда

$$\begin{aligned}\vec{Q}_0 &= M\vec{V} + \Delta M_1 \vec{U}_1, \\ \vec{Q}_1 &= (M + \Delta M_1 - (-\Delta M_2))(\vec{V} + \Delta \vec{V}) + (-\Delta M_2)\vec{U}_2\end{aligned}$$

Здесь $\Delta \vec{V}$ – приращение скорости точки за время Δt . Подставив $\vec{Q}_0, \vec{Q}_1$ в (4.35), получим

$$M\Delta \vec{V} + \Delta M_1(\vec{V} - \vec{U}_1) + \Delta M_2(\vec{V} - \vec{U}_2) + (\Delta M_1 + \Delta M_2)\Delta \vec{V} = \vec{F}\Delta t.$$

Разделив обе части равенства на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, придем к уравнению

$$M \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} + (\vec{U}_1 - \vec{V}) \frac{dM_1}{dt} + (\vec{U}_2 - \vec{V}) \frac{dM_2}{dt}. \quad (4.36)$$

Уравнение (4.35) носит название **обобщенного уравнения Мещерского или уравнения движения точки переменной массы** для случая одновременного присоединения и отделения частиц.

Заметим, что $\vec{U}_1 - \vec{V} = \vec{U}_{r1}$, $\vec{U}_2 - \vec{V} = \vec{U}_{r2}$ – относительные скорости соответственно присоединяющихся и отделяющихся частиц. Если происходит только процесс отделения (присоединения) частиц, то $\frac{dM_1}{dt} = 0$ ($\frac{dM_2}{dt} = 0$),

$\frac{dM_2}{dt} = \frac{dM}{dt}$ ($\frac{dM_1}{dt} = \frac{dM}{dt}$) и уравнение (4.36) примет вид

$$M \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} + \vec{U}_r \frac{dM}{dt}, \quad (4.37)$$

причем в случае отделения частиц $\frac{dM}{dt} < 0$, в случае присоединения частиц

$$\frac{dM}{dt} > 0.$$

Если абсолютная скорость отделяющихся (присоединяющихся) частиц $\vec{U} = 0$, то уравнение (4.37) можно представить в виде $\frac{d}{dt}(M\vec{V}) = \vec{F}$.

Если же относительная скорость отделения (присоединения) частиц $\vec{U}_r = 0$, то уравнение (4.37) будет по виду совпадать с уравнением движения точки

постоянной массы $M \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}$, но M здесь является функцией времени.

Обозначая $\vec{U}_r \frac{dM}{dt} = \vec{\Phi}$, заметим, что уравнение (4.37) имеет тот же вид

$$M \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} + \vec{\Phi},$$

что и уравнение движения точки постоянной массы, но к действующим на точку силам добавляется так называемая реактивная сила $\vec{\Phi}$. Учитывая, что $\left| \frac{dM}{dt} \right| = G_c$ представляет собой секундный расход отделяемой (или присоединяемой) массы, получаем выражение для реактивной силы в случае присоединения частиц $\vec{\Phi}_1 = G_c \vec{U}_r$ и $\vec{\Phi}_2 = -G_c \vec{U}_r$ в случае их отделения.

1.4.5.2. Движение ракеты (задачи Циолковского).

Первая задача Циолковского состоит в определении закона поступательного движения ракеты вне поля сил. Полагая в уравнении (4.37) $\vec{F} = 0$ и проецируя его на ось x , направленную по вектору скорости $\vec{V}$ ракеты (рисунок 4.15), получаем

$$M \frac{dV}{dt} = -U_r \frac{dM}{dt}.$$

Считая относительную скорость истечения продуктов сгорания U_r постоянной и полагая

$$\text{при } t = 0: x = 0, V = 0, M = M_0, \quad (4.38)$$

в результате интегрирования найдем

$$V = U_r \ln \frac{M_0}{M}, \quad (4.39)$$

$$x = U_r \int_0^t \ln \frac{M_0}{M(t)} dt. \quad (4.40)$$

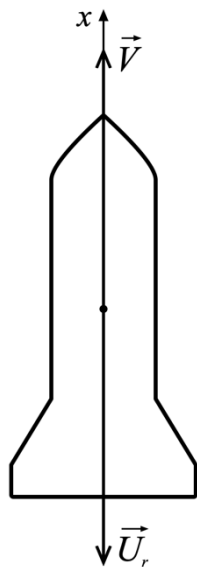


Рисунок 4.15

Закон движения, как следует из (4.40), зависит от вида функции $M(t)$, т.е. от закона расхода топлива. Наибольшая же скорость, которую приобретает ракета в конце активного участка, т.е. в момент сгорания всего топлива, когда M становится равной M_k (массе

корпуса), получается из (4.39) с учетом того, что $M_0 = M_k + M_T$ (M_T – масса топлива):

$$V_1 = U_r \ln \left(1 + \frac{M_T}{M_k} \right), \quad (4.41)$$

и не зависит от способа сгорания топлива. Формула (4. 41) получена **Циолковским** в 1903 г. и носит его имя. Из этой формулы следует, что *предельная скорость ракеты зависит только от относительного запаса топлива и относительной скорости истечения продуктов сгорания.*

Вторая задача Циолковского состоит в определении закона движения ракеты в однородном поле силы тяжести. Полагая в (4.37) $\vec{F} = m\vec{g}$, получаем в проекции на ось x

$$M \frac{dV}{dt} = -Mg - U_r \frac{dM}{dt}. \quad (4.42)$$

Интегрируя уравнение (4. 42) при тех же начальных условиях (4.38), получаем закон изменения скорости

$$V = U_r \ln \frac{M_0}{M} - gt \quad (4.43)$$

и закон движения

$$x = -\frac{gt^2}{2} + U_r \int_0^t \ln \frac{M_0}{M(t)} dt. \quad (4.44)$$

Рассмотрим случай, когда масса изменяется по закону

$$M = M_0 e^{-\alpha t}. \quad (4.45)$$

где α – постоянный коэффициент, характеризующий скорость изменения массы.

Уравнения (4. 43), (4.44) примут следующий вид

$$V = (\alpha U_r - g)t, \quad x = (\alpha U_r - g) \frac{t^2}{2}. \quad (4.46)$$

Так как $\Phi_x = -U_r \frac{dM}{dt} = M\alpha U_r$, то αU_r есть ускорение, сообщаемое ракете реактивной силой. Из (4.46) очевидно, что вертикальный подъем ракеты возможен только тогда, когда это ускорение больше ускорения силы тяжести: $\alpha U_r > g$.

Очевидно, что время движения ракеты t_1 на активном участке траектории получим, подставляя в (4.45) $M = M_k$

$$t_1 = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{M_0}{M_k} = \frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{M_T}{M_k} \right) = \frac{n}{\alpha}, \quad (4.47)$$

где

$$n = \ln \left(1 + \frac{M_r}{M_k} \right) -$$

число Циолковского, характеризующее относительный запас топлива.

Наибольшую скорость ракеты V_1 найдем, подставляя в (4.46) t_1 из формулы (4.47)

$$V_1 = \frac{n}{\alpha} (\alpha U_r - g).$$

Полная высота подъема ракеты $H = x_1 + h$, где

$$x_1 = (\alpha U_r - g) \frac{t_1^2}{2} = n^2 \frac{\alpha U_r - g}{2\alpha^2} - \quad (4.48)$$

длина активного участка; $h = \frac{V_1^2}{2g} = n^2 \frac{(\alpha U_r - g)^2}{2g\alpha^2}$ – высота подъема ракеты

постоянной массы M_k в однородном поле силы тяжести. Следовательно, полная высота подъема ракеты

$$H = n^2 \left(\frac{U_r^2}{2g} - \frac{U_r}{2\alpha} \right) \quad (4.49)$$

зависит от α и наибольшее значение

$$H^* = \frac{n^2 U_r^2}{2g} \quad (4.50)$$

достигается при $\alpha = \infty$, т.е. при мгновенном сжигании топлива.

Полученные формулы позволяют решить ряд важных практических задач.

При каком значении α длина активного участка x_1 будет наибольшей?

Такой режим горения обеспечивает движение ракеты с наименьшим ускорением, т. е. с наименьшими перегрузками.

Приравнивая к нулю производную правой части (4.48) $\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} = \frac{2g - \alpha U_r}{2\alpha^3} n^2 = 0$

и исследуя знак $\frac{\partial^2 x_1}{\partial \alpha^2}$, найдем, что оптимальный режим обеспечивается при

$$\alpha = \frac{2g}{U_r}, \quad (4.51)$$

т.е. когда ускорение, сообщаемое телу реактивной силой, вдвое больше ускорения силы тяжести. Из (4.48), (4.49) находим, что при этом режиме

$x_{1\max} = \frac{n^2 U_r^2}{8g}$, $H = \frac{n^2 U_r^2}{4g}$ и полная высота подъема вдвое меньше максимальной, определяемой равенством (4.50).

При каком значении α достигается заданная длина x_1 активного участка с наименьшим относительным запасом топлива n ?

Из формулы (4.48) выразим $n^2 = \frac{2x_1 \alpha^2}{\alpha U_r - g}$. Производная

$$\frac{\partial n^2}{\partial \alpha} = \frac{2x_1 \alpha (\alpha U_r - 2g)}{(\alpha U_r - g)^2} = 0 \text{ при } \alpha = \frac{2g}{U_r},$$

что совпадает с формулой (4.51). Обычным способом можно показать, что при этом значении α величина n достигает минимума и $n_{\min} = 2 \frac{\sqrt{2gx_1}}{U_r}$.

Таким образом, один и тот же закон изменения массы обеспечивает максимум x_1 при заданном значении n и минимум n при заданном x_1 .

Пример 4.14. Тело переменной массы, имея начальную скорость, равную нулю, движется с постоянным ускорением W по горизонтальным направляющим. Эффективная скорость истечения газов U_r постоянна. Определить, пренебрегая сопротивлением, путь, пройденный телом до того момента, когда его масса уменьшится в k раз.

Решение. Так как никакие внешние силы в горизонтальном направлении на тело не действуют, то уравнение (4.37) примет вид: $MW = -U_r \frac{dM}{dt}$. Разделяя

переменные и интегрируя в указанных пределах $\int_M^{M/k} \frac{dM}{M} = -\frac{U_r}{W} \int_0^t dt$, найдём

время $t = \frac{U_r}{W} \ln k$, в течение которого масса тела уменьшится в k раз. Поскольку

движение равнопеременное, то $s = \frac{1}{2} W t^2 = \frac{U_r^2}{2W} \ln^2 k$.

Пример 4.15. Эффективная скорость истечения газов из ракеты $U_r = 2,4$ км/с. Каково должно быть отношение первоначальной массы топлива к массе ракеты, чтобы после сгорания топлива ракета, движущаяся вне поля тяготения и вне атмосферы, приобрела скорость 9 км/с?

Решение. Воспользуемся формулой Циолковского (4.41), из которой найдем

$$\frac{M_T}{M_K} = e^{\frac{V}{U_r}} - 1 = e^{3,75} - 1 \cong 41,52$$

Пример 4.16. Эффективные скорости истечения газов первой и второй ступени у двухступенчатой ракеты соответственно равны $U_r^{(1)} = 2400 \text{ м/с}$, $U_r^{(2)} = 2600 \text{ м/с}$. Определить, считая, что движение происходит вне поля тяготения и атмосферы, числа Циолковского для обеспечения конечной скорости $V_1 = 2400 \text{ м/с}$ первой ступени и конечной скорости $V_2 = 5400 \text{ м/с}$ второй ступени.

Решение. Воспользуемся Циолковского (4.41), учитывая, что начальная скорость первой ступени $V_0 = 0$, значит $V_1 = U_r^{(1)} \ln z_1$ и $\ln z_1 = 1$, $z_1 = e \cong 2,72$.

На второй ступени начальная скорость равна V_1 и $V_2 = V_1 + U_r^{(2)} \ln z_2$, значит $\ln z_2 = \frac{V_2 - V_1}{U_r^{(2)}} = \frac{15}{13}$, $z_2 \cong 3,17$.

Пример 4.17. Поливочная машина движется прямолинейно при включенном поливочном устройстве. Масса воды в цистерне m_0 , время ее опорожнения T , скорость истечения воды из распылителей u . Насколько большей должна быть мощность, необходимая для обеспечения равномерного движения автомобиля со скоростью V при направлении струй воды в сторону ее движения по сравнению с тем случаем, когда струя воды перпендикулярна направлению движения автомашины. Потери на трение при движении считать постоянными.

Решение. Закон изменения массы машины: $m = m_0 - \frac{m_0}{T}t = m_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right)$.

1) Струи направлены в сторону движения (рисунок 4.16):

Уравнение Мещерского в проекции на Ox

$$: m \frac{dV}{dt} = F_{тяги} - F_{тр} + u \frac{dm}{dt} \text{ и так как } V = const, \quad \begin{array}{c} \vec{F}_{тр} \quad \quad \vec{V} \quad \quad \vec{V} \quad \quad \vec{F}_{тяги} \\ \leftarrow \quad \quad \rightarrow \quad \quad \rightarrow \quad \quad \rightarrow \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x \end{array}$$

$$\text{а } \frac{dm}{dt} = -\frac{m_0}{T}, \text{ то } F_{тяги} = F_{тр} + u \frac{m_0}{T}. \text{ Значит,}$$

Рисунок 4.16

мощность автомобиля, обеспечивающая его равномерное движение,

$$N_1 = \left(F_{тр} + u \frac{m_0}{T} \right) V.$$

2) Если струи перпендикулярны движению, то реактивная сила $\vec{u} \frac{dm}{dt}$ не проектируется на ось x и уравнение Мещерского примет вид:

$$m \frac{dV}{dt} = F_{тяги} - F_{тр} = 0, \text{ значит, } F_{тяги} = F_{тр} \text{ и } N_2 = F_{тр} V. \Delta N = N_1 - N_2 = uV \frac{m_0}{T}.$$

Пример 4.18. В сильный снегопад от железнодорожного состава, идущего со скоростью V_0 , оторвалась платформа. Считая, что на платформу выпадает за единицу времени α кг снега, найти закон изменения скорости платформы с течением времени.

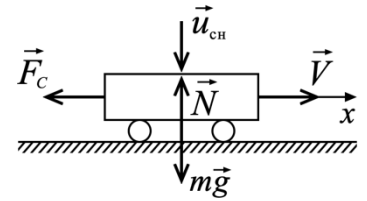


Рисунок 4.17

Определить также время T , прошедшее до полной остановки платформы и соответствующее время T_1 при отсутствии снегопада. Начальная масса платформы m_0 , сила сопротивления движению равна fmg , m – масса платформы в данный момент.

Решение. Уравнение движения платформы в снегопад $m \frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_c + (\vec{u}_{сн} - \vec{V}) \frac{dm}{dt}$, (рисунок 4.17) в проекции на ось x :

$$m \frac{dV}{dt} = -fmg - V \frac{dm}{dt}, \text{ где } m = m_0 + \alpha t, \text{ приводится к виду } \frac{dV}{dt} + V \frac{\alpha}{m_0 + \alpha t} = -fg.$$

Общее решение этого линейного уравнения:

$$V = e^{-\int \frac{\alpha dt}{m_0 + \alpha t}} \left(C - fg \int e^{\int \frac{\alpha dt}{m_0 + \alpha t}} dt \right) = \frac{1}{m_0 + \alpha t} \left(C - fg \int (m_0 + \alpha t) dt \right) = \frac{1}{m_0 + \alpha t} \left(C - \frac{fg}{2\alpha} (m_0 + \alpha t)^2 \right).$$

$$\text{Т.к. при } t=0: V=V_0, \text{ то } C = m_0 V_0 + \frac{fg m_0^2}{2\alpha} \text{ и } V = \frac{m_0 V_0 - 0,5 fg (2m_0 + \alpha t)t}{m_0 + \alpha t}.$$

Полагая $V=0$, получаем квадратное уравнение для T :

$$T^2 + 2 \frac{m_0}{\alpha} T - \frac{2m_0 V_0}{fg\alpha} = 0, \text{ откуда находим } T = \frac{m_0}{\alpha} \left(\sqrt{1 + \frac{2\alpha V_0}{f m_0 g}} - 1 \right).$$

При отсутствии снегопада уравнение движения платформы имеет вид

$$m \frac{dV}{dt} = -fmg, \text{ значит } \int_{V_0}^0 dV = -fg \int_0^{T_1} dt \text{ и } T_1 = \frac{V_0}{fg}.$$

Этот же результат можно получить из предельного перехода: $T_1 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} T = \frac{V_0}{fg}.$

1.5. Динамика абсолютного твердого тела.

Общие теоремы динамики произвольной механической системы позволяют получить уравнения движения твердого тела (неизменяемой системы).

1.5.1. Динамические характеристики твердого тела.

1.5.1.1. Характеристики распределения масс.

В главе 4 (формула 4.12) уже было дано определение момента инерции I_l системы относительно оси l

$$I_l = \sum_k m_k d_k^2, \quad (5.1)$$

где d_k – расстояние от точки системы с массой m_k до оси l , и отмечено, что в случае твердого тела конечная сумма в этом выражении заменяется интегралом по объему. Если ось l фиксирована относительно неизменяемой системы, то I_l – постоянная величина.

Введем систему координат $Oxyz$, жестко связанную с телом, в которой x_k, y_k, z_k – координаты точки тела. Согласно определению (5.1)

$$I_x = \sum_k m_k (y_k^2 + z_k^2), \quad I_y = \sum_k m_k (x_k^2 + z_k^2), \quad I_z = \sum_k m_k (x_k^2 + y_k^2) –$$

моменты инерции тела относительно осей координат.

Наряду с моментами инерции тела относительно осей системы координат вводятся также величины

$$I_{xy} = \sum_k m_k x_k y_k, \quad I_{xz} = \sum_k m_k x_k z_k, \quad I_{yz} = \sum_k m_k y_k z_k,$$

называемые *произведениями инерции* или *центробежными моментами инерции*.

Теорема Гюйгенса—Штейнера. Если известен момент инерции I_{l_C} относительно некоторой оси l_C , проходящей через центр масс системы, то момент инерции I_l относительно любой параллельной оси может быть найден по формуле

$$I_l = I_{l_C} + Md^2, \quad (5.2)$$

где d – расстояние между осями.

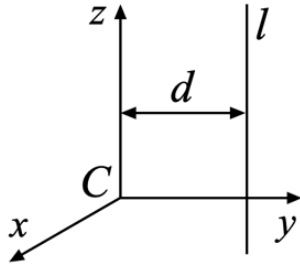


Рисунок 5.1

◀ Поместим начало координат в центре масс C , направив ось Cz по оси, относительно которой известен момент инерции I_{l_C} , а ось Cy так, чтобы она пересекала ось l , параллельную оси Cz (рисунок 5.1). Тогда

$$I_l = \sum_k m_k d_k^2 = \sum_k m_k (x_k^2 + (y_k - d)^2) = \sum_k m_k (x_k^2 + y_k^2) - 2d \sum_k m_k y_k + d^2 \sum_k m_k.$$

Первая сумма в полученном выражении есть I_{l_C} , вторая сумма обращается в нуль, так как она равна My_C , а для выбранной системы координат $y_C = 0$; третья сумма равна массе системы M . ▶

Теорема о моменте инерции относительно оси пучка. Пусть ось l с направляющим единичным вектором $\vec{e} = (\alpha, \beta, \gamma)$ проходит через начало координат системы $Oxyz$, жестко связанной с телом. Тогда момент инерции I_l тела находится по формуле

$$I_l = \alpha^2 I_x + \beta^2 I_y + \gamma^2 I_z - 2\alpha\beta I_{xy} - 2\alpha\gamma I_{xz} - 2\beta\gamma I_{yz}. \quad (5.3)$$

◀ Действительно (рисунок 5.2),

$$\begin{aligned} I_l &= \sum_k m_k d_k^2 = \sum_k m_k (\vec{r}_k^2 - \overline{OM'_k}^2) = \sum_k m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 - (\vec{e} \cdot \vec{r}_k)^2) = \\ &= \sum_k m_k ((1 - \alpha^2)x_k^2 + (1 - \beta^2)y_k^2 + (1 - \gamma^2)z_k^2 - 2\alpha\beta x_k y_k - 2\alpha\gamma x_k z_k - 2\beta\gamma y_k z_k). \end{aligned}$$

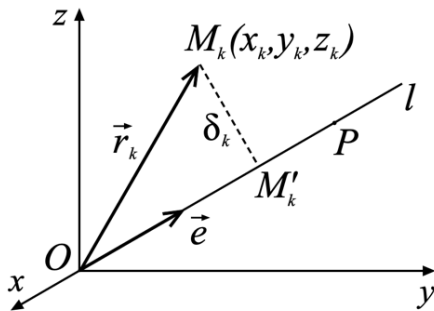


Рисунок 5.2

Упростим полученное выражение, учитывая, что $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ и

$$\begin{aligned} 1 - \alpha^2 &= \beta^2 + \gamma^2, \quad 1 - \beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2, \quad 1 - \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2: \\ I_l &= \sum_k m_k (\alpha^2 (y_k^2 + z_k^2) + \beta^2 (x_k^2 + z_k^2) + \gamma^2 (x_k^2 + y_k^2) - \\ &\quad - 2\alpha\beta x_k y_k - 2\alpha\gamma x_k z_k - 2\beta\gamma y_k z_k) = \\ &= \alpha^2 I_x + \beta^2 I_y + \gamma^2 I_z - 2\alpha\beta I_{xy} - 2\alpha\gamma I_{xz} - 2\beta\gamma I_{yz}. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Момент инерции I_l тела относительно связанной с ним оси, проходящей через заданную точку, есть определенная постоянная величина, не зависящая от выбора системы координат. Однако все величины в правой части формулы (5.3) зависят от положения точки на оси l и от направления координатных осей и будут

различны в различных системах координат. Моменты и произведения инерции относительно осей выбранной системы можно записать в виде матрицы

$$I = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Эта матрица определяет симметрический тензор второго ранга, называемый **тензором инерции** тела для точки O .

Таким образом, для нахождения момента инерции I_l тела относительно любой оси l , проходящей через точку O , достаточно знать 6 независимых элементов тензора I , определенных относительно некоторой системы координат с началом в точке O , и направляющий вектор $\vec{e}(\alpha, \beta, \gamma)$ оси l в этой системе.

Представим себе пучок осей, проходящих через точку O системы координат $Oxyz$. При переходе от одной оси пучка к другой будет, очевидно, меняться момент инерции I_l , вычисленный по формуле (5.3). Для геометрической интерпретации этого изменения на каждой из осей по обе стороны от точки O отложим одинаковые отрезки, длина которых $OP = \frac{1}{\sqrt{I_l}}$ зависит от момента инерции I_l тела относительно этой оси (рисунок 5.2).

Найдем уравнение поверхности, на которой лежат точки $P(x, y, z)$. Поскольку $\alpha = \frac{x}{OP}$, $\beta = \frac{y}{OP}$, $\gamma = \frac{z}{OP}$, то равенство (5.3) примет вид

$$1 = x^2 I_x + y^2 I_y + z^2 I_z - 2xy I_{xy} - 2xz I_{xz} - 2yz I_{yz}. \quad (5.5)$$

Если исключить из рассмотрения твердое тело в виде бесконечного тонкого стержня, для которого момент инерции относительно его оси равен нулю, то поверхность второго порядка (5.5) не будет иметь бесконечно удаленных точек и, следовательно, является эллипсоидом.

Эллипсоид (5.5) называется **эллипсоидом инерции** твердого тела для точки O . Главные оси эллипсоида инерции называются **главными осями инерции тела для точки O** или **главными центральными осями инерции**, если точка O – центр масс тела.

В системе координат $Ox_1y_1z_1$, оси которой направлены по главным осям инерции тела для точки O , все центробежные моменты инерции равны нулю и уравнение (5.6) принимает вид

$$x_1^2 I_{x_1} + y_1^2 I_{y_1} + z_1^2 I_{z_1} = 1,$$

где $I_{x_1}, I_{y_1}, I_{z_1}$ – главные моменты инерции тела для точки O .

Из определения произведений инерции следует, что ось симметрии однородного твердого тела является главной осью инерции для всех своих точек. Легко доказать также, что любая прямая, перпендикулярная плоскости симметрии тела, является главной осью инерции для точки пересечения ее с плоскостью.

1.5.1.2. Количество движения, кинетический момент и кинетическая энергия твердого тела.

Главный вектор количества движения твердого тела определяется формулой (4.2)

$$\vec{Q} = M\vec{V}_C$$

и не зависит, очевидно, от движения тела относительно репера Кенига, т.е. относительно осей, поступательно перемещающихся вместе с центром масс.

Кинетический момент твердого тела относительно некоторого центра O находится по формуле (4.26)

$$\vec{K}_O = \sum_k \vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k.$$

Если тело совершает сферическое движение вокруг неподвижной точки O , то $\vec{V}_k = \vec{\omega} \times \vec{r}_k$ и

$$\vec{K}_O = \sum_k \vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k = \sum_k m_k \vec{r}_k \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_k) = \sum_k m_k (r_k^2 \vec{\omega} - \vec{r}_k (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_k)).$$

Спроектируем это равенство на оси системы координат $Oxyz$, связанной с телом. Поскольку в этой системе $\vec{r}_k = (x_k, y_k, z_k)$ и $\vec{\omega} = (p, q, r)$, то

$$\begin{aligned} K_{Ox} &= \sum_k m_k ((y_k^2 + z_k^2)p - qx_k y_k - rx_k z_k) = I_x p - I_{xy} q - I_{xz} r, \\ K_{Oy} &= \sum_k m_k (-px_k y_k + (x_k^2 + z_k^2)q - ry_k z_k) = -I_{yx} p + I_y q - I_{yz} r, \\ K_{Oz} &= \sum_k m_k (-px_k z_k - qy_k z_k + (x_k^2 + y_k^2)r) = -I_{zx} p - I_{zy} q + I_z r. \end{aligned} \quad (5.6)$$

или в векторном виде

$$\vec{K}_O = I \cdot \vec{\omega}. \quad (5.7)$$

Если координатные оси имеют направления главных осей инерции тела для точки O , то

$$\vec{K}_O = (I_x p, I_y q, I_z r). \quad (5.8)$$

Кинетический момент твердого тела относительно произвольного неподвижного центра O выражается формулой (4.29):

$$\vec{K}_O = \vec{r}_C \times M\vec{V}_C + \vec{K}'_C.$$

Здесь $\vec{K}'_C$ – кинетический момент тела относительно центра масс при его движении по отношению к реперу Кенига. Это относительное движение является сферическим вокруг центра масс, поэтому если связанная с телом система координат имеет начало в центре масс, то для проекций вектора $\vec{K}'_C$ на оси этой системы справедливы формулы (5.6), (5.8).

В соответствии с теоремой Кенига кинетическую энергию твердого тела можно определить по формуле (4.10)

$$T = \frac{1}{2}MV_C^2 + T'_C,$$

где T'_C – энергия движения тела относительно репера Кенига. В этом относительном движении скорость точки тела определяется формулой $\vec{V}'_k = \vec{\omega} \times \vec{r}'_k$. Тогда, с учетом циклической перестановочности смешанного произведения векторов, имеем

$$\begin{aligned} 2T'_C &= \sum_k m_k (V'_k)^2 = \sum_k m_k \vec{V}'_k \cdot \vec{V}'_k = \sum_k m_k \vec{V}'_k \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}'_k) = \\ &= \sum_k \vec{\omega} \cdot (\vec{r}'_k \times m_k \vec{V}'_k) = \vec{\omega} \cdot \sum_k (\vec{r}'_k \times m_k \vec{V}'_k) = \vec{\omega} \cdot \vec{K}'_C. \end{aligned}$$

Выразив скалярное произведение через проекции сомножителей на оси системы $S_{хуz}$, связанной с телом, и заменяя проекции $\vec{K}'_C$ их выражениями (5.6), получим

$$2T'_C = I_x p^2 + I_y q^2 + I_z r^2 - 2I_{xy} pq - 2I_{xz} pr - 2I_{yz} qr. \quad (5.9)$$

Если за подвижные оси взяты главные центральные оси инерции, то формула (5.9) примет вид

$$2T'_C = I_x p^2 + I_y q^2 + I_z r^2. \quad (5.10)$$

Пример 5.1. Вычислить момент инерции тонкого однородного диска массой m и радиусом R относительно его диаметра.

Решение. Рассмотрим произвольное плоское тело и свяжем с ним систему координат $Oxуz$, так что оси Ox, Oy принадлежат его плоскости. По определению $I_x = \sum_k m_k (x_k^2 + z_k^2) = \sum_k m_k x_k^2$, $I_y = \sum_k m_k (y_k^2 + z_k^2) = \sum_k m_k y_k^2$, откуда вытекает полезная формула

$$I_z = \sum_k m_k (x_k^2 + y_k^2) = I_x + I_y. \quad (5.11)$$

Так как для однородного диска $I_x = I_y$ – моменты инерции относительно любого из диаметров, то с учетом формулы (4.18) и (5.11) $I_x = \frac{1}{4} m R^2$.

Пример 5.2. Вычислить осевые моменты инерции однородной прямоугольной пластинки массой m , изображенной на рисунок 5.3.

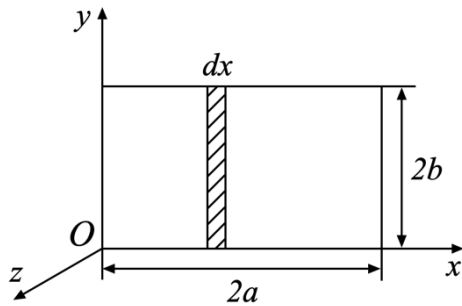


Рисунок 5.3

Решение. Разобьем пластину на тонкие полоски, параллельные оси Oy толщиной dx . По формуле (4.19) момент инерции каждой такой полоски относительно оси Ox равен $dI_x = \frac{1}{3} dm (2b)^2$, $dm = \rho dS = \frac{m}{4ab} 2b dx = \frac{m}{2a} dx$,

так что $dI_x = \frac{2}{3} \frac{mb^2}{a} dx$. Интегрируя это

равенство по всей длине пластины, получим $I_x = \frac{4}{3} mb^2$. Аналогично получаем

$I_y = \frac{4}{3} ma^2$. Теперь по формуле (5.11) найдем $I_z = \frac{4}{3} m(a^2 + b^2)$.

Пример 5.3. Определить момент инерции относительно оси Oz ломаного рычага OAB (рисунок 5.4), составленного из двух одинаковых однородных стержней массой m и длиной l каждый, если рычаг расположен: а) в плоскости xOy , б) в плоскости yOz .

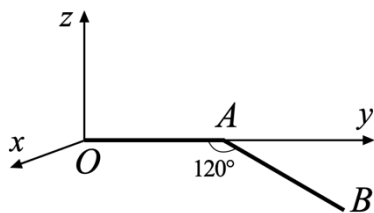


Рисунок 5.4

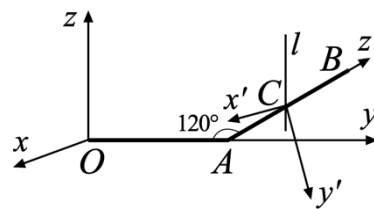


Рисунок 5.5

Решение.

а) Пусть K – середина стержня AB . $OK^2 = l^2 + \frac{l^2}{4} - 2l \cdot \frac{l}{2} \cos 120^\circ = \frac{7}{4} l^2$. По

теореме Гюйгенса $I_z = I_z^{OA} + I_z^{AB} = \frac{1}{3} ml^2 + \left(\frac{1}{12} ml^2 + \frac{7}{4} ml^2 \right) = \frac{13}{6} ml^2$.

б) Свяжем с центром C стержня AB систему $Cx'y'z'$ главных центральных осей инерции. Легко видеть, что $I_{x'} = I_{y'} = \frac{1}{12}ml^2$, $I_{z'} = 0$. Тогда по формуле (5.3) $I_{Cl} = I_{x'} \cos^2 90^\circ + I_{y'} \cos^2 120^\circ + I_{z'} \cos^2 30^\circ = \frac{1}{48}ml^2$. Расстояние между осями Oz и Cl равно $l + \frac{l}{2} \cos 60^\circ = \frac{5}{4}l$ и по теореме Гюйгенса $I_{zz} = I_{zz}^{OA} + I_{zz}^{AB} = \frac{1}{3}ml^2 + (\frac{1}{48}ml^2 + \frac{25}{16}ml^2) = \frac{23}{12}ml^2$.

1.5.2. Движение свободного твердого тела.

Пусть требуется найти движение твердого тела относительно инерциальной (неподвижной) системы $OXYZ$ под действием системы сил $\vec{F}_k$, $k = \overline{1, n}$. Согласно теореме Шаля (§2.5) всякое движение твердого тела определяется движением некоторой его точки (полюса) A и движением тела относительно системы $A\xi\eta\zeta$, совершающей вместе с полюсом поступательное движение. Система координат

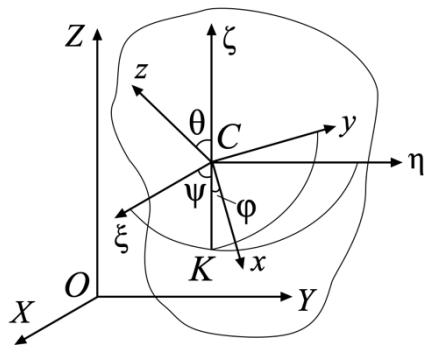


Рисунок 5.6

$Axyz$, жестко связанная с телом, будет, очевидно, совершать сферическое движение относительно системы $A\xi\eta\zeta$.

Выберем в качестве полюса центр масс тела — точку C (рисунок 5.6). Тогда задача сведется к нахождению координат центра масс тела $X_C(t)$, $Y_C(t)$, $Z_C(t)$ в неподвижной системе и трех углов Эйлера $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\theta(t)$, определяющих положение тела (системы $Cxyz$) относительно

репера Кенига $C\xi\eta\zeta$ в любой момент времени.

Для нахождения шести независимых функций $X_C(t)$, $Y_C(t)$, $Z_C(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\theta(t)$ требуется шесть скалярных уравнений, которые могут быть получены из двух векторных уравнений, представляющих собой аналитическую запись теорем о движении центра масс и об изменении кинетического момента тела относительно центра масс:

$$M\vec{W}_C = \vec{R}, \quad \frac{d\vec{K}_C}{dt} = \vec{M}_C. \quad (5.12)$$

Здесь

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k, \quad \vec{M}_C = \sum_{k=1}^n \overrightarrow{mom_C} \vec{F}_k.$$

При равновесии твердого тела скорость центра масс и угловая скорость тела равны нулю, поэтому из уравнений (5.12) легко получить необходимые и достаточные условия равновесия твердого тела

$$\vec{R} = 0, \quad \vec{M}_O = 0,$$

если учесть, что главные моменты сил относительно любого неподвижного центра O и центра масс C связаны соотношением $\vec{M}_O = \vec{M}_C + \overrightarrow{OC} \times \vec{R}$. Эти условия использовались без доказательства в главе 1.

В проекциях на оси неподвижной системы первое уравнение (5.12) дает три скалярных уравнения

$$M\ddot{X}_C = R_X, \quad M\ddot{Y}_C = R_Y, \quad M\ddot{Z}_C = R_Z. \quad (5.13)$$

Второе уравнение (5.12), записанное для абсолютного движения тела, имеет такой же вид, как и для движения тела относительно репера Кенига:

$$\frac{d\vec{K}'_C}{dt} = \vec{M}_C.$$

Если абсолютную производную вектора $\vec{K}'_C$ выразить через его локальную производную относительно системы S_{xyz} , то это уравнение примет вид

$$\frac{d\vec{K}'_C}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K}'_C = \vec{M}_C. \quad (5.14)$$

Будем считать, что оси системы S_{xyz} направлены по главным центральным осям инерции тела и спроектируем уравнение (5.14) на эти оси. Так как в этом случае

$$\vec{K}'_C = (I_x p, I_y q, I_z r), \quad \vec{\omega} = (p, q, r),$$

то получим три скалярных уравнения

$$\begin{aligned} I_x \frac{dp}{dt} + qr(I_z - I_y) &= M_{Cx}, \\ I_y \frac{dq}{dt} + pr(I_x - I_z) &= M_{Cy}, \\ I_z \frac{dr}{dt} + pq(I_y - I_x) &= M_{Cz}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

описывающих сферическое движение твердого тела вокруг центра масс. Уравнения (5.15), в которых проекции p, q, r вектора $\vec{\omega}$ связаны с углами Эйлера φ, ψ, θ кинематическими формулами Эйлера (2.54)

$$p = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \quad q = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \quad r = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \quad (5.16)$$

называются **динамическими уравнениями Эйлера**.

Система (5.13), (5.15) и (5.16), содержащая девять уравнений, служит для определения девяти неизвестных функций $X_C, Y_C, Z_C, \varphi, \psi, \theta, p, q, r$, определяющих движение свободного твердого тела под действием заданных внешних сил с главным вектором $\vec{R}$ и главным моментом относительно центра масс $\vec{M}_C$. Масса M тела и его главные центральные моменты инерции I_x, I_y, I_z считаются заданными. Начальное состояние тела задается условиями: при $t = 0$

$$\vec{r}_C = \vec{r}_{C0}, \dot{\vec{r}}_C = \dot{\vec{r}}_{C0}, \varphi = \varphi_0, \psi = \psi_0, \theta = \theta_0, p = p_0, q = q_0, r = r_0.$$

Заметим, что полученные уравнения движения имеют место и для несвободного твердого тела, но в этом случае в правые части уравнений (5.13), (5.15) войдут реакции связей, а величины $X_C, Y_C, Z_C, \varphi, \psi, \theta$ будут подчинены уравнениям этих связей.

1.5.3. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.

Предположим, что на твердое тело, имеющее две неподвижные точки A и B , действуют активные силы с главным вектором $\vec{R}$ и главным моментом $\vec{M}_O$ относительно некоторой точки O , принадлежащей отрезку AB . Требуется найти движение тела вокруг неподвижной оси AB и реакции связей $\vec{R}_A, \vec{R}_B$ в точках A и B (рисунок 5.7).

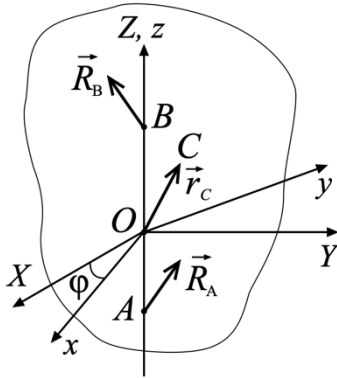


Рисунок 5.7

Введем неподвижную систему координат $OXYZ$ и систему $Oxyz$, жестко связанную с телом так, чтобы их оси OZ и Oz лежали на оси вращения AB .

Система уравнений, дающих решение задачи, получится из теоремы о движении центра масс и теоремы об изменении кинетического момента

$$M \frac{d\vec{V}_C}{dt} = \vec{R} + \vec{R}_A + \vec{R}_B, \quad \frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O + \vec{OA} \times \vec{R}_A + \vec{OB} \times \vec{R}_B$$

Выразим в этих уравнениях абсолютные производные векторов через их локальные производные:

$$M \left(\frac{d\vec{V}_C}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{V}_C \right) = \vec{R} + \vec{R}_O + \vec{R}_A, \quad \frac{d\vec{K}_O}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K}_O = \vec{M}_O + \vec{OA} \times \vec{R}_A + \vec{OB} \times \vec{R}_B. \quad (5.17)$$

Учитывая, что в нашем случае

$$\vec{OA} = (0, 0, -a), \quad \vec{OB} = (0, 0, b), \quad \vec{\omega} = (0, 0, \dot{\varphi}), \quad \vec{r}_C = (x_C, y_C, z_C), \quad \vec{V}_C = \vec{\omega} \times \vec{r}_C,$$

$$\vec{R}_A = (R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Az}), \quad \vec{R}_B = (R_{Bx}, R_{By}, R_{Bz}), \quad \vec{K}_O = I \cdot \vec{\omega} = (-I_{xz}\dot{\varphi}, -I_{yz}\dot{\varphi}, I_z\dot{\varphi}),$$

запишем проекции уравнений (5.17) на оси подвижной системы координат.

$$\begin{aligned}
-M y_C \ddot{\phi} - M x_C \dot{\phi}^2 &= R_x + R_{Ax} + R_{Bx}, \\
M x_C \ddot{\phi} - M y_C \dot{\phi}^2 &= R_y + R_{Ay} + R_{By}, \\
0 &= R_z + R_{Az} + R_{Bz}, \\
-I_{xz} \ddot{\phi} + I_{yz} \dot{\phi}^2 &= M_{Ox} + a R_{Ay} - b R_{By}, \\
-I_{yz} \ddot{\phi} - I_{xz} \dot{\phi}^2 &= M_{Oy} - a R_{Ax} + b R_{Bx}, \\
I_z \ddot{\phi} &= M_{Oz}.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Последнее уравнение системы (5.18) не содержит неизвестных реакций связей и является **дифференциальным уравнением вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси**. Это уравнение уже было получено в главе 4 (формула 4.34). Из остальных пяти уравнений должны быть найдены шесть проекций реакций. Эта задача является неопределенной, так как из третьего уравнения может быть найдена лишь сумма $R_{Az} + R_{Bz}$. Эту неопределенность можно устранить, если считать, что в точке A сферический шарнир, а в B – цилиндрический. Тогда $R_{Bz} = 0$ и $R_{Az} = -R_z$.

Если $\dot{\phi} = \ddot{\phi} = 0$, то есть тело не вращается, то (5.18) дает уравнения для определения *статических реакций*. *Добавочные динамические реакции* будут получены из системы (5.18), если положить в ней $\vec{R}$ и $\vec{M}_O$ равными нулю. Очевидно, что добавочные динамические реакции не возникают при любом законе вращения тела, если

$$y_C \ddot{\phi} + x_C \dot{\phi}^2 = 0, \quad y_C \dot{\phi}^2 - x_C \ddot{\phi} = 0; \tag{5.19}$$

$$I_{xz} \ddot{\phi} - I_{yz} \dot{\phi}^2 = 0, \quad I_{xz} \dot{\phi}^2 + I_{yz} \ddot{\phi} = 0. \tag{5.20}$$

Из этих уравнений можно найти массоинерционные характеристики тела x_C, y_C, I_{xz}, I_{yz} , при которых динамические реакции будут равны статическим. Поскольку определители систем одинаковы и равны сумме $\dot{\phi}^4 + \ddot{\phi}^2$, которая не может тождественно равняться нулю при движении тела, то условия (5.19), (5.20) выполняются, если

$$x_C = y_C = 0, \quad I_{xz} = I_{yz} = 0.$$

Таким образом, **при любом законе $\phi(t)$ вращения тела не возникают добавочные динамические реакции в точках закрепления оси, если ось вращения является одной из главных центральных осей инерции тела.**

Пример 5.4. Однородный горизонтальный диск радиусом R и массой M может вращаться без трения вокруг вертикальной оси z . По ободу диска движется с постоянной относительной скоростью u материальная точка D массой m (рисунок 5.8). Определить динамические реакции опор A и B , если в начальный момент система покоилась, а движение точки D по диску происходит под действием внутренних сил системы; $OA = OB = l$.

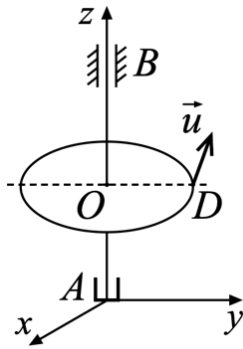


Рисунок 5.8

Решение. Внешними силами системы являются силы тяжести и реакции подшипников. Моменты этих сил относительно оси Oz равны нулю, поэтому $\frac{dK_z}{dt} = 0$ и в силу

$$\text{начальных условий } K_z = K_{zD} + K_{zT} = 0. \quad \text{Значит}$$

$$\frac{1}{2}MR^2\omega - mR(u - \omega R) = 0 \quad \text{и} \quad \omega = \frac{2mu}{R(M + 2m)} = \text{const.}$$

Воспользуемся системой уравнений (5.18) для определения добавочных динамических реакций, с учетом того, что $\varepsilon = 0$:

$$(m + M)x_C\omega^2 = X_A + X_B, \quad -(m + M)y_C\omega^2 = Y_A + Y_B,$$

$$I_{yz}\omega^2 = -2lY_B, \quad -I_{xz}\omega^2 = 2lX_B.$$

Т.к. $x_C = 0$, $y_C = \frac{mR}{m + M}$, $I_{xz} = 0$, $I_{yz} = I_{yzD} + I_{yzT} = 0 + mRl$, то из выписанной

системы находим: $X_B = 0, \quad X_A = 0, \quad Y_B = -\frac{mRl}{2l}\omega^2 = -\frac{2m^3u^2}{R(M + 2m)^2},$

$$Y_A = -(m + M)y_C\omega^2 + \frac{mR}{2}\omega^2 = -\frac{mR}{2}\omega^2.$$

Пример 5.5. К вертикальному валу AB , вращающемуся с постоянной

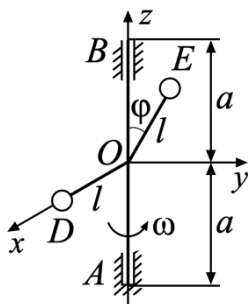


Рисунок 5.9

угловой скоростью ω , жестко прикреплены два стержня. Стержень OE образует с валом угол φ , стержень OD перпендикулярен к плоскости, содержащей вал AB и стержень OE , $OE = OD = l$, $AB = 2a$. К концам стержней прикреплены два шара E и D массой m каждый (рисунок 5.9). Определить динамические давления вала на опоры A и B . Шары считать точечными массами, массой стержней пренебречь.

Решение. В показанной на рисунке системе координат $x_C = \frac{m_D l + 0}{2m} = \frac{l}{2}$, $y_C = \frac{0 + m_E l \sin \varphi}{2m} = \frac{l \sin \varphi}{2}$, $z_C = \frac{0 + m_E l \cos \varphi}{2m} = \frac{l \cos \varphi}{2}$, $I_{xz} = 0$, так как ось Ox перпендикулярна плоскости симметрии yOz тела, следовательно, является главной осью инерции для точки O , $I_{yz} = m_E y_E z_E = ml^2 \sin \varphi \cos \varphi$, $b = a$. Система (5.18) для добавочных динамических реакций приведет к равенствам

$$\begin{aligned} -ml\omega^2 &= R_{Ax} + R_{Bx}, \quad -ml \sin \varphi \omega^2 = R_{Ay} + R_{By}, \\ ml^2 \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi &= aR_{Ay} - aR_{By}, \quad 0 = -aR_{Ax} + aR_{Bx}. \end{aligned}$$

Из этой системы находим:

$$\begin{aligned} R_{Ax} &= R_{Bx} = -\frac{1}{2}ml\omega^2, \\ R_{Ay} &= \frac{1}{2a}ml\omega^2 \sin \varphi (a - l \cos \varphi), \\ R_{By} &= -\frac{1}{2a}ml\omega^2 \sin \varphi (a + l \cos \varphi). \end{aligned}$$

Отметим, что динамические давления вала на опоры равны по модулю и противоположны по направлению найденным реакциям опор.

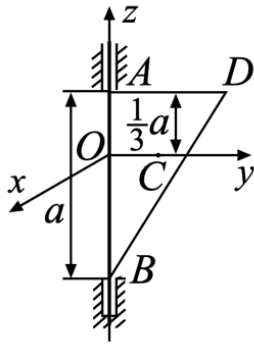


Рисунок 5.10

Пример 5.6. С какой угловой скоростью должна вращаться вокруг катета $AB = a$ однородная пластинка, имеющая форму равнобедренного прямоугольного треугольника ABD , чтобы боковое давление на нижнюю опору A равнялось нулю? Расстояние между опорами считать равным длине катета (рисунок 5.10).

Решение. В показанной на рисунке системе координат

$$x_C = 0, \quad y_C = \frac{a}{3}, \quad z_C = 0, \quad I_{xz} = 0, \quad \text{так как ось } Ox \text{ перпендикулярна плоскости симметрии тела.}$$

$$I_{yz} = \iint_{S_{\square}} yz dm = \frac{2m}{a^2} \int_0^a y \int_{y-\frac{2}{3}a}^{\frac{1}{3}a} z dz dy = \frac{m}{a^2} \int_0^a y \left(\frac{a^2}{9} - \left(y - \frac{2}{3}a \right)^2 \right) dy = \frac{ma^2}{36}.$$

Подставляя найденные величины в систему (5.18) для определения динамических реакций, с учетом того, что $\varepsilon = 0$, получим

$$X_A + X_B = 0,$$

$$Y_A + Y_B = -\frac{ma}{3}\omega^2,$$

$$Z_A - mg = 0,$$

$$\frac{2a}{3}Y_A - \frac{a}{3}Y_B - \frac{a}{3}mg = \frac{ma^2}{36}\omega^2,$$

$$\frac{a}{3}X_B - \frac{2a}{3}X_A = 0.$$

Из этих уравнений находим $X_A = -X_B = 0$, $Y_A = \frac{1}{3}mg - \frac{1}{12}ma\omega^2$,
 $Y_B = -Y_A - \frac{1}{3}ma\omega^2$. Боковой давление на нижнюю опору Y_A равно нулю, если
 $\omega = 2\sqrt{\frac{g}{a}}$, при этом боковое давление на верхнюю опору $Y_B = -\frac{4}{3}mg$.

1.5.4. Плоскопараллельное движение твердого тела.

Из кинематики известно (§2.3), что положение тела, совершающего плоскопараллельное движение, определяется положением полюса и углом поворота вокруг полюса. Выберем за полюс центр масс и свяжем с телом систему координат Cx_{Cz} , направив ось Cz перпендикулярно основной плоскости XOY . Рассмотрим сечение тела плоскостью Cx_{Cz} и будем считать, что все действующие на тело силы лежат в этой плоскости (рисунок 5.11).

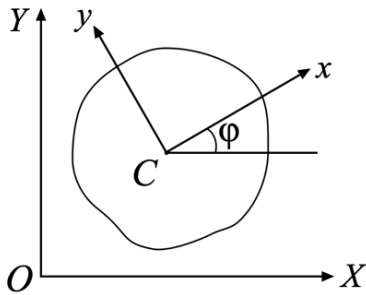


Рисунок 5.11

Тогда для решения задачи можно использовать уравнения движения свободного твердого тела (5.13), (5.15), учитывая, что в нашем случае

$$Z_C = \text{const}, \quad p = q = 0, \quad r = \dot{\phi}.$$

Получим три нетривиальных уравнения относительно неизвестных $X_C(t)$, $Y_C(t)$, $\phi(t)$, описывающих плоскопараллельное движение твердого тела:

$$M\ddot{X}_C = R_X, \quad M\ddot{Y}_C = R_Y, \quad I_{Cz}\ddot{\phi} = M_{Cz}. \quad (5.21)$$

Вопрос о динамической осуществимости такого движения в этом курсе не исследуется.

Пример 5.7. По наклонной плоскости спускаются два одинаковых сплошных однородных цилиндра, причем первый скользит без качения, а второй

катится без скольжения. Найти отношения высот, на которые опустятся оба цилиндра через некоторое время, если двигаться они начинают одновременно и без начальных скоростей.

Решение. Направим ось Ox по наклонной плоскости вниз, ось Oy перпендикулярно Ox .

а) При скольжении действующими силами являются вес и нормальная реакция плоскости, так что из (5.21) получим два нетривиальных уравнения $m\ddot{x}_c = mg \sin \alpha$, $0 = N - mg \cos \alpha$ и с учетом нулевых начальных условий найдем закон движения центра масс цилиндра $x_c^{ck} = g \frac{t^2}{2} \sin \alpha$.

б) При качении к действующим силам добавится сила трения F и уравнения (5.21) примут вид: $m\ddot{x}_c = mg \sin \alpha - F$, $0 = N - mg \cos \alpha$, $I_{cz}\ddot{\phi} = FR$.

Добавляя к этим уравнениям условие качения без скольжения $\dot{x}_c = R\dot{\phi}$ и учитывая, что $I_{cz} = \frac{1}{2}mR^2$, найдем $\ddot{x}_c = \frac{2}{3}g \sin \alpha$, откуда $x_c^{кач} = \frac{gt^2}{3} \sin \alpha$. Значит отношение высот, на которые опустятся цилиндры за один и тот же промежуток времени $\frac{h_{ск}}{h_{кач}} = \frac{3}{2}$.

Пример 5.8. Однородному цилиндру, находящемуся на горизонтальной шероховатой плоскости, сообщена поступательная скорость $\vec{V}_0$, перпендикулярная его оси. Определить скорость центра цилиндра в тот момент, когда начнется качение без скольжения.

Решение. На цилиндр действуют сила тяжести $m\vec{g}$, нормальная реакция $\vec{N}$ плоскости и сила трения $\vec{F}$. Запишем уравнения (5.21) непосредственно после толчка, направив ось Ox по горизонтали в сторону $\vec{V}_0$:

$$m\ddot{x}_C = -F, \quad 0 = N - mg, \quad \frac{1}{2}mR^2 \frac{d\omega}{dt} = FR.$$

Так как на первом этапе происходит качение со скольжением, то $F = fmg$, и уравнения движения принимают вид: $\ddot{x}_C = -fg$, $\frac{d\omega}{dt} = \frac{2fg}{R}$. Поскольку начальная угловая скорость цилиндра равна нулю, то интегрируя эти уравнения, находим $\dot{x}_C = -fgt + V_0$, $\omega = \frac{2fg}{R}t$.

При качении без скольжения скорость точки касания цилиндра с плоскостью равна

нулю, следовательно, $V_{Px} = \dot{x}_C - \omega R = 0$ или $-fgt + V_0 - 2fgt = 0$. Отсюда находим время, по истечении которого начнется качение без скольжения: $t_1 = \frac{V_0}{3fg}$. Скорость центра цилиндра в этот момент $V_C = \dot{x}_C|_{t_1} = \frac{2}{3}V_0$.

Пример 5.9. Колесо радиусом r и массой m катится по прямолинейному горизонтальному рельсу под действием приложенного вращающего момента $m_{\text{вр}} = 2,5 fmg r$, где f – коэффициент трения скольжения. Определить скорость точки колеса, соприкасающейся с рельсом (скорость проскальзывания). Масса колеса равномерно распределена по его ободу. В начальный момент колесо находилось в покое. Трением качения пренебречь.

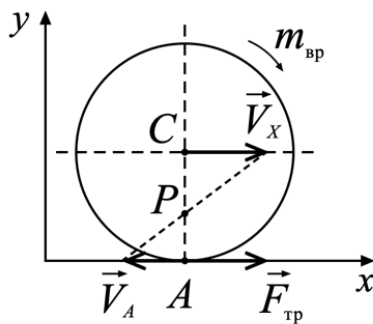


Рисунок 5.12

Решение. На колесо действуют сила тяжести $m\vec{g}$, нормальная реакция $\vec{N}$ плоскости, вращающий момент $m_{\text{вр}}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, направленная вправо (рисунок 5.12), так как под действием вращающего момента нижняя точка колеса стремится сдвинуться влево. При наличии скольжения $F_{\text{тр}} = fN = fmg$ и уравнения (5.21) примут вид: $m\ddot{x}_C = fmg$, $mr^2\ddot{\phi} = m_{\text{вр}} - F_{\text{тр}}r = 1,5 fmg r$, откуда при нулевых

начальных условиях получим $V_C = \dot{x}_C = fgt$, $\dot{\phi} = \frac{3fg}{2r}t$. Так как скорость центра колеса направлена вправо, а скорость нижней точки A – влево, то мгновенный центр скоростей P лежит на отрезке AC на расстоянии $CP = \frac{V_C}{\dot{\phi}} = \frac{2}{3}r$ от точки C . Тогда $AP = \frac{1}{3}r$ и скорость $V_A = \dot{\phi}AP = \frac{1}{2}fgt$.

1.5.5. Сферическое движение твердого тела.

1.5.5.1. Уравнения движения твердого тела с одной неподвижной точкой.

Пусть на твердое тело с неподвижной точкой O действуют активные силы $\vec{F}_k$, $k = \overline{1, n}$. Получим уравнения для определения движения тела относительно неподвижной системы $OXYZ$ и реакцию $\vec{R}_O$ в точке закрепления.

Свяжем с телом систему координат $Oxyz$, оси которой направим по главным осям инерции тела для точки O , и запишем в векторном виде теоремы о движении центра масс и об изменении кинетического момента тела относительно точки O :

$$M\vec{W}_C = \vec{R} + \vec{R}_O, \quad \frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O. \quad (5.22)$$

Здесь

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k, \quad \vec{M}_O = \sum_{k=1}^n \overrightarrow{mom_O} \vec{F}_k.$$

Во втором уравнении (5.22) выразим абсолютную производную вектора $\vec{K}_O$ через его локальную производную

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K}_O = \vec{M}_O \quad (5.23)$$

и спроектируем это уравнение на оси подвижной системы $Oxyz$.

$$\begin{aligned} I_x \frac{dp}{dt} + qr(I_z - I_y) &= M_{Ox}, \\ I_y \frac{dq}{dt} + pr(I_x - I_z) &= M_{Oy}, \\ I_z \frac{dr}{dt} + pq(I_y - I_x) &= M_{Oz}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

Динамические уравнения Эйлера (5.24), и присоединенные к ним кинематические уравнения (5.16), дают замкнутую систему уравнений, из которой находятся углы Эйлера $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\theta(t)$, определяющие положение тела в любой момент времени, и проекции угловой скорости.

Реакция $\vec{R}_O$ найдется из первого уравнения (5.22):

$$\vec{R}_O = M\vec{W}_C - \vec{R}, \quad (5.25)$$

а ускорение центра масс $\vec{W}_C$ выразится через радиус – вектор центра масс $\vec{r}_C = (x_C, y_C, z_C)$ и угловую скорость $\vec{\omega} = (p, q, r)$ в подвижной системе по теореме Ривальса (2.30)

$$\vec{W}_C = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_C + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_C) = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_C + \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_C) - \vec{r}_C \omega^2, \quad \dot{\vec{\omega}} = (\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}). \quad (5.26)$$

Отметим, однако, что задача о движении твердого тела с неподвижной точкой даже под действием одной силы тяжести представляет значительные математические трудности и решена до конца только в трех частных случаях.

1.5.5.2. Элементарная теория гироскопа.

Гироскопом называют твердое тело, совершающее сферическое движение вокруг своей точки O , для которой эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения.

Гироскоп обычно выполняется в виде массивного цилиндра или тора, закрепленного в **кардановом подвесе** (рисунок 5.13) так, что одна из точек его оси остается все время неподвижной. При движении гироскопа обнаруживается целый ряд на первый взгляд парадоксальных явлений, обусловленных его быстрым вращением. Эти явления называют **гироскопическими**. Они возникают всюду, где имеются быстро вращающиеся тела, ось вращения которых может изменять свое направление, и поэтому имеют большое техническое значение.

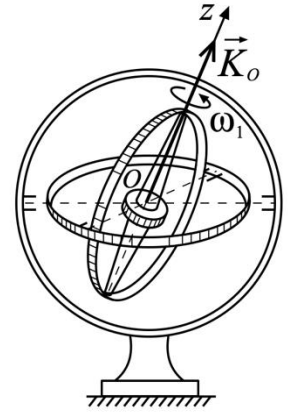


Рисунок 5.13

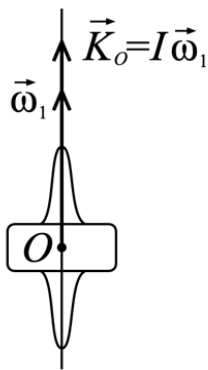


Рисунок 5.14

Точное исследование движения гироскопа представляет собой сложную математическую задачу. Это исследование можно значительно упростить и построить приближенную теорию, когда собственная скорость вращения гироскопа достаточно велика.

Рассмотрим гироскоп, закрепленный так, что его центр тяжести совпадает с неподвижной точкой O его оси симметрии Oz (*свободный* или *уравновешенный* гироскоп) (рисунок 5.14). Пусть $\vec{\omega}_1$ – угловая скорость вращения гироскопа вокруг этой оси. Так $\vec{\omega}_1$ направлена в данном случае по главной

центральной оси инерции, то кинетический момент $\vec{K}_O$ гироскопа относительно точки O будет направлен по той же оси, и при этом согласно формуле (5.8) $\vec{K}_O = I_z \vec{\omega}_1$, где I_z – момент инерции гироскопа относительно его оси. Если никакие внешние силы кроме силы тяжести на гироскоп не действуют, то главный момент внешних сил относительно центра O равен нулю. Тогда по теореме об изменении кинетического момента (5.20) получим $\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O = 0$, а

значит во все время движения $\vec{K}_O = const$. Но так как вектор $\vec{K}_O$ направлен вдоль оси гироскопа, то отсюда следует, **что ось свободного гироскопа сохраняет неизменное направление в пространстве**. На этом свойстве гироскопа основано устройство различных гироскопических стабилизаторов, гироскопических навигационных приборов.

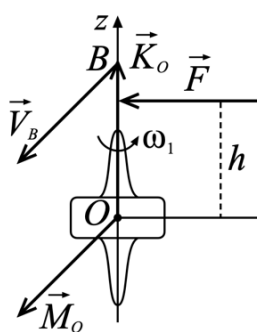
Если на гироскоп действуют какие-нибудь внешние силы, то при его движении, кроме угла φ собственного вращения, будет изменяться также угол прецессии ψ и угол нутации θ , то есть гироскоп будет совершать прецессионное и нутационное движения. Точное исследование движения тяжелого гироскопа показывает, что угловая скорость нутации $\vec{\omega}_3$ очень мала, и угол нутации изменяется в весьма малых пределах. По этой причине нутационным движением оси в элементарной теории гироскопа вообще пренебрегают.

Угловая скорость прецессии $\vec{\omega}_2$ также мала, но при ее наличии ось гироскопа значительно изменяет свое направление, поэтому прецессионное движение в элементарной теории учитывается, и результирующая угловая скорость гироскопа равна $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$. Но так как у быстро вращающегося гироскопа $\omega_1 \gg \omega_2$, то приближенно можно считать, что $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1$, т. е. полагать, что и при наличии прецессии угловая скорость гироскопа в каждый момент времени равна угловой скорости его собственного вращения и направлена по оси симметрии гироскопа. При этом допущении кинетический момент имеет значение $\vec{K}_O = I_z \vec{\omega}_1$ и также направлен в любой момент времени по оси гироскопа, так что *в элементарной теории гироскопа направления векторов $\vec{\omega}_1$, $\vec{K}_O$ совпадают с направлением оси симметрии гироскопа.*

Рассмотрим основные гироскопические эффекты.

1. Действие силы на ось гироскопа.

Пусть на ось быстро вращающегося гироскопа начинает действовать сила $\vec{F}$ (рисунок 5.15), момент которой относительно центра O равен по модулю $M_O = Fh$. Тогда по теореме об изменении кинетического момента



$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O \text{ или } \frac{d\vec{OB}}{dt} = \vec{M}_O,$$

где B – точка оси, совпадающая с концом вектора $\vec{K}_O$. Отсюда, учитывая, что производная от вектора $\vec{OB}$ по времени равна скорости $\vec{V}_B$ точки B , получаем

$$\vec{V}_B = \vec{M}_O. \quad (5.27)$$

Рисунок 5.15

Равенство (5.27) указывает, что скорость конца вектора кинетического момента тела относительно центра O равняется по модулю и по направлению главному моменту внешних сил относительно того же центра (*теорема*

Резаля). Следовательно, точка B , а с нею и ось гироскопа, будет перемещаться по направлению вектора $\vec{M}_O$. В результате находим, что если на ось быстро вращающегося гироскопа подействует сила, то ось начнет отклоняться не в сторону действия силы, а по направлению, которое имеет вектор $\vec{M}_O$ момента этой силы относительно неподвижной точки O гироскопа.

Из равенства (5.27) следует еще один важный результат. Когда действие силы прекращается, то $\vec{M}_O$, а следовательно, и $\vec{V}_B$ обращаются в нули и ось гироскопа останавливается. Таким образом, **гироскоп не сохраняет движения, сообщаемого ему силой**. Если действие силы является кратковременным (толчок), то ось гироскопа практически не изменяет своего направления. В этом проявляется **свойство устойчивости оси быстро вращающегося гироскопа**.

2. Регулярная прецессия тяжелого гироскопа.

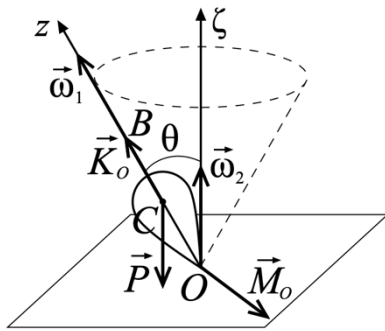


Рисунок 5.16

Рассмотрим гироскоп, у которого неподвижная точка O не совпадает с центром тяжести C (рисунок 5.16). Тогда на ось гироскопа будет все время действовать сила $\vec{P}$, которая будет отклонять ось Oz гироскопа по направлению $\vec{M}_O$, т. е. по направлению, перпендикулярному к плоскости $Oz\zeta$. В результате ось гироскопа начнет вращаться вокруг вертикальной оси $O\zeta$, описывая коническую поверхность. Такое движение оси гироскопа называют **прецессией**.

Найдем угловую скорость прецессии $\vec{\omega}_2$ из равенства (5.27). Очевидно, что скорость $\vec{V}_B$ связана с $\vec{\omega}_2$ соотношением $\vec{V}_B = \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{OB}$ или, поскольку $\overrightarrow{OB} = \vec{K}_O = I_z \vec{\omega}_1$, то $\vec{V}_B = \vec{\omega}_2 \times I_z \vec{\omega}_1$.

В результате приходим к следующему основному равенству, связывающему величины $\vec{M}_O$ и $\vec{\omega}_2$:

$$I_z (\vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1) = \vec{M}_O. \quad (5.28)$$

3. Гироскопический эффект.

Если гироскоп совершает **вынужденную прецессию**, т.е. прецессирует потому, что устройство, с которым скреплена ось гироскопа, вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$, то момент $\vec{M}_O$ будет вызываться силами давления на гироскоп подшипников, в которых закреплена его ось. По закону равенства действия и противодействия ось гироскопа будет давить на подшипники с такими же по величине, но противоположно направленными силами. Эти силы

образуют пару с моментом $\vec{M}_{зир}$, называемым **гироскопическим моментом**, которая будет действовать на устройство, сообщаящее гироскопу вынужденную прецессию. Поскольку $\vec{M}_{зир} = -\vec{M}_O$, то из равенства (5.28) находим $\vec{M}_{зир} = I_z (\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2)$ и численно $M_{зир} = I_z \omega_1 \omega_2 \sin \theta$. (5.29)

Отсюда вытекает следующее **правило Жуковского**: если быстро вращающемуся гироскопу сообщить вынужденное прецессионное движение, то на подшипники, в которых закреплена ось гироскопа, будет действовать пара сил с моментом $\vec{M}_{зир}$, стремящаяся кратчайшим путем установить ось собственного вращения параллельно оси прецессии так, чтобы направления векторов $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$ при этом совпали.

Пример 5.10. Уравновешенный гироскоп в кардановом подвесе имеет собственную угловую скорость $\vec{\omega}_1$ и момент инерции I_z . Он установлен так, что его внутренняя рамка составляет с горизонтальной плоскостью угол α (рисунок 5.17). Определить угловую

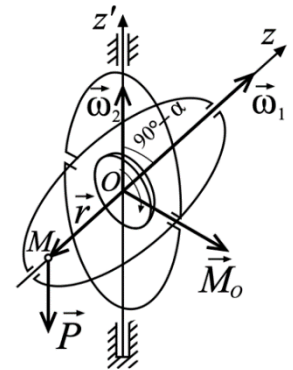


Рисунок 5.17

скорость прецессии, если к оси гироскопа на расстоянии r от центра подвешен груз массой m . Трением и массой рамок пренебречь.

Решение. По формуле (5.28) $I_z (\vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1) = \vec{M}_O = m \overline{OM} \times \vec{g}$. Вектор $\vec{\omega}_1$ направлен по оси гироскопа, вектор $\vec{\omega}_2$ – по неподвижной оси прецессии Oz_1 . Численно будем иметь $mgr \cos \alpha = I_z \omega_1 \omega_2 \cos \alpha$, откуда $\omega_2 = \frac{mgr}{I_z \omega_1}$. Из полученной

формулы следует, что угловая скорость прецессии не зависит от угла наклона α .

Пример 5.11. Определить максимальные гироскопические давления на подшипники быстроходной турбины, установленной на корабле параллельно его продольной оси (рисунок 5.18). Корабль подвержен килевой качке с амплитудой 6° и периодом $T = 8$ сек вокруг оси, перпендикулярной к оси ротора. Ротор турбины массой 4000 кг и радиусом инерции $\rho = 0,6$ м делает 3000 об/мин. Расстояние между подшипниками $l = 2$ м.

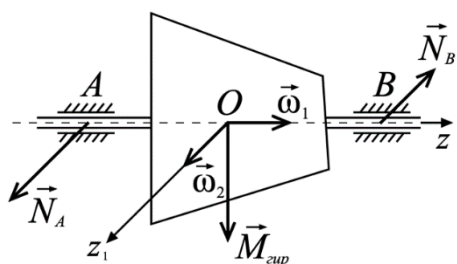


Рисунок 5.18

Решение. Собственная угловая скорость ω_1

равна по величине $\omega_1 = \frac{\pi n}{30} = 100\pi \text{ c}^{-1}$ и

направлена по оси ротора. Прецессией является килевая качка. По условию

$$\varphi = \varphi_0 \sin \frac{2\pi t}{T} = \frac{\pi}{30} \sin \frac{\pi t}{4}, \quad \text{значит} \quad \text{угловая}$$

скорость прецессии $|\omega_2| = |\dot{\varphi}| = \frac{\pi^2}{120} \left| \cos \frac{\pi t}{4} \right|$ и направлена перпендикулярно оси

ротора как на рисунок 5.18, если в данный момент судно поворачивается против часовой стрелки. При изменении направления качки вектор $\vec{\omega}_2$ меняет свое направление на противоположное. По формуле (5.29) $\vec{M}_{\text{гир}} = I_z (\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2)$.

Направление $\vec{M}_{\text{гир}}$ показано на рисунке. Так как $\vec{\omega}_1 \perp \vec{\omega}_2$, $I_z = Mr^2 = 1440 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$,

то $M_{\text{гир}} = I_z \omega_1 \omega_2 = 1200\pi^2 \left| \cos \frac{\pi t}{4} \right| \text{ Н} \cdot \text{м}$. Гироскопический момент $\vec{M}_{\text{гир}}$

обуславливает появление давлений на подшипники A и B. Реакции $\vec{N}_A$ и $\vec{N}_B$ этих подшипников численно равные давлениям, но противоположно им направленные, образуют пару, момент которой уравнивает гироскопический момент. Следовательно, величины реакций будут

$$N_A = N_B = \frac{M_{\text{гир}}}{l} = 600\pi^2 \left| \cos \frac{\pi t}{4} \right| \text{ Н}.$$

Максимальные значения этих величин равны

$$N_{A\text{max}} = N_{B\text{max}} = 600\pi^2 \cong 18,61 \text{ кН}.$$

Пример 5.12. Тяжелый симметричный гироскоп массой m совершает регулярную прецессию вокруг вертикальной оси Oz_1 , причем угловая скорость ω_1 собственного вращения вокруг оси Oz очень велика по сравнению с угловой

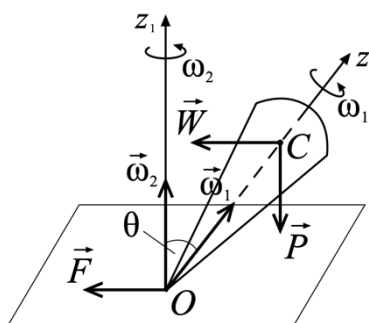


Рисунок 5.19

скоростью прецессии (рисунок 5.19). Найти горизонтальную составляющую силы реакции в неподвижной точке O, если расстояние от точки O до центра тяжести равно z_C , I_z – момент инерции относительно оси z , θ – угол между осями z_1 и z .

Решение. Так как на гироскоп, совершающий регулярную прецессию вокруг оси Oz_1 , действует только сила тяжести mg , то по формуле (5.28)

$M_O = mgz_C \sin \theta = I_{zz} \omega_1 \omega_2 \sin \theta$, откуда находим угловую скорость прецессии $\omega_2 = \frac{mgz_C}{I_{zz} \omega_1}$. Центр тяжести гироскопа движется по окружности радиуса $r = z_C \sin \theta$, значит $W_C = \omega_2^2 r = \frac{m^2 g^2 z_C^3}{I_{zz}^2 \omega_1^2} \sin \theta$. Проектируя теорему о движении центра масс $m\vec{W}_C = m\vec{g} + \vec{R}_O$ на горизонтальную ось, получим $F = mW_C = \frac{m^3 g^2 z_C^3}{I_{zz}^2 \omega_1^2} \sin \theta$.

1.5.6. Удар.

1.5.6.1. Общие теоремы теории удара материальной точки.

Если на материальную точку массой m в течение промежутка времени τ действует сила $\vec{F}$, то скорость точки изменяется в соответствии с теоремой об изменении количества движения:

$$m\vec{V} - m\vec{V}_0 = \int_0^\tau \vec{F} d\tau = \vec{F}_{\text{ср}} \tau. \quad (5.30)$$

Из этого равенства видно, что при малом τ и конечной величине силы ее импульс $\vec{S} = \int_0^\tau \vec{F} d\tau = \vec{F}_{\text{ср}} \tau$, а значит и приращение скорости точки $\Delta \vec{V} = \vec{V} - \vec{V}_0$ будут величинами малыми. Именно такие непрерывные движения изучались в предыдущих разделах.

Однако если в числе действующих сил будут очень большие силы (порядка $1/\tau$), то приращение скорости за малый промежуток времени τ окажется величиной конечной.

Явление, при котором скорости точек тела за очень малый промежуток времени τ изменяются на конечную величину, называется ударом. Силы, под действием которых происходит удар, называют ударными силами. Малый промежуток времени τ , в течение которого происходит удар, называют временем удара.

В дальнейшем будем отличать ударные силы от конечных, действием которых за время удара τ можно пренебречь, так как их импульс является бесконечно малой величиной порядка τ , а, следовательно, и приращение количества движения, вызываемое конечными силами, будет также бесконечно мало.

Ударные силы невозможно измерить методами, приспособленными для измерения сил обычной природы, поэтому они измеряются своими импульсами:

$$\vec{S} = \int_0^{\tau} \vec{F} d\tau.$$

Очевидно, что перемещение точки за время удара будет бесконечно малым. Действительно, умножая обе части равенства (5.30) на dt и интегрируя в интервале от нуля до τ , получим

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 \tau + \frac{1}{m} \int_0^{\tau} \vec{S} dt, \text{ откуда } \Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{V}_0 \tau + \frac{1}{m} \vec{S}_{\text{ср}} \tau.$$

Здесь $\vec{S}_{\text{ср}}$ есть среднее значение ударного импульса за время τ . Учитывая, что $\vec{V}_0$ и $\vec{S}_{\text{ср}}$ величины конечные, а τ бесконечно мало, приходим к выводу, что за время удара перемещение $\Delta \vec{r}$ точки также бесконечно мало.

Равенство (5.30) можно записать в виде

$$\Delta m \vec{V} = \vec{S}. \quad (5.31)$$

и сформулировать его так: **изменение количества движения материальной точки за время удара равно ударному импульсу.**

Равенство (5.31) является **основным уравнением теории удара материальной точки** и играет в этой теории такую же роль, как и основной закон динамики $m \vec{W} = \vec{F}$ при изучении движений под действием неударных сил. С помощью этого уравнения можно определить изменение скорости по заданному ударному импульсу, или наоборот. Уравнение (5.31) является конечным, а не дифференциальным уравнением, поэтому задачи теории удара обычно сводятся к решению конечных уравнений.

Умножив обе части (5.31) векторно слева на $\vec{r}$ и учитывая, что

$$\vec{r} \times \Delta(m \vec{V}) = \Delta(\vec{r} \times m \vec{V}) - \Delta \vec{r} \times m \vec{V} = \Delta(\vec{r} \times m \vec{V}),$$

так как $\Delta \vec{r} = 0$ за время удара, получим

$$\Delta(\vec{r} \times m \vec{V}) = \vec{r} \times \vec{S}, \quad (5.32)$$

Это равенство выражает **теорему об изменении момента количества движения точки при ударе: приращение за время удара момента количества движения точки относительно некоторого центра равно моменту ударного импульса относительно того же центра.**

Что касается аналога классической теоремы об изменении кинетической энергии, то при ударе ее сформулировать нельзя, поскольку перемещением точки за время удара, а значит и работой ударных сил пренебрегают. Вопрос об изменении кинетической энергии при ударе будет исследован в дальнейшем.

1.5.6.2. Удар материальной точки о неподвижную поверхность. Коэффициент восстановления.

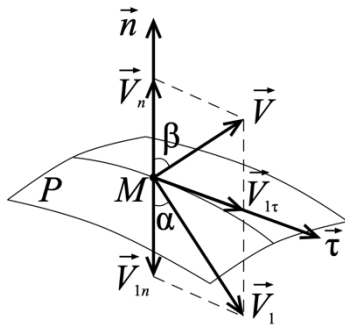


Рисунок 5.20

Предположим, что точка M массой m , движущаяся со скоростью $\vec{V}_1$, ударяется о неподвижную поверхность P (рисунок 5.20). Благодаря мгновенному наложению связи, что создает ударный импульс реакции, точка испытывает удар и мгновенно изменяет свою скорость.

Обозначим $\vec{V}$ – скорость точки в конце удара. Из уравнения (5.30) имеем

$$m\vec{V} - m\vec{V}_1 = \vec{S}. \quad (5.33)$$

Пусть вектор скорости $\vec{V}_1$ в момент начала удара образует угол α с нормалью к поверхности. Будем предполагать **связь идеальной**, следовательно, ударный импульс реакции направлен по нормали: $\vec{S} = \vec{n}S$. Полагая вектор $\vec{V}_1$, а значит, и угол α известными, найдем вектор $\vec{V}$.

Спроектируем равенство (5.33) на направления нормали $\vec{n}$ и касательной $\vec{\tau}$ к поверхности P в точке M (берем ту касательную к поверхности, которая лежит в одной плоскости с вектором $\vec{V}_1$ и нормалью). Получим

$$mV_n - mV_{1n} = S, \quad V_\tau = V_{1\tau}. \quad (5.34)$$

Второе уравнение показывает, что касательная составляющая скорости при ударе не изменяется, а первое уравнение содержит две неизвестные величины V_n и S . Следовательно, задача определения скорости точки после удара не может быть решена на основании простейших допущений о свойствах связей, которые использовались в предыдущей части курса. Здесь придется принимать во внимание физические свойства материала связи.

В своих исследованиях Ньютон показал, что отношение нормальных проекций скоростей V_n и V_{1n} зависит лишь от упругих свойств материалов соударяющихся тел. Величина

$$k = \frac{|V_n|}{|V_{1n}|} \quad (5.35)$$

называется **коэффициентом восстановления при ударе**. В рассматриваемом случае из (5.35) следует, что

$$V_n = -kV_{1n}. \quad (5.36)$$

Отрицательный знак показывает свойство связи вызывать изменение направления нормальной составляющей скорости.

Если $k=0$, то $V_n=0$, и удар о поверхность называется **абсолютно неупругим**. Если $k=1$ и $V_n=-V_{1n}$, то удар точки о поверхность называется **абсолютно упругим**; при $0 < k < 1$ говорят о **несовершенно упругом ударе**.

Соотношения (5.34) и (5.36) позволяют найти проекцию ударного импульса S :

$$S = -m(1+k)V_{1n}.$$

Из построений рисунок 5.20 и равенств (5.35), (5.36) находим связь между углом падения α и углом отражения β

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = k, \quad (5.37)$$

которую можно использовать для экспериментального определения коэффициента восстановления.

1.5.6.3. Изменение кинетической энергии точки при ударе.

Определим изменение кинетической энергии точки при мгновенном наложении идеальной связи, описанной в предыдущем пункте. Проекции скоростей до и после удара связаны соотношениями

$$\vec{V}_n = -k\vec{V}_{1n}, \quad \vec{V}_\tau = \vec{V}_{1\tau},$$

следовательно, потеря точкой кинетической энергии будет равна:

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV^2}{2} = \frac{m}{2}(V_{1n}^2 + V_{1\tau}^2 - V_n^2 - V_\tau^2) = \frac{m}{2}(V_{1n}^2 - V_n^2) = \frac{m}{2}(1-k^2)V_{1n}^2. \quad (5.38)$$

Потерянная точкой при ударе скорость

$$\vec{V}_{\text{потер}} = \vec{V}_1 - \vec{V} = \vec{V}_{1n} - \vec{V}_n = (1+k)\vec{V}_{1n},$$

откуда находим

$$V_{1n}^2 = \frac{1}{(1+k)^2}(\vec{V}_1 - \vec{V})^2$$

и формула (5.38) запишется в виде

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV^2}{2} = \frac{1-k}{1+k} \frac{m}{2} (\vec{V}_1 - \vec{V})^2, \quad (5.39)$$

т.е. кинетическая энергия, теряемая точкой при ударе, равна $\frac{1-k}{1+k}$ доле кинетической энергии, соответствующей потерянной скорости.

Соотношение (5.39) является обобщением **теоремы Карно**, которая была сформулирована для абсолютно неупругого удара. Действительно, при $k=0$ из (5.39) получаем, что кинетическая энергия, потерянная точкой при мгновенном

наложении на нее идеальной абсолютно неупругой связи равна кинетической энергии, которую имела бы точка, двигаясь с потерянной скоростью $\vec{V}_1 - \vec{V}$.

1.5.6.4. Общие теоремы динамики системы при ударе.

Разделим все ударные импульсы, действующие на n материальных точек системы, на внутренние и внешние. Тогда, согласно (5.31) для каждой точки с массой m_k будет справедливо равенство

$$\Delta(m_k \vec{V}_k) = \vec{S}_k^e + \vec{S}_k^i, \quad k = \overline{1, n}, \quad (5.40)$$

где $\vec{S}_k^e$, $\vec{S}_k^i$ – внешние и внутренние ударные импульсы, действующие на точку с массой m_k . Складывая все уравнения (5.40), получим

$$\sum_k \Delta(m_k \vec{V}_k) = \sum_k \vec{S}_k^e + \sum_k \vec{S}_k^i, \text{ или } \Delta \vec{Q} = \Delta \sum_k m_k \vec{V}_k = \sum_k \vec{S}_k^e + \sum_k \vec{S}_k^i,$$

где $\vec{Q}$ – количество движения системы.

Так как по свойству внутренних сил $\sum_k \vec{S}_k^i = 0$, приходим к следующему результату:

$$\Delta \vec{Q} = M \Delta \vec{V}_C = \sum_k \vec{S}_k^e. \quad (5.41)$$

Это равенство выражает **теорему об изменении количества движения системы при ударе**: изменение количества движения системы за время удара равно сумме всех внешних ударных импульсов, приложенных к системе.

Следовательно, при отсутствии внешних ударных импульсов, когда удар происходит вследствие действия внутренних ударных сил, количество движения системы не меняется.

Умножим теперь обе части равенств (5.40) векторно слева на радиус-вектор $\vec{r}_k$ точки с массой m_k , проведенный из некоторого центра O , и просуммируем эти равенства для всех точек системы. Тогда получим

$$\sum_k (\vec{r}_k \times \Delta(m_k \vec{V}_k)) = \sum_k (\vec{r}_k \times \vec{S}_k^e) + \sum_k (\vec{r}_k \times \vec{S}_k^i). \quad (5.42)$$

Так как $\Delta \vec{r}_k = 0$, $k = \overline{1, n}$ при ударе, то $\sum_k (\vec{r}_k \times \Delta(m_k \vec{V}_k)) = \Delta \sum_k (\vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k)$ и учитывая свойства внутренних сил (5.42) можно записать в виде:

$$\Delta \vec{K}_O = \sum_k \overrightarrow{\text{mom}}_O \vec{S}_k^e, \quad (5.43)$$

где $\vec{K}_O = \sum_k (\vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k)$ – кинетический момент системы относительно некоторого центра O , $\sum_k \overrightarrow{\text{мом}}_O \vec{S}_k^e = \sum_k (\vec{r}_k \times \vec{S}_k^e)$ – сумма моментов относительно того же центра всех внешних ударных импульсов.

Результат, который дает равенство (5.43), выражает **теорему об изменении момента количества движения системы при ударе**: изменение за время удара кинетического момента системы, взятого относительно некоторого центра, равно сумме моментов относительно того же центра всех внешних ударных импульсов.

Так как перемещениями точек системы за время удара пренебрегают, то доказанная теорема справедлива относительно любого центра, связанного или не связанного с системой.

Записывая равенства (5.39) для каждой точки системы и суммируя их при условии, что коэффициент восстановления для всех точек одинаков, найдем изменение в результате удара кинетической энергии системы.

1.5.6.5. Прямой центральный удар двух тел.

Если центры масс двух соударяющихся тел лежат на общей нормали к их поверхностям в точке удара, то такой удар называется **центральный**, если же скорости центров масс в начале удара направлены по общей нормали к поверхностям тел в точке удара, то удар называется **прямым**.

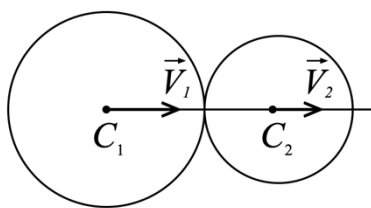


Рисунок 5.21

Рассмотрим прямой центральный удар двух шаров массами m_1 и m_2 . Направим нормаль $\vec{n}$ от C_1 к C_2 (рисунок 5.21) и обозначим V_1 и V_2 проекции на $\vec{n}$ скоростей центров масс до удара, а U_1 и U_2 – их проекции после удара. Считая известными коэффициент восстановления k и скорости центров масс V_1 , V_2 до удара, определим их скорости после удара и действующий на тела ударный импульс.

На рассматриваемую систему двух тел не действуют никакие внешние ударные силы, удар происходит вследствие внутренних ударных сил и, согласно (5.41), количество движения системы не меняется, значит

$$m_1 U_1 + m_2 U_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2.$$

Коэффициент восстановления равен модулю отношения разностей скоростей после и до удара

$$k = \left| \frac{U_2 - U_1}{V_2 - V_1} \right| = -\frac{U_2 - U_1}{V_2 - V_1},$$

так как очевидно, что $V_1 \geq V_2$ и $U_2 \geq U_1$.

Решая полученную систему уравнений, найдем

$$U_1 = V_1 - (1+k) \frac{m_2}{m_1 + m_2} (V_1 - V_2), \quad U_2 = V_2 + (1+k) \frac{m_1}{m_1 + m_2} (V_1 - V_2). \quad (5.44)$$

Запишем теперь равенство (5.41) в проекции на нормаль для первого тела

$$m_1(U_1 - V_1) = S_{21}, \quad (5.45)$$

где S_{21} – ударный импульс, действующий на первое тело со стороны второго и по закону равенства действия и противодействия $S_{21} = -S_{12} = S$.

Подставляя в (5.45) U_1 из первого равенства (5.44), получим

$$S = -(1+k) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (V_1 - V_2). \quad (5.46)$$

Если удар абсолютно упругий ($k=1$), то из (5.44), (5.46) получим

$$U_1 = V_1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2} (V_1 - V_2), \quad U_2 = V_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} (V_1 - V_2), \quad (5.47)$$

$$S = -\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} (V_1 - V_2), \quad (5.48)$$

Из (5.47) видно, что при $m_1 = m_2$: $U_1 = V_2$, $U_2 = V_1$, значит при абсолютно упругом ударе тела равной массы обмениваются скоростями.

Если удар абсолютно неупругий ($k=0$), то из (5.44), (5.46) получим

$$U_1 = U_2 = \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2}, \quad S = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (V_1 - V_2),$$

и тела после удара будут двигаться с одинаковыми скоростями, а ударный импульс при абсолютно неупругом ударе оказывается вдвое меньшим, чем при абсолютно упругом.

Пример 5.13. Два тела с массами m_1 и m_2 и коэффициентом восстановления k движутся поступательно в одном и том же направлении. Каковы должны быть их скорости V_1 и V_2 , чтобы после удара догоняющее тело M_1 остановилось, а тело M_2 получило бы заданную скорость U_2 ?

Решение. Для решения задачи достаточно положить в формулах (5.44)

$U_1 = 0$, а U_2 считать заданной. Разрешая полученную систему относительно V_1 , V_2 , найдем

$$V_1 = \frac{1+k}{k} \frac{m_2}{m_1 + m_2} U_2, \quad V_2 = \frac{m_1 - km_2}{k(m_1 + m_2)} U_2.$$

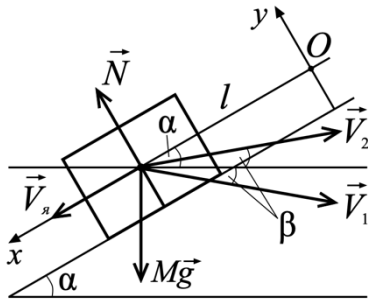


Рисунок 5.22

Пример 5.14. По наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, начинает соскальзывать без трения ящик с песком массой M . В тот момент, когда ящик прошел путь l , в него попало тело массой m , скорость которого направлена под углом β к горизонту. Ящик при этом остановился. С какой скоростью двигалось тело? Сколько решений имеет задача?

Решение. Очевидно, задача имеет два решения, т.к. скорость тела может быть $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$ (рисунок 5.22), $V_1 = V_2 = V$.

Поскольку при ударе тела в ящик внешние ударные импульсы отсутствуют, то $\vec{Q} = \vec{Q}_0 = 0$, т.к. система в результате удара остановилась. В проекции на ось x получим $MV_y - mV \cos(\alpha \pm \beta) = 0$.

Определяя скорость ящика до удара V_y по теореме об изменении кинетической энергии $\frac{MV_y^2}{2} - 0 = Mgl \sin \alpha$, находим $V_y = \sqrt{2gl \sin \alpha}$, откуда получаем скорость тела до удара $V = \frac{M \sqrt{2gl \sin \alpha}}{m \cos(\alpha \pm \beta)}$.

Пример 5.15. Молот массой $m_1 = 100$ кг свободно падает с высоты $h = 2$ м на сваю, масса которой $m = 25$ кг. Считая удар неупругим, определить потерю кинетической энергии и коэффициент полезного действия молота. После удара свая погружается, встречая сопротивление грунта F_c . Определить величину перемещения сваи, предполагая, что $F_c = \text{const} = 40,5$ кН.

Решение. В момент удара молот имеет скорость $V_0 = \sqrt{2gh}$.

Поскольку ударный импульс между молотом и свайей внутренний, имеет место закон сохранения количества движения при ударе: $\vec{Q}_1 = \vec{Q}_0$. В проекции на вертикаль: $(m + m_1)V_1 = m_1V_0$, откуда находим общую скорость молота и сваи после удара $V_1 = V_0 \frac{m_1}{m + m_1}$.

Потеря кинетической энергии:

$$\Delta T = T_0 - T_1 = \frac{m_1 V_0^2}{2} - \frac{(m + m_1)}{2} V_1^2 = \frac{V_0^2}{2} \frac{m m_1}{m + m_1} = g h \frac{m m_1}{m + m_1} = 40g \approx 392(\text{дж}).$$

$$K.n.\partial. = \frac{T_1}{T_0} = \frac{(m_1 + m) V_1^2}{m_1 V_0^2} = \frac{(m_1 + m) V_0^2 m_1^2}{(m_1 + m)^2 m_1 V_0^2} = \frac{m_1}{m_1 + m} = 0,8.$$

Величину s перемещения сваи определим по теореме об изменении кинетической энергии на этапе движения после удара до остановки $0 - T_1 = ((m + m_1)g - F_C)s$, откуда находим

$$s = \frac{T_1}{F_C - (m + m_1)g} = \frac{m_1^2 g h}{(m + m_1)(F_C - (m + m_1)g)} \cong 0,04(\text{м}).$$

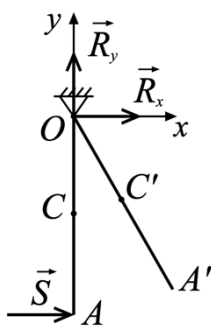


Рисунок 5.23

Пример 5.16. Однородный стержень OA массой m и длиной l может вращаться вокруг горизонтальной неподвижной оси O . Стержень находится в покое в вертикальном положении. Какой величины ударный импульс нужно приложить в точке A перпендикулярно стержню, чтобы он отклонился на заданный угол α (рисунок 5.23). Найти также импульс ударной реакции шарнира. Сопротивлением пренебечь.

Решение. По теореме об изменении кинетического момента за время удара (5.43): $I_0 \omega_1 = S l$, где ω_1 – угловая скорость после

удара. Так как $I_0 = \frac{m l^2}{3}$, то $\omega_1 = \frac{3S}{m l}$. Для описания вращения стержня после удара

применим теорему об изменении кинетической энергии:

$$0 - \frac{1}{2} I_0 \omega_1^2 = -m g \frac{l}{2} (1 - \cos \alpha). \text{ Подставляя в это равенство найденное значение } \omega_1$$

$$\text{, получим } S = m \sqrt{\frac{g l (1 - \cos \alpha)}{3}}.$$

По теореме об изменении количества движения за время удара (5.41) в проекциях на оси: $m V_C = R_x + S$, $R_y = 0$, где $V_C = \omega_1 \frac{l}{2}$ – скорость центра масс

$$\text{стержня после удара, найдем } R_x = \frac{3}{2} S - S = \frac{S}{2}.$$

2. ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ.

2.1. Темы индивидуальных заданий для УСР.

1 семестр.

Тема № 1.6. Частные случаи систем сил и их условия равновесия.

Система сходящихся сил, плоская система сил. Пара сил, момент пары. Эквивалентные формы условий равновесия для плоской системы сил. Статически определимые и статически неопределимые системы. Общий план решения задач статики.

Задание 1. Равновесие составной конструкции с учетом сил трения. (2 ч)

Форма контроля – отчет по индивидуальному заданию.

Тема № 1.8. Элементы и инварианты приведения.

Динамический винт, центральная винтовая ось. Приведение системы к двум силам. Общие выводы, случаи приведения.

Задание 2. Приведение системы сил к простейшему виду и определение реакций опор твердого тела. (2 ч)

Форма контроля – отчет по индивидуальному заданию.

2 семестр.

Тема 2.3. Ускорение точки. Разложение ускорения по осям естественного трехгранника.

Ускорение в круговом движении. Равномерное и равнопеременное движение.

Задание 1. Составление уравнений движения точки и определение ее скорости и ускорения. (2 ч)

Форма контроля – отчет по индивидуальному заданию.

Тема 3.2. Плоскопараллельное движение тела. Геометрическое и аналитическое исследование движения плоской фигуры в ее плоскости. Скорости и ускорения точек тела в плоском движении. Мгновенный центр скоростей. Центроиды. Мгновенный центр ускорений.

Задание 2. Определение скоростей и ускорений точек многозвенного механизма. (4 ч)

Форма контроля – отчет по индивидуальному заданию.

Тема 3.3. Движение твердого тела около неподвижной точки. Теорема Даламбера-Эйлера. Аксоиды. Скорости и ускорения точек тела в сферическом движении. Теорема Ривальса. Углы Эйлера. Кинематические уравнения Эйлера.

Задание 3. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела, имеющего неподвижную точку. (2 ч)

Форма контроля – отчет по индивидуальному заданию.

Тема 3.6. Сложное движение точки. Теорема о сложении скоростей. Теорема Кориолиса.

Задание 4. Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки в сложном движении. (2 ч)

Форма контроля – отчет по индивидуальному заданию.

3 семестр.

Тема 4.4. Прямолинейные колебания точки. Свободные, затухающие, вынужденные колебания. Резонанс.

Задание 1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки. (4 ч)

Форма контроля – отчет по индивидуальному заданию.

Тема 4.5. Движение точки в поле центральных сил. Законы Кеплера. Формулы Бинэ. Закон всемирного тяготения. Задача Ньютона. Уравнение Кеплера. Искусственные спутники Земли. Баллистические траектории.

Задание 2. Динамика космического полета. (4 ч)

Форма контроля – отчет по индивидуальному заданию.

Тема 5.2. Общие теоремы динамики системы и их первые интегралы: Теорема о движении центра масс, теорема об изменении главного вектора количества движения, теорема об изменении кинетического момента, теорема об изменении кинетической энергии.

Задание 3. Применение теоремы об изменении количества движения и о движении центра масс к исследованию движения механической системы. (4 ч)

Форма контроля – отчет по индивидуальному заданию.

Задание 4. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы. (4 ч)

Форма контроля – отчет по индивидуальному заданию.

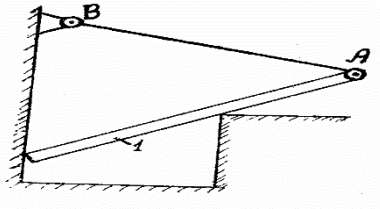
2.2. Примеры контрольных работ и тестовых заданий

Примеры контрольных работ и проверочных тестов

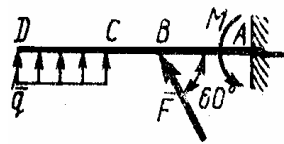
Проверочные тесты по статике

Карта № 1.

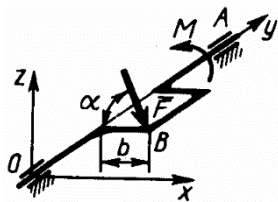
1) Пара сил. Момент пары (направление, величина, точка приложения).



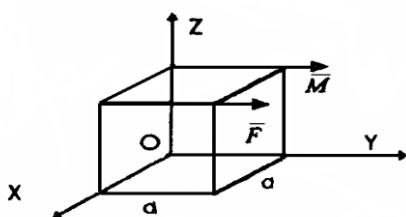
2) Изобразите реакции связей, наложенных на тело 1. Все поверхности гладкие, АВ - невесомый стержень, А и В - шарниры.



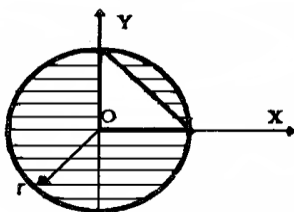
3) Определить интенсивность q распределенной нагрузки, при которой момент в заделке А равен $546 \text{ Н}\cdot\text{м}$, если сила $F = 173 \text{ Н}$, момент пары сил $M = 42 \text{ Н}\cdot\text{м}$, размеры $AB = CD = 2 \text{ м}$, $BC = 1 \text{ м}$.



4) К коленчатому валу ОА в точке В под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту приложена сила $F = 10 \text{ Н}$, которая уравнивается парой сил с моментом M . Определить модуль момента, если сила $\vec{F} \parallel Oxz$ и $b = 0,9 \text{ м}$.



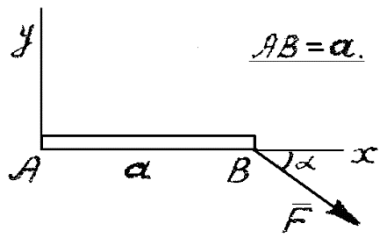
5) На куб со стороной $a = 1 \text{ м}$ действует сила $F = 10 \text{ Н}$ и пара сил с моментом $M = 20 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Привести систему к простейшему виду, выбрав за центр приведения точку О.



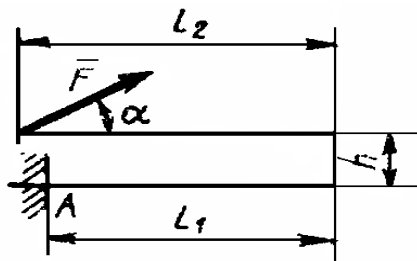
6) Определить центр тяжести фигуры с треугольным вырезом, изображенной на рисунке, если радиус $r = 2 \text{ м}$.

Карта № 2

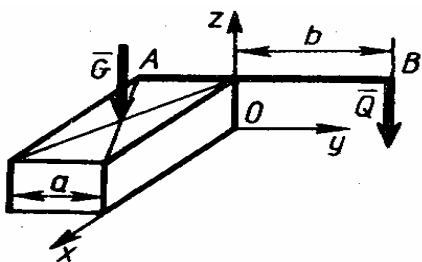
1) Несвободное твердое тело. Аксиома связей.



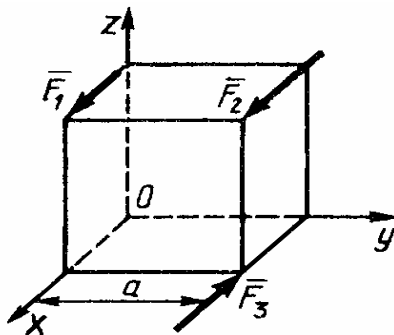
2) Вычислить проекцию силы F на оси X, Y и ее момент относительно центра A .



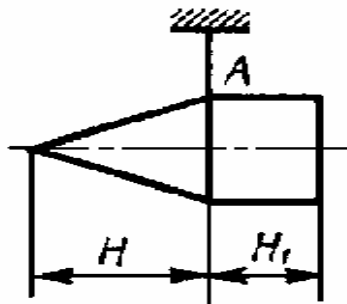
3) Определить в кН·м момент в заделке A , если сила $F = 80$ кН, угол $\alpha = 30^\circ$, расстояния $l_1 = 1,8$ м, $l_2 = 2$ м, $h = 0,4$ м.



4) К параллелепипеду параллельно оси Oy приложена уравновешенная система сил $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 10$ Н и $F_5 = 40$ Н. Определить расстояние b силы $\bar{F}_5$ от плоскости Oyz , если ребро $a = 0,4$ м.



5) Определить модуль силы $\bar{F}_3$, при которой система сил, приложенная к кубу, приводится к паре сил, если дано $F_2 = 2F_1 = 10$ Н, $a = 1$ м.

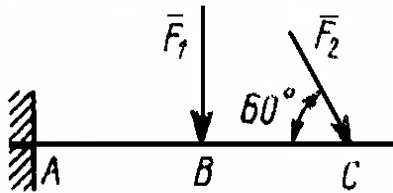


6) Определить высоту H однородного конуса, при которой ось симметрии тела, состоящего из конуса и однородного цилиндра и подвешенного в точке A , будет горизонтальной. Высота $H_1 = 0,3$ м.

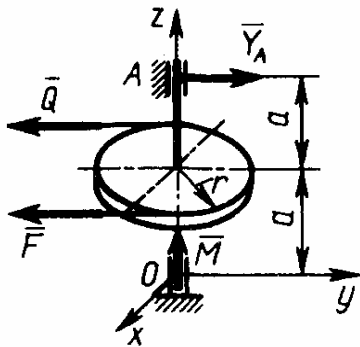
Карта № 3.

1) Теорема о трех силах.

2) Найти проекцию силы $\vec{F}(-2;1;3)$ на ось, задаваемую вектором $\vec{l}(2;3;-2)$.

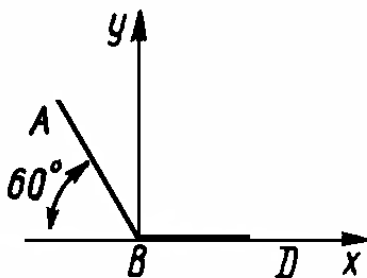


3) Определить момент в заделке А, если $F_1 = 50$ Н, $F_2 = 100$ Н, размеры $AB = BC = 2$ м.



4) Сила $F = 2Q = 120$ Н, приложенная к шкиву, уравнивается парой сил с моментом $M = 18$ Н·м. Составив уравнение моментов сил относительно оси Ox , определить реакцию $\bar{Y}_A$ подшипника А, если радиус шкива $r = 0,3$ м, $a = 0,3$ м и сила $\bar{F} \parallel \bar{Q} \parallel Oy$.

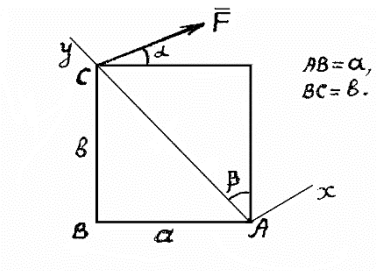
5) Приводится (да) или не приводится (нет) к равнодействующей система сил, для которой главный вектор $\bar{R} = 3\bar{i} + 10\bar{j} + 7\bar{k}$ и главный момент относительно центра $AM_A = 7\bar{i} - 3\bar{k}$.



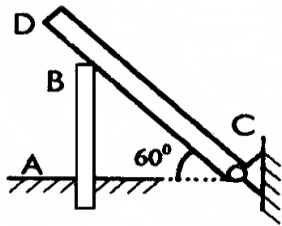
6) Кронштейн ABD состоит из однородных стержней AB и BD с одинаковым линейным весом. Какова должна быть длина в см стержня AB , чтобы координаты x_C центра тяжести кронштейна равнялась нулю, если $BD = 20$ см.

Карта № 4.

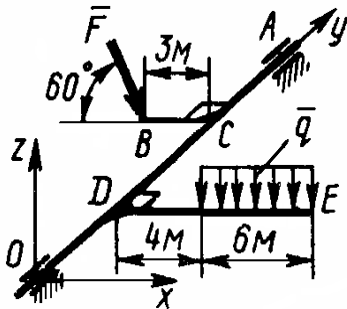
1) Законы трения скольжения.



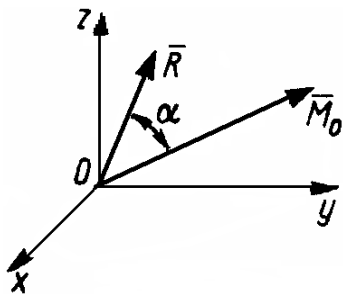
2) Вычислить проекцию силы $\vec{F}$ на оси X, Y и ее момент относительно центра A .



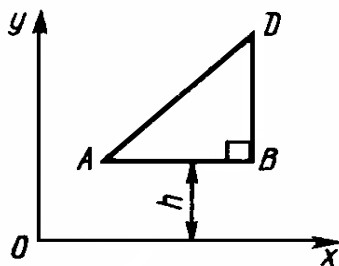
3) Однородный стержень DC весом 300 Н опирается на вертикальную стойку AB . Определить момент в заделке A , если $CB=1$ м, $CD=1.4$ м.



4) К валу OA под прямым углом прикреплены стержни BC и DE приложена распределенная нагрузка $q = 0,5$ Н/м. Определить модуль силы $\vec{F}$, уравнивающей данную нагрузку, если $\vec{F} \parallel Oyz$.



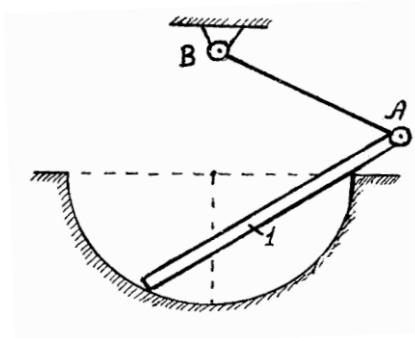
5) В центре приведения O главный вектор $R = 15$ Н и главный момент $M_o = 60$ Н·м образуют угол $\alpha = 60^\circ$. Определить момент динамы.



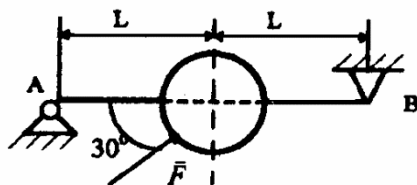
6) При каком расстоянии h от однородной пластины, которая имеет вид прямоугольного треугольника ABD , до оси Ox координата y_c центра тяжести пластины равна 0,3?

Карта № 5.

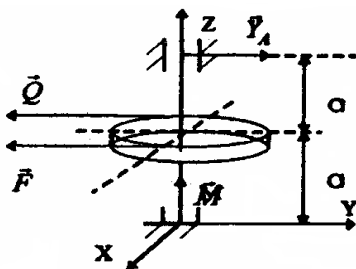
1) Момент силы относительно центра.



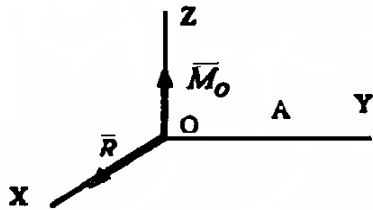
2) Изобразите реакции связей, наложенных на тело
1. Все поверхности гладкие, AB - невесомый стержень, A и B - шарниры.



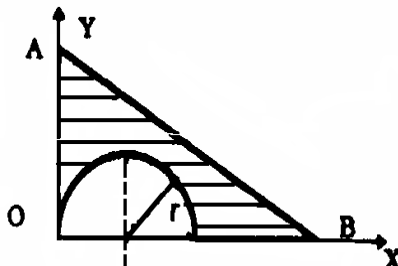
3) Стержень AB жестко связан с диском. Определить реакцию опоры B , если сила $F = 24$ кН.



4) Сила $F = 2Q = 120$ Н, приложенная к шкиву, уравнивается парой сил с моментом $M = 20$ Нм. Определить реакцию Y_A подшипника A , если радиус шкива $r = 0.5$ м, $a = 0.3$ м и сила $F \parallel Q \parallel O_y$.



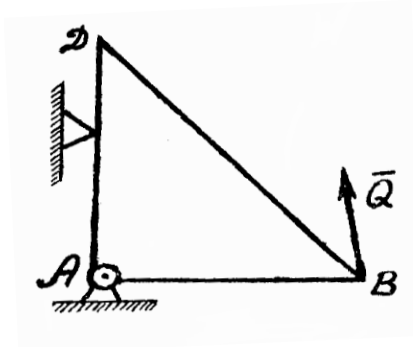
5) В центре приведения O главный вектор $R = 5$ Н, главный момент $M_o = 25$ Нм. Определить значение главного момента в центре приведения A , если $OA = 1$ м.



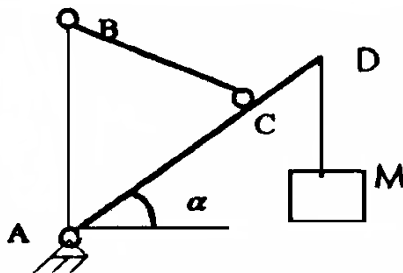
6) Из однородной пластины в виде треугольника OAB с основанием $OB = 60$ см и высотой $OA = 45$ см вырезан полукруг радиуса $r = 20$ см. Определить координату центра тяжести x_c оставшейся части треугольника.

Карта № 6.

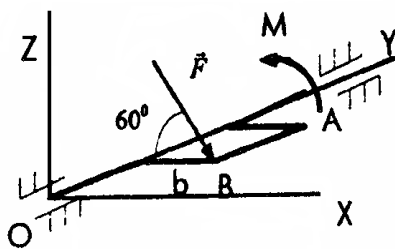
1) Момент силы относительно оси.



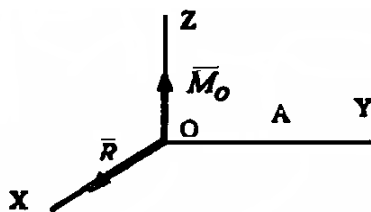
2) Пренебрегая весом тела ABD , показать, как направлена реакция шарнира A .



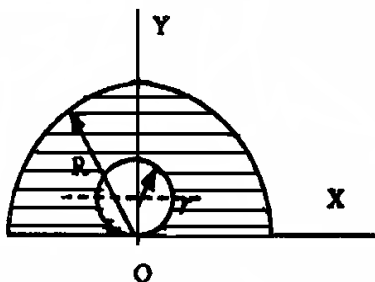
3) Стрела AD весом 3 кН укреплена шарнирно в точке A и поддерживается под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту тросом BC , причем $AC = BC = 0.6 AD$. Определить предельный вес P груза M , если трос выдерживает усилие 27.5 кН .



4) К коленчатому валу OA в точке B приложена сила $F = 20 \text{ Н}$, которая уравнивается парой сил с моментом M . Определить модуль момента, если сила F расположена в плоскости, параллельной плоскости XOZ и $b = 0.9 \text{ м}$.



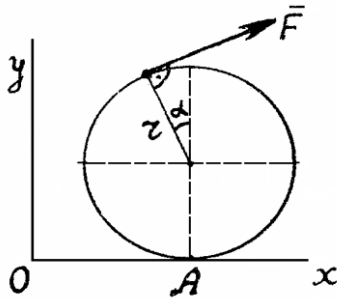
5) В центре приведения O определены главный вектор $R = 15 \text{ Н}$ и главный момент $M_O = 30 \text{ кНм}$. Вычислить значение главного момента в центре приведения A , если $OA = 2 \text{ м}$.



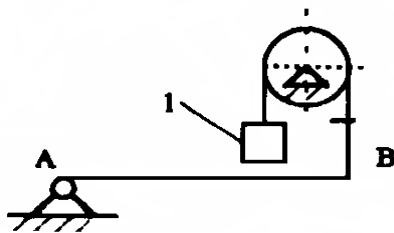
6) Определить координату центра тяжести фигуры y_c , изображенной на рисунке, если даны радиусы окружностей $R = 0.99 \text{ м}$ и $r = 0.33 \text{ м}$.

Карта № 7.

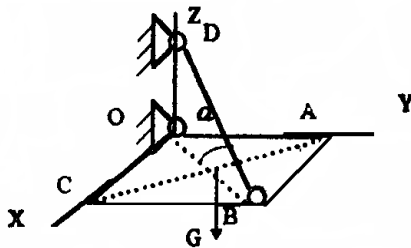
1) Теорема о сложении пар сил.



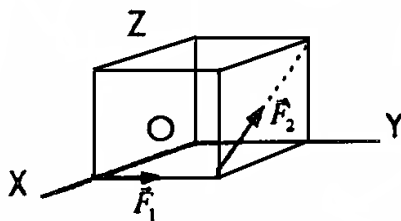
2) Вычислить проекцию силы $\vec{F}$ на оси X, Y и ее момент относительно центра A .



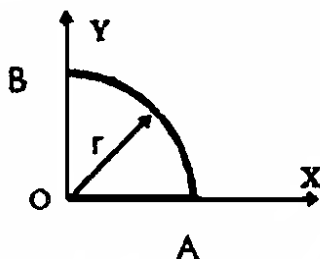
3) Определить вес груза 1, необходимый для того, чтобы однородная балка AB весом 400 Н в положении равновесия была горизонтальна.



4) Однородная квадратная плита $OABC$ весом $G = 30 \text{ Н}$ удерживается в горизонтальном положении шарнирами O, A и тросом BD . Определить натяжение троса, если размер стороны плиты $a = 6 \text{ м}$ и угол $ODB = 60^\circ$.



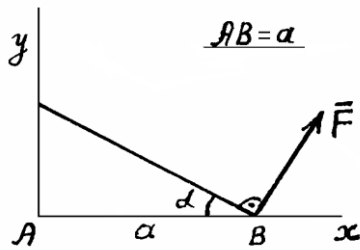
5) На куб с ребром $a = 4 \text{ м}$ действуют две силы $F_1 = 8 \text{ Н}$ и $F_2 = 16 \text{ Н}$. Определить модуль главного момента, выбрав за центр приведения точку O .



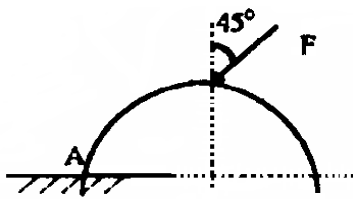
6) Определить в см координату y_c центра тяжести куска однородной проволоки, состоящей из прямолинейного отрезка OA и дуги окружности радиуса $r = 20 \text{ см}$.

Карта № 8.

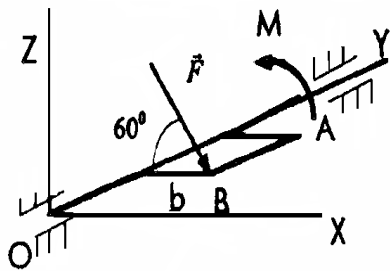
1) Равнодействующая и главный вектор системы сил.



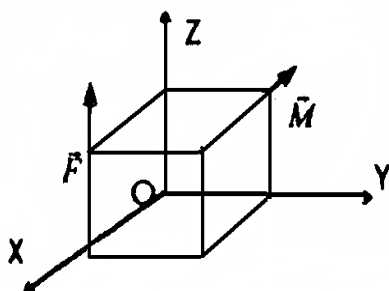
2) Вычислить проекции силы $\vec{F}$ на оси x , y и ее момент относительно центра A .



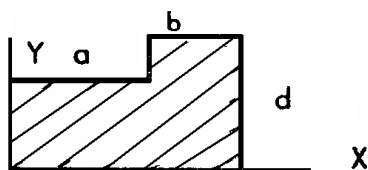
3) Арка, имеющая форму полуокружности, жестко заделана в точке A . Определить момент в заделке, если сила $F = 100$ Н.



4) К коленчатому валу OA в точке B приложена сила $F = 10$ Н, которая уравнивается парой сил с моментом M . Определить модуль момента, если сила F расположена в плоскости, параллельной плоскости XOZ и $b = \sqrt{3}$ м.



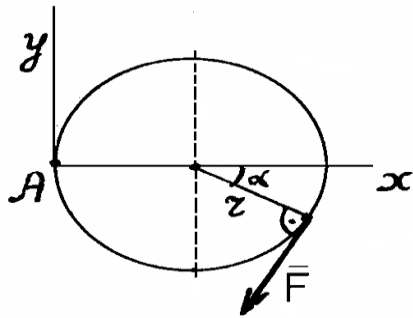
5) На куб со стороной $a = 1$ м действует сила $F = 20$ Н и пара сил с моментом $M = 10$ Нм. Привести систему к простейшему виду, выбрав за центр приведения точку O .



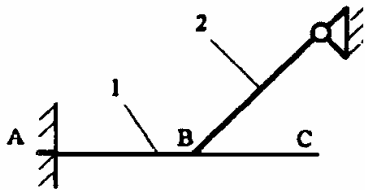
6) Определить координаты центра тяжести пластинки, $a = 2b = d$.

Карта № 9.

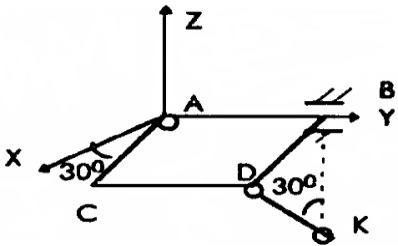
1) Динама.



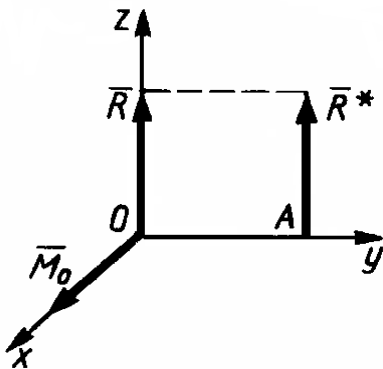
2) Вычислить проекции силы $\vec{F}$ на оси x , y и ее момент относительно центра A .



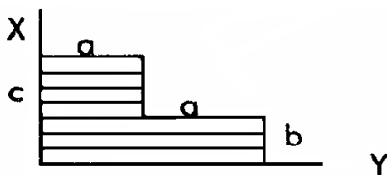
3) Однородный брус 2 весом 400 Н свободно опирается в точке B на однородную балку 1. Чему должен равняться вес балки 1 для того, чтобы момент в заделке A был равен $M_A = 265$ Нм, если размеры $AB = 1$ м, $BC = 0.8$ м.



4) Квадратная однородная пластинка весом $G = 20$ кН находится в равновесии, KD -идеальный стержень. Определить усилие в стержне.



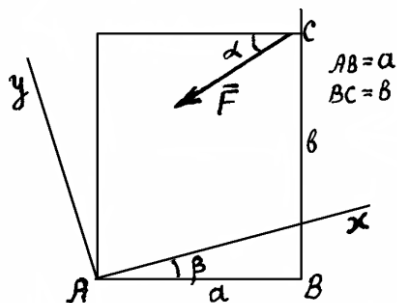
5) На каком расстоянии OA от точки O расположена равнодействующая $\vec{R}^*$ системы сил, если главный вектор $R = 8$ Н и главный момент $M_O = 26$ Н·м взаимно перпендикулярны.



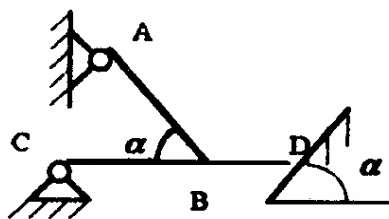
6) Найти координаты центра тяжести пластинки, $c = 2a = 4b$.

Карта № 10.

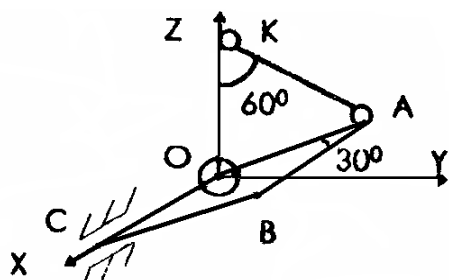
1) Лемма о параллельном переносе силы.



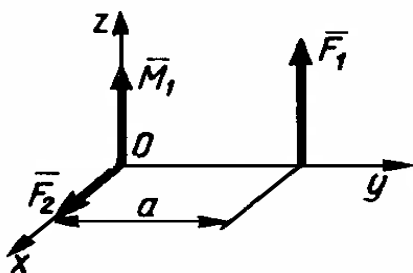
2) Вычислить проекции силы $\vec{F}$ на оси x , y и ее момент относительно центра A .



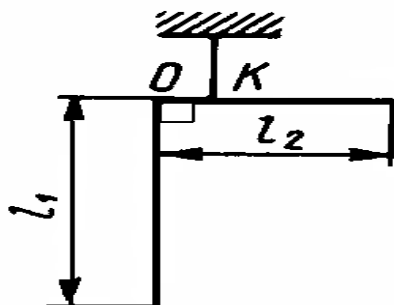
3) Однородная балка AB , вес которой 200 Н , свободно опирается в точке B на горизонтальную балку CD . Определить, с какой силой балка CD действует на гладкую опорную поверхность в точке D , если угол $\alpha = 60^\circ$, $CB = DB$. Весом балки CD пренебречь.



4) Однородная квадратная пластина со стороной a и весом $G = 10 \text{ кН}$ находится в равновесии, в точке O - шаровой шарнир, AK -- идеальный стержень. Определить усилие в стержне.



5) Определить угол между главным вектором и моментом данной системы сил, принимая за центр приведения точку O , если расстояние $a = 1 \text{ м}$, момент пары сил $M_1 = 1 \text{ Н}\cdot\text{м}$, сила $F_1 = F_2 = 1 \text{ Н}$.



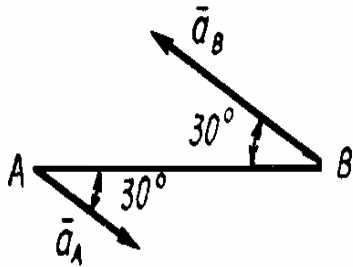
6) Однородная проволока, согнутая под прямым углом, подвешена, как показано на рисунке. Определить отношение l_1/l_2 , при котором отрезок длиной l_2 будет находиться в горизонтальном положении, если $OK = 0,2l_2$.

Проверочные тесты по кинематике

Карта № 1.

1) Способы описания движения точки.

2) Определить нормальное ускорение точки в момент времени, когда ускорение точки $a = 1,5 \text{ м/с}^2$, а угол между векторами ускорения и скорости равен 65° .



3) Стержень длиной $AB = 40 \text{ см}$ движется в плоскости чертежа. В некоторый момент времени точки A и B стержня имеют ускорения $a_A = 2 \text{ м/с}^2$ и $a_B = 6 \text{ м/с}^2$. определить угловое ускорение стержня.

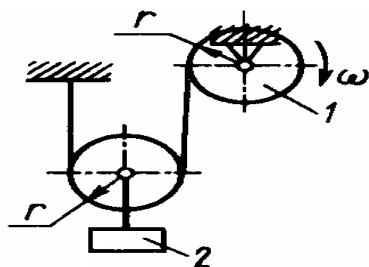
4) При сферическом движении тела в некоторый момент времени его угловая скорость $\vec{\omega} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$. Определить в этот момент времени скорость точки A , имеющей координаты $x_A = 0$, $y_A = 0$, $z_A = 0,5 \text{ м}$.

5) Точка M движется от начала координат со скоростью $v = 2 \text{ м/с}$ по стержню, образующему угол 30° с вертикальной осью вращения Oz . Угловая скорость $\omega = 4 \text{ рад/с}$. Определить проекцию на ось Ox кориолисова ускорения точки M , когда стержень находится в плоскости Oyz .

Карта № 2.

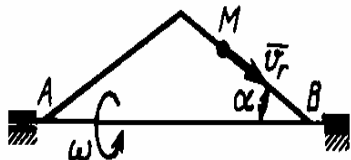
1) Скорость точки.

2) Точка движется по окружности. Определить радиус окружности, если в момент времени, когда скорость $v = 10$ м/с, вектор скорости и вектор ускорения, равные по модулю $1,2$ м/с, образуют угол 30° .



3) Барабан 1 вращается по закону $\varphi = 0,1t^2$. Определить ускорение груза 2, если радиус $r = 0,2$ м.

4) При сферическом движении тела в некоторый момент времени его угловая скорость $\vec{\omega} = 1\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$. Определить в этот момент времени скорость точки А, имеющей координаты $x_A = 1$ м, $y_A = 0$, $z_A = 3$ м.

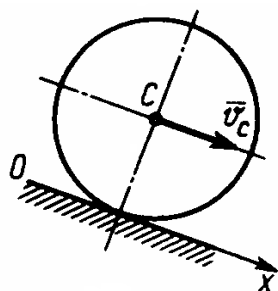


5) По стороне треугольника, вращающегося вокруг стороны АВ с угловой скоростью $\omega = 4$ рад/с, движется точка М с относительной скоростью $v_r = 2$ м/с. Определить модуль ускорения Кориолиса точки М, если угол $\alpha = 30^\circ$.

Карта № 3.

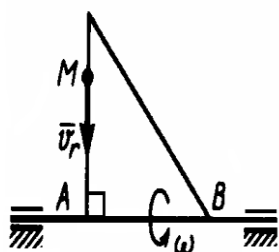
1) Ускорение точки. Разложение ускорения по осям естественного трехгранника.

2) Ускорение точки $a = 1$ м/с. Векторы ускорения и скорости образуют угол 45° . Определить скорость в км/ч, если радиус кривизны траектории $\rho = 300$ м.



3) Скорость центра C колеса, катящегося без скольжения, постоянна. Какой угол в градусах с осью Ox составляет вектор ускорения точки, являющейся мгновенным центром скоростей колеса?

4) При сферическом движении тела в некоторый момент времени его угловая скорость $\vec{\omega} = 1\vec{j} + 2\vec{k}$. Определить в этот момент времени скорость точки A , имеющей координаты $x_A = 3$ м, $y_A = 2$ м, $z_A = 0$.

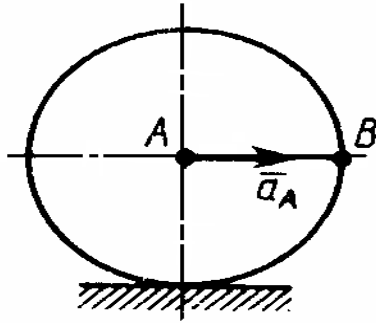


5) По стороне треугольника, вращающегося вокруг стороны AB с угловой скоростью $\omega = 8$ рад/с, движется точка M с относительной скоростью $v_r = 4$ м/с. M . Определить модуль ускорения Кориолиса точки M .

Карта № 4.

1) Скорость и ускорение в круговом движении точки.

2) Точка движется по окружности, радиус которой $r = 200$ м, с касательным ускорением 2 м/с^2 . определить угол в радианах между векторами скорости и полного ускорения точки в момент времени, когда ее скорость $v = 10 \text{ м/с}$.



3) Колесо катится без скольжения. Определить ускорение точки B колеса в тот момент, когда скорость точки A равна нулю, а ускорение $a_A = 2 \text{ м/с}^2$.

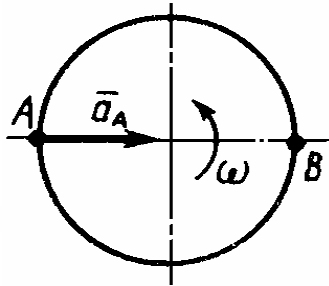
4) При сферическом движении тела в некоторый момент времени его угловая скорость $\vec{\omega} = 1\vec{i} + 1\vec{j}$. Определить в этот момент времени скорость точки A , имеющей координаты $x_A = 2 \text{ м}$, $y_A = 0$, $z_A = 1 \text{ м}$.

5) Точка M движется с постоянной скоростью $v = 1 \text{ м/с}$ от начала координат по стержню, вращающемуся в плоскости Oxy с постоянной угловой скоростью $\omega = 2 \text{ рад/с}$. Определить модуль ускорения точки M , когда расстояние $OM = 0,5 \text{ м}$.

Карта № 5.

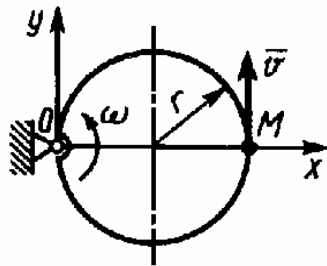
1) Выражения скорости и ускорения точки в полярных координатах.

2) Точка движется по окружности, радиус которой $r = 50$ м, со скоростью $v = 2t$. Определить модуль полного ускорения в момент времени $t = 5$ с.



3) Тело находится в плоскопараллельном движении. Найти ускорение точки B , если ускорение точки A равно 3 м/с^2 , угловая скорость $\omega = 1 \text{ рад/с}$, угловое ускорение $\varepsilon = 0$, расстояние $AB = 0,5$ м.

4) При сферическом движении тела в некоторый момент времени его угловая скорость $\vec{\omega} = 4\vec{i} + 1\vec{j}$. Определить в этот момент времени скорость точки A , имеющей координаты $x_A = 1$ м, $y_A = 1$ м, $z_A = 2$ м.

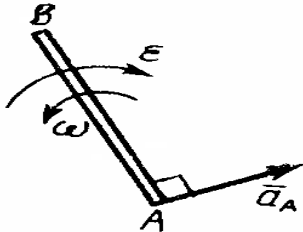


5) Кольцо радиуса $r = 0,5$ м вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 4 \text{ рад/с}$ в плоскости чертежа. По кольцу перемещается точка M с постоянной скоростью $v = 2 \text{ м/с}$. Определить модуль абсолютного ускорения точки M в указанном положении.

Карта № 6.

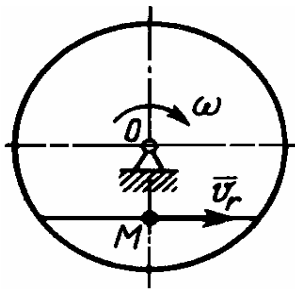
1) Законы равномерного и равнопеременного движений точки.

2) Задано уравнение движения точки по криволинейной траектории: $S = 0,2t^2 + 0,3t$. Определить полное ускорение точки в момент времени $t = 3$ с, если в этот момент радиус кривизны траектории $\rho = 1,5$ м.



3) Стержень AB движется в плоскости. Ускорение точки A в данный момент времени $a_A = 1$ м/с², угловая скорость $\omega = 2$ рад/с, угловое ускорение $\epsilon = 2$ рад/с. Определить ускорение точки B стержня, если длина $AB = 1$ м.

4) При сферическом движении тела в некоторый момент времени его угловая скорость $\vec{\omega} = 1\vec{i} + 1\vec{j} + 1\vec{k}$. Определить в этот момент времени скорость точки A , имеющей координаты $x_A = 2$ м, $y_A = 3$ м, $z_A = 0$.

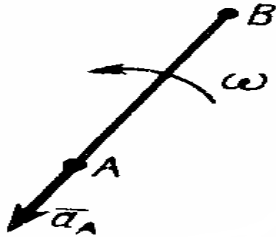


5) Точка M движется с относительной скоростью $v_r = 0,5$ м/с по хорде диска, вращающегося вокруг оси O , перпендикулярной плоскости диска, с угловой скоростью $\omega = 0,5$ рад/с. Определить абсолютное ускорение точки M в момент времени $t = 2$ с, если расстояние $OM = 0,02$ м.

Карта № 7.

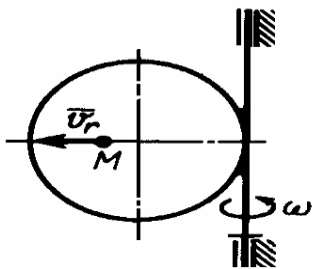
1) Криволинейные координаты. Коэффициенты Ляме.

2) Определить скорость точки в момент времени, когда радиус кривизны траектории $\rho = 5$ м, касательное ускорение $W_\tau = 2$ м/с², а $\operatorname{tg} \beta = 3$, где β - угол между векторами скорости и ускорения точки.



3) Стержень АВ длиной 2 м находится в плоскопараллельном движении. Найти ускорение точки В, если ускорение точки А равно 1 м/с², угловая скорость стержня $\omega = 1$ рад/с, угловое ускорение $\varepsilon = 0$.

4) При сферическом движении тела в некоторый момент времени его угловая скорость $\vec{\omega} = 1\vec{j} + 1\vec{k}$. Определить в этот момент времени скорость точки А, имеющей координаты $x_A = 1$ м, $y_A = 3$ м, $z_A = 2$ м.



5) По диаметру диска, вращающегося вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\omega = 2t$, движется точка М с относительной скоростью $V_r = 4t$. Определить модуль ускорения Кориолиса точки М в момент времени $t = 2$ с.

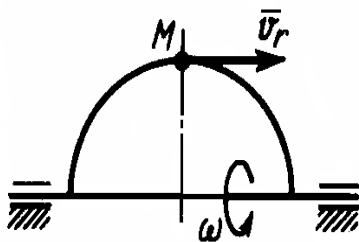
Карта № 8.

1) Скорость точки в криволинейных координатах.

2) Точка движется по окружности радиуса $r = 9$ м. Определить скорость точки в момент времени, когда касательное ускорение $W_\tau = 2$ м/с², а вектор полного ускорения $\bar{a}$ образует угол 70° с касательной к траектории.

3) Центр катящегося по плоскости колеса радиуса $0,5$ м движется согласно ускорению $S = 2t$. Определить ускорение точки соприкосновения колеса с плоскостью.

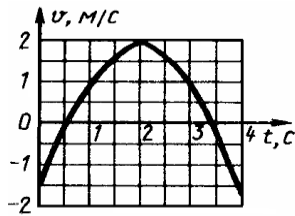
4) При сферическом движении тела в некоторый момент времени его угловая скорость $\bar{\omega} = 3\bar{i} + 2\bar{k}$. Определить в этот момент времени скорость точки A , имеющей координаты $x_A = 1$ м, $y_A = 4$ м, $z_A = 2$ м.



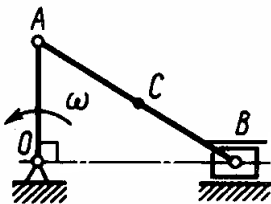
5) По ободу полукруга, вращающегося вокруг диаметра с угловой скоростью $\omega = 4$ рад/с, движется точка M с относительной скоростью $V_\tau = 5$ м/с. Определить модуль ускорения Кориолиса точки M в указанном положении.

Карта № 9.

1) Плоскопараллельное движение твердого тела. Геометрическое описание движения плоской фигуры в ее плоскости.

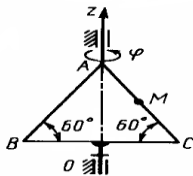


2) Дан график скорости $V = V(t)$ движения точки по окружности радиуса R . Найти времени t в интервале от 0 до 4 с, при котором нормальное ускорение точки будет максимальным.



3) Для данного положения механизма определить скорость точки C - седины шатуна AB , если угловая скорость $\omega = 1$ рад/с; длины звеньев $OA = 0,3$ м; $AB = 0,5$ м.

4) При сферическом движении тела в некоторый момент времени его угловая скорость $\vec{\omega} = 11\vec{i} + 3\vec{j} + 1\vec{k}$. Определить в этот момент времени скорость точки A , имеющей координаты $x_A = 0$, $y_A = 0$, $z_A = 1$ м.

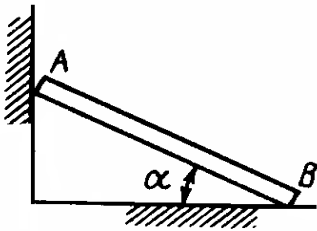


5) Пластина ABC вращается вокруг оси Oz по закону $\varphi = 5t^2$, а по ее стороне AC движется точка M согласно ускорению $AM = 4t^3$. Определить ускорение Кориолиса точки M в момент времени $t = 0,5$ с.

Карта № 10.

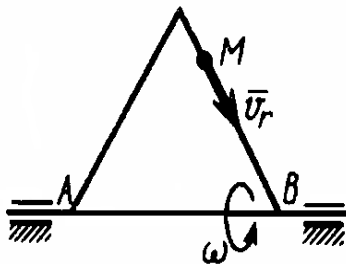
1) Мгновенный центр ускорений.

2) Электровоз движется по дуге окружности радиуса $R = 300$ м. определить максимальную скорость электровоза в км/ч, при которой нормальное ускорение не превышало бы 1 м/с^2 .



3) Брусок AB скользит, опираясь концами на стену и пол. При каком угле α в градусах скорость конца A будет в 2 раза больше скорости конца B ?

4) При сферическом движении тела в некоторый момент времени его угловая скорость $\vec{\omega} = 5\vec{j} + 4\vec{k}$. Определить в этот момент времени скорость точки A , имеющей координаты $x_A = 1 \text{ м}$, $y_A = 0$, $z_A = 0$.



5) По стороне треугольника, вращающегося вокруг стороны AB с угловой скоростью ω , движется точка M с относительной скоростью

$V_r = 2\sin 4t$. Определить относительное ускорение точки M в момент времени $t = \pi/8 \text{ с}$.

Проверочные тесты по динамике

Карта № 1.

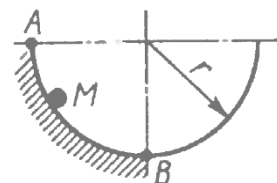
1. Сформулируйте необходимые и достаточные условия прямолинейности движения материальной точки.

2. Материальная точка массой $m = 10$ кг движется по криволинейной траектории под действием силы $F = 0,4t$. Определить касательное ускорение точки в момент времени $t = 40$ с, когда угол между силой и вектором скорости равен 30° .

3. Пренебрегая силами тяготения и сопротивления среды, определить в км/с скорость ракеты в момент времени, когда ее масса уменьшилась до 2 т, если относительная скорость отделяющихся частиц $v_r = 1,5$ км/с. Стартовая масса ракеты равна 5 т. Начальная скорость $v_0 = 0$.

4. Диск массой $m = 20$ кг вращается равномерно вокруг неподвижной оси с угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с. Определить модуль главного вектора внешних сил, приложенных к диску, если его центр тяжести удален от оси вращения на расстояние $OC = 0,5$ м.

5. Материальная точка M массой m движется под действием силы тяжести по внутренней поверхности полуцилиндра радиуса $r = 0,2$ м. Определить скорость материальной точки в точке B поверхности, если её скорость в точке A равна нулю.



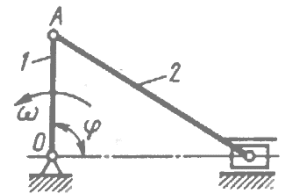
Карта № 2.

1. Сформулируйте теорему о движении центра масс системы.

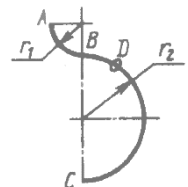
2. Груз массой $m = 25$ кг подвешен к пружине с коэффициентом жесткости $c = 800$ Н/м и находится в свободном прямолинейном вертикальном колебательном движении. Определить модуль ускорения груза в момент времени, когда центр тяжести груза находится на расстоянии 5 см от положения статического равновесия.

3. Тело переменной массы движется под действием постоянной силы, равной 160 Н. В момент времени $t = 0$ определить ускорение тела, если масса тела изменяется по закону $m = 24e^{4t}$ и относительная скорость присоединяющихся частиц равна нулю.

4. Кривошип 1 длиной $OA = 0,2$ м вращается с угловой скоростью $\omega = 20$ рад/с. Определить модуль количества движения шатуна 2 массой $m = 6$ кг в момент времени, когда угол $\phi = 90^\circ$. Шатун 2 считать однородным стержнем.



5. По проволоке ABC, расположенной в вертикальной плоскости и изогнутой в виде дуг окружностей радиусов $r_1 = 1$ м, $r_2 = 2$ м, может скользить без трения кольцо D массой m . Определить скорость кольца в точке C, если его скорость в точке A равна нулю.



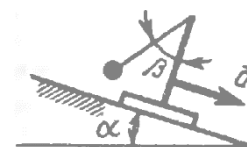
Карта № 3.

1. Сформулируйте теорему об изменении момента количества движения материальной точки.

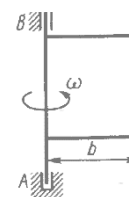
2. Материальная точка движется по криволинейной траектории под действием силы $F = 9\tau + 8n$. Определить массу точки, если ее ускорение $a = 0,5 \text{ м/с}^2$.

3. Штатив с математическим маятником движется по наклонной плоскости вниз с ускорением $a = g \sin \alpha$. Определить угол β в положении относительного покоя шарика, если угол $\alpha = 10^\circ$.

4. Скорость материальной точки массой $m = 1 \text{ кг}$ определяется выражением $v = 2t\bar{i} + 4t\bar{j} + 5\bar{k}$. Определить модуль момента количества движения точки относительно начала координат в момент времени $t = 2 \text{ с}$, когда ее координаты $x = 2 \text{ м}$, $y = 3 \text{ м}$, $z = 3 \text{ м}$.



5. Однородная прямоугольная пластина массой $m = 18 \text{ кг}$ вращается вокруг оси АВ с угловой скоростью $\omega = 4 \text{ рад/с}$. Определить кинетическую энергию пластины, если длина $b = 1 \text{ м}$.



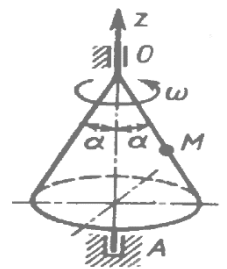
Карта № 4.

1. Сформулируйте теорему Кенига.

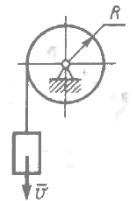
2. Тело массой $m = 10$ кг подвешено к пружине и совершает свободные вертикальные колебания с периодом $T = 0,8$ с. Определить коэффициент жесткости пружины.

3. Определить необходимую относительную скорость отделяющихся частиц, для того чтобы ускорение ракеты, обусловленное реактивной было равно 60 м/с^2 . Масса ракеты изменяется по закону $m = 500e^{-0,06t}$.

4. Конус вращается равномерно вокруг оси Az с угловой скоростью $\omega = 4$ рад/с. По образующей конуса движется материальная точка M массой 1 кг. Определить момент количества движения материальной точки относительно оси Oz в положении, когда расстояние $OM = 1$ м, если угол $\alpha = 30^\circ$.



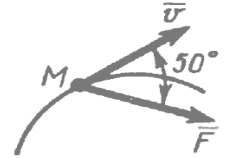
5. Груз массой $m = 4$ кг, опускаясь вниз, приводит с помощью нити во вращение цилиндр радиуса $R = 0,4$ м. Момент инерции цилиндра относительно оси вращения $I = 0,2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. Определить кинетическую энергию системы тел в момент времени, когда скорость груза $v = 2$ м/с.



Карта № 5.

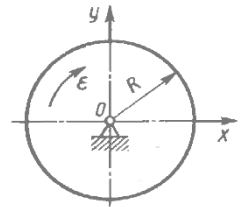
1. Что называют центром масс механической системы и как определяются его координаты?

2. Материальная точка M массой $m = 6$ кг перемещается в горизонтальной плоскости по криволинейной траектории под действием силы $F = 8$ Н. Определить касательное ускорение точки.

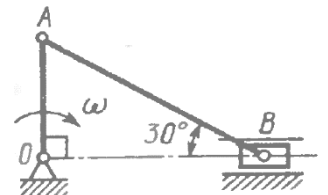


3. Пренебрегая силами тяготения и сопротивления среды, определить приращение скорости ракеты в промежуток времени, за который масса ракеты уменьшилась в 3 раза. Ракета движется поступательно и относительная скорость отделяющихся частиц $v_r = 800$ м/с.

4. Однородный диск радиуса $R = 0,5$ м, масса которого $m = 20$ кг, вращается с постоянным угловым ускорением $\epsilon = 10$ рад/с². Определить модуль главного вектора внешних сил, действующих на диск.



5. Для указанного положения механизма определить кинетическую энергию шатуна АВ массой $m = 1$ кг, если кривошип ОА длиной 0,5 м вращается вокруг оси О с угловой скоростью $\omega = 2$ рад/с.



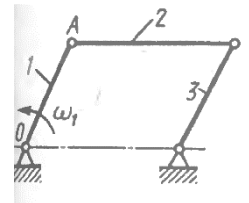
Карта № 6.

1. Какое силовое поле называют потенциальным?

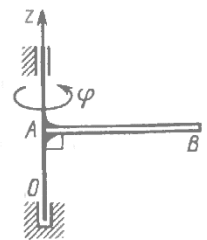
2. Определить период свободных вертикальных колебаний груза массой $m = 80$ кг, который прикреплен к пружине с коэффициентом жесткости $c = 2$ кН/м.

3. Масса модели реактивного автомобиля изменяется по Закону $m = 6e^{-0,5}$. В момент времени $t = 0$ определить модуль реактивной силы, если относительная скорость отделяющихся частиц равна 4 м/с.

4. Кривошип 1 шарнирного параллелограмма вращается равномерно с угловой скоростью $\omega_1 = 5$ рад/с. Определить модуль главного вектора внешних сил, действующих на звено 2, если его масса $m = 8$ кг, длина $OA = 0,4$ м.



5. Однородный стержень масса которого $m = 3$ кг, и длина $AB = 1$ м, вращается вокруг оси Oz по закону $\phi = 2t^3$. Определить кинетическую энергию стержня в момент времени $t = 1$ с.

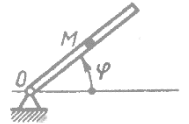


Карта № 7.

1. Сформулируйте закон площадей.

2. Материальная точка массой $m = 2 \text{ кг}$ движется по криволинейной траектории под действием силы $F = 3\tau + 4n$. Определить модуль ускорения точки.

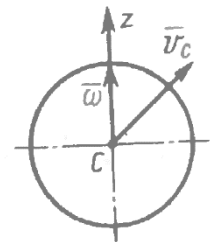
3. Трубка вращается вокруг оси O по закону $\phi = t^2$. В трубке движется шарик M массой $m = 0,1 \text{ кг}$ по закону $OM = 0,2t^3$. Определить модуль кориолисовой силы инерции шарика в момент времени $t = 1 \text{ с}$.



4. Вал 1, момент инерции которого относительно оси вращения $I_1 = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, вращается с угловой скоростью $\omega_1 = 40 \text{ рад/с}$, вал 2 находится в покое. Найти угловую скорость валов после их сцепления, если момент инерции вала 2 относительно оси вращения равен $I_2 = 4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.



5. Шар массой $m = 5 \text{ кг}$ свободно движется в пространстве; скорость v_c центра C шара равна 4 м/с , а его угловая скорость ω вращения вокруг мгновенной оси Cz равно 10 рад/с . Определить кинетическую энергию шара, если его момент инерции относительно оси Cz равен $0,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.



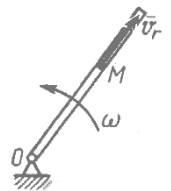
Карта № 8.

1. Запишите формулу связи главного вектора количества движения механической системы и скорости центра масс.

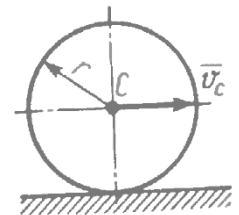
2. Груз массой $m = 20$ кг подвешен к пружине с коэффициентом жесткости $c = 400$ Н/м и находится в свободном прямолинейном вертикальном колебательном движении. Определить, на каком расстоянии от положения статического равновесия находится центр тяжести груза в момент времени, когда его ускорение равно 3 м/с.

3. Ракета, масса которой изменяется по закону $m = 4 - 0,01 t$, где m – в т, движется поступательно под действием только реактивной силы. Определить скорость ракеты через 2 мин после ее пуска, если относительная скорость отделяющихся частиц $v_r = 2$ км/с.

4. Трубка вращается с угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с. Относительно трубки движется шарик M массой $m = 0,2$ кг со скоростью $v_r = 4$ м/с. Определить модуль количества движения шарика в момент времени, когда расстояние $OM = 0,4$ м.



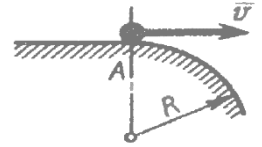
5. Диск массой $m = 2$ кг радиуса $r = 1$ м катится по плоскости, его момент инерции относительно оси, проходящей через центр C перпендикулярно плоскости рисунка, $I_c = 2$ кг*м². Определить кинетическую энергию диска в момент времени, когда скорость его центра $v_c = 1$ м/с.



Карта № 9.

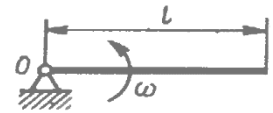
1. При каких условиях центр масс системы находится в состоянии покоя и при каких условиях он движется равномерно и прямолинейно.

2. Тело движется по горизонтальной поверхности и в точке А отрывается от нее. Определить минимальную скорость тела в момент отрыва, если радиус $R = 6$ м.

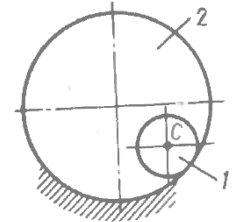


3. Ракета движется прямолинейно при отсутствии тяготения и сопротивления среды, имея стартовую массу 5 т. Определить в км/с относительную скорость отделяющихся частиц, если в момент времени когда масса ракеты равна 3 т, ее скорость равна 600 м/с. Начальная скорость $V_0 = 0$.

4. Однородный стержень длиной $l = 1$ м и массой $m = 6$ кг вращается с угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с. Определить кинетический момент стержня относительно центра О.



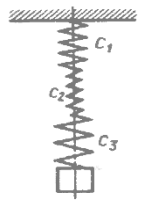
5. Однородный цилиндр 1 массой $m = 16$ кг катится без скольжения по внутренней цилиндрической поверхности 2. Определить кинетическую энергию цилиндра в момент времени, когда скорость его центра масс С равна 2 м/с.



Карта № 10.

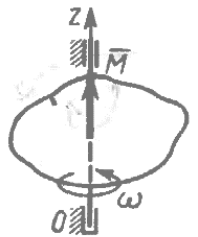
1. Сформулируйте свойства внутренних сил системы.

2. Коэффициенты жесткости пружин $c_1 = 2 \text{ Н/м}$, $c_2 = 4 \text{ Н/м}$ и $c_3 = 6 \text{ Н/м}$. Определить коэффициент жесткости пружинной подвески.

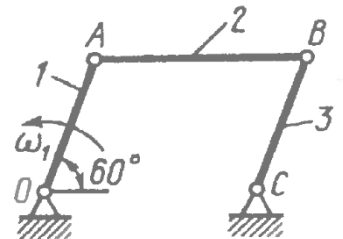


3. В момент времени $t = 1,5 \text{ с}$ определить ускорение точки, если ее масса изменяется по закону $m = 54(1 - 0,4t)$. Относительная скорость отделяющихся частиц равна 21 м/с .

4. Тело вращается вокруг вертикальной оси Oz под действием пары сил с моментом $M = 16t$. Определить момент инерции тела относительно оси Oz , если известно, что в момент времени $t = 3 \text{ с}$ угловая скорость $\omega = 2 \text{ рад/с}$. При $t = 0$ тело находилось в покое.



5. Кривошип 1 шарнирного параллелограмма длиной $OA = 0,4 \text{ м}$ вращается равномерно вокруг оси O с угловой скоростью $\omega_1 = 10 \text{ рад/с}$. Моменты инерции кривошипа 1 и 3 относительно их осей вращения равны $0,1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, масса шатуна $m = 5 \text{ кг}$. Определить кинетическую энергию механизма.



3. РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ.

3.1. Вопросы к зачету и экзаменам.

ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА» 1 СЕМЕСТР. СТАТИКА.

1. Основные понятия и аксиомы статики. Задачи статики.
2. Связи и их реакции.
3. Трение скольжения. Законы Кулона. Угол и конус трения.
4. Момент силы относительно центра.
5. Момент силы относительно оси.
6. Главный вектор и главный момент системы сил.
7. Теоремы, определяющие условия равновесия твердого тела.
8. Эквивалентные системы сил.
9. Теорема о трех силах.
10. Система сходящихся сил.
11. Пара сил. Момент пары.
12. Условия равновесия плоской системы сил.
13. Трение качения.
14. Система параллельных сил.
15. Центр тяжести и методы его определения.
16. Приведение произвольной системы сил к простейшему виду.
Основная лемма.
17. Инварианты приведения.
18. Динамический винт. Центральная винтовая ось.
19. Случаи приведения произвольной системы сил к простейшему виду.
20. Простейший вид плоской системы сил.
21. Простейший вид системы параллельных сил.
22. Условия равновесия произвольной пространственной системы сил.
23. Эквивалентные формы условий равновесия плоской системы сил.
24. Статически определимые и статически неопределимые системы.

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНАМ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА» 2 СЕМЕСТР. КИНЕМАТИКА.

1. Способы описания движения точки.
2. Скорость точки.
3. Ускорение точки. Разложение ускорения по осям естественного трехгранника.
4. Скорость и ускорение в круговом движении точки.
5. Выражения скорости и ускорения точки в полярных координатах.

6. Законы равномерного и равнопеременного движений точки.
7. Криволинейные координаты. Коэффициенты Лагранжа.
8. Скорость точки в криволинейных координатах.
9. Ускорение точки в криволинейных ортогональных координатах.
10. Скорость и ускорение точки в цилиндрических координатах.
11. Скорость и ускорение точки в сферических координатах.
12. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Угловая скорость и угловое ускорение тела. Скорости и ускорения точек тела.
13. Плоскопараллельное движение твердого тела. Геометрическое описание движения плоской фигуры в ее плоскости.
14. Скорости точек плоской фигуры. Теорема Грасгофа.
15. Ускорения точек плоской фигуры.
16. Мгновенный центр ускорений.
17. Движение твердого тела около неподвижной точки. Теорема Даламбера-Эйлера. Мгновенная ось вращения.
18. Скорости и ускорения точек тела в сферическом движении.
19. Углы Эйлера. Кинематические уравнения Эйлера.
20. Сложное движение точки. Полная и локальная производные вектора. Теорема о сложении скоростей.
21. Теорема Кориолиса.
22. Сложное движение твердого тела. Сложение вращений вокруг пересекающихся осей.
23. Сложение вращений вокруг параллельных осей, направленных в одну сторону.
24. Сложение вращений вокруг антипараллельных осей. Пара вращений.
25. Сложение вращательного и поступательного движений. Мгновенное винтовое движение.
26. Общий случай сложения мгновенных движений твердого тела.
27. Движение свободного твердого тела. Теорема Шаля.

3 СЕМЕСТР

Динамика точки, системы и твердого тела.

1. Основные понятия и законы динамики. Задачи динамики точки.
2. Дифференциальные уравнения движения материальной точки.
3. Необходимые и достаточные условия прямолинейности движения материальной точки. Случаи интегрирования уравнений прямолинейного движения материальной точки в квадратурах.
4. Свободные колебания материальной точки при отсутствии сопротивления. Влияние постоянной силы на характер свободных колебаний.
5. Затухающие колебания материальной точки.
6. Вынужденные колебания материальной точки. Резонанс.

7. Движение несвободной материальной точки по заданной неподвижной кривой. Плоский математический маятник.
8. Теорема об изменении количества движения материальной точки. Первые интегралы.
9. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки. Интеграл энергии.
10. Потенциальное силовое поле. Примеры потенциальных силовых полей.
11. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки. Первые интегралы. Закон площадей.
12. Формулы Бинэ.
13. Законы Кеплера. Закон всемирного тяготения.
14. Определение траектории точки, движущейся в ньютоновом поле тяготения (задача Ньютона).
15. Искусственные спутники Земли.
16. Дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки.
17. Отклонение падающих тел от вертикали.
18. Влияние вращения Земли на движение тел вдоль земной поверхности.
19. Маятник Фуко.
20. Свойства внутренних сил системы.
21. Теорема об изменении количества движения системы. Первые интегралы.
22. Теорема о движении центра масс. Первые интегралы.
23. Кинетическая энергия системы и ее вычисление. Теорема Кенига.
24. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы. Интеграл энергии.
25. Кинетический момент системы и его вычисление.
26. Теорема об изменении кинетического момента системы относительно неподвижного центра. Первые интегралы.
27. Теорема об изменении кинетического момента системы относительно произвольного подвижного центра и относительно центра масс.
28. Момент инерции относительно оси. Уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.
29. Уравнение движения точки переменной массы (уравнение Мещерского).
30. Первая задача Циолковского.
31. Вторая задача Циолковского.
32. Характеристики распределения масс. Моменты инерции второй степени и их свойства.
33. Моменты инерции относительно параллельных осей. Теорема Гюйгенса.
34. Моменты инерции относительно осей пучка.
35. Тензор и эллипсоид инерции. Главные оси инерции и их свойства.

36. Количество движения, кинетический момент и кинетическая энергия твердого тела.
37. Уравнения движения свободного твердого тела.
38. Вращение абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси. Условия, при которых динамические реакции равны статическим.
39. Плоскопараллельное движение абсолютно твердого тела.
40. Уравнения движения твердого тела с одной неподвижной точкой. Динамические уравнения Эйлера.
41. Общая постановка задачи о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Первые интегралы.
42. Элементарная теория гироскопа. Гироскопические эффекты.
43. Теория удара. Коэффициент восстановления. Теоремы Карно.
44. Прямой центральный удар двух тел.
45. Действие удара на тело, вращающееся вокруг неподвижной оси. Центр удара.

3.2. Средства диагностики

Диагностика результатов учебной деятельности по дисциплине «Теоретическая механика» проводится во время аудиторных занятий и во время защиты индивидуальных заданий. Для диагностики используются:

- экспресс-опросы на аудиторных занятиях;
- защита отчетов по индивидуальным заданиям;
- контрольные работы;
- тесты.

Контрольные мероприятия проводятся в соответствии с учебно-методической картой дисциплины. В случае неявки на контрольное мероприятие по уважительной причине студент вправе по согласованию с преподавателем выполнить его в дополнительное время. Для студентов, получивших неудовлетворительные оценки за контрольные мероприятия, либо не явившихся по неуважительной причине, по согласованию с преподавателем и с разрешения заведующего кафедрой мероприятие может быть проведено повторно.

Формой итоговой аттестации по дисциплине «Теоретическая механика» учебным планом предусмотрен зачет в 1 и 3 семестре, экзамен во 2 и 3 семестре.

При формировании итоговой оценки используется рейтинговая оценка знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая оценка предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний и текущей аттестации в рейтинговую оценку:

Формирование оценки за текущую успеваемость:

- ответы на семинарских (практических) занятиях – 20 %;
- отчет о выполнении индивидуальных заданий – 50 %;

- контрольные работы – 15 %;
- выполнение теста – 15 %.

Рейтинговая оценка по дисциплине рассчитывается на основе оценки текущей успеваемости и экзаменационной оценки с учетом их весовых коэффициентов. Вес оценки по текущей успеваемости составляет 40 %, экзаменационной оценки – 60 %.

Полученные студентом количественные результаты учитываются как составная часть итоговой оценки по дисциплине в рамках рейтинговой системы.

Итоговая оценка формируется на основе 3-х документов:

1. Правила проведения аттестации студентов, курсантов, слушателей при освоении содержания образовательных программ высшего образования (Утверждены Постановлением Министерства образования Республики Беларусь от 29 мая 2012 г. № 53).
2. Положение о рейтинговой системе оценки знаний обучающихся по учебной дисциплине в Белорусском государственном университете (Приказ ректора БГУ № 189 – ОД от 31.03.2020 г.)
3. Критерии оценки знаний и компетенций студентов по 10-балльной шкале (Письмо Министерства образования Республики Беларусь 21-04-01/105 от 22.12.2003).

Основной вклад в формирование оценки за текущую успеваемость вносят оценки по индивидуальным заданиям, темы которых приведены в 2.1. Эти задания подготовлены сотрудниками кафедры в 40 вариантах, охватывают все основные темы курса «Теоретическая механика» и изложены в пособии «Теоретическая механика»: практикум: учебное пособие. Под ред. Д.Г. Медведева. - Мн.: БГУ, 2005. Они носят комплексный характер и требуют от студента хорошего знания соответствующей темы, навыков самостоятельной работы и творческого подхода. Именно над этими заданиями и осуществляется управляемая самостоятельная работа студентов.

4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ.

4.1. Содержание учебного материала

1 Семестр. Статика.

Тема 1.1. Предмет теоретической механики, ее место в системе естественных наук. Краткий исторический очерк развития механики, основные разделы механики и направления ее развития. Кафедры механики в Белгосуниверситете. Основные научные интересы преподавателей кафедр. Механика и ее разделы в учебном плане по механике высшего учебного заведения.

Тема 1.2. Векторы, классификация векторов, проекция вектора на ось и на плоскость. Действия над векторами, скалярное и векторное произведение, их свойства. Дифференцирование вектора по скалярному аргументу.

Тема 1.3. Основные понятия и аксиомы статики. Несвободное твердое тело. Аксиома связей. Виды связей и их реакции. Основные задачи статики. Трение т связи с трением. Трение скольжения. Законы Кулона. Конус и угол трения. Трение качения.

Тема 1.4. Определение момента силы относительно центра. Момент силы относительно оси, корректность определения. Теорема Вариньона. Вычисление моментов вектора относительно осей.

Тема 1.5. Основные теоремы. Условия равновесия произвольной пространственной системы сил. Теорема о трех силах.

Тема 1.6. Частные случаи систем сил и их условия равновесия. Система сходящихся сил, плоская система сил. Пара сил, момент пары. Эквивалентные формы условий равновесия для плоской системы сил. Статически определимые и статически неопределимые системы. Общий план решения задач статики.

Тема 1.7. Система двух параллельных и антипараллельных сил. Пара сил. Центр параллельных сил. Центр тяжести и методы его определения: метод симметрии, метод группировки, метод отрицательных масс.

Тема 1.8. Элементы и инварианты приведения. Динамический винт, центральная винтовая ось. Приведение системы к двум силам. Общие выводы, случаи приведения.

2 семестр

Раздел 2. Кинематика точки

Тема 2.1. Основные понятия и задачи кинематики. Способы описания движения точки.

Тема 2.2. Скорость точки при координатном и естественном способах задания движения. Скорость точки в круговом движении. Разложение скорости на радиальную и тангенциальную составляющие.

Тема 2.3. Ускорение точки. Разложение ускорения по осям естественного трехгранника. Ускорение в круговом движении. Равномерное и равнопеременное движение.

Тема 2.4. Кинематика точки в криволинейных координатах. Коэффициенты Ляме. Цилиндрические и сферические координаты. Проекции скорости и ускорения в цилиндрических и сферических координатах.

Раздел 3. Кинематика твердого тела

Тема 3.1. Основные задачи кинематики твердого тела. Виды движений твердого тела. Определение и свойства поступательного движения твердого тела. Скорости и ускорения точек тела при поступательном движении. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Угловая скорость и угловое ускорение тела. Равномерное и равнопеременное вращение. Скорости и ускорения точек тела во вращательном движении.

Тема 3.2. Плоскопараллельное движение тела. Геометрическое и аналитическое исследование движения плоской фигуры в ее плоскости. Скорости и ускорения точек тела в плоском движении. Мгновенный центр скоростей. Центроиды. Мгновенный центр ускорений.

Тема 3.3. Движение твердого тела около неподвижной точки. Теорема Даламбера-Эйлера. Аксоиды. Скорости и ускорения точек тела в сферическом движении. Теорема Ривальса. Углы Эйлера. Кинематические уравнения Эйлера.

Тема 3.4. Движение свободного твердого тела. Теорема Шаля. Скорости и ускорения точек свободно движущегося тела.

Тема 3.5. Сложное движение твердого тела. Сложение поступательных движений. Сложение мгновенных вращений. Общий случай сложного движения твердого тела. Винт. Центральная винтовая ось.

Тема 3.6. Сложное движение точки. Теорема о сложении скоростей. Теорема Кориолиса.

3 семестр

Раздел 4. Динамика точки

Тема 4.1. Основные понятия и законы динамики. 2 задачи динамики точки. Дифференциальные уравнения движения материальной точки.

Тема 4.2. Общие теоремы динамики точки и их первые интегралы.

Тема 4.3. Прямолинейное движение точки. Необходимые и достаточные условия прямолинейности движения. Случаи точного интегрирования уравнений движения.

Тема 4.4. Прямолинейные колебания точки. Свободные, затухающие, вынужденные колебания. Резонанс.

Тема 4.5. Движение точки в поле центральных сил. Законы Кеплера. Формулы Бинэ. Закон всемирного тяготения. Задача Ньютона. Уравнение Кеплера. Искусственные спутники Земли. Баллистические траектории.

Тема 4.6. Движение несвободной материальной точки. Математический маятник. Задача о брахистохроне. Сферический маятник.

Тема 4.7. Относительное движение материальной точки. Относительный покой и движение вблизи поверхности Земли. Отклонение падающих тел от вертикали. Движение тел вдоль земной поверхности. Маятник Фуко.

Раздел 5. Динамика системы.

Тема 5.1. Основные понятия и основные динамические величины: Центр масс системы, главный вектор количества движения, кинетический момент, кинетическая энергия системы, их вычисление.

Тема 5.2. Общие теоремы динамики системы и их первые интегралы: Теорема о движении центра масс, теорема об изменении главного вектора количества движения, теорема об изменении кинетического момента, теорема об изменении кинетической энергии.

Тема 5.3. Динамика тел переменной массы. Уравнение Мещерского. Задачи Циолковского. Вертикальное движение тяжелой нити.

Раздел 6. Динамика твердого тела.

Тема 6.1. Геометрия масс. Моменты инерции относительно оси, плоскости, полюса, их свойства. Тензор инерции, эллипсоид инерции. Главные оси инерции тела, их динамический смысл.

Тема 6.2. Вращение тела вокруг неподвижной оси. Давление на ось. Условия отсутствия добавочных динамических давлений на ось. Физический маятник. Плоское движение твердого тела.

Тема 6.3. Движение тела около неподвижной точки. Выражение основных динамических величин. Динамические уравнения Эйлера. Общая постановка задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Проблема четвертого алгебраического интеграла. Случаи Эйлера, Лагранжа, Ковалевской. Движение свободного твердого тела.

Тема 6.4. Элементарная теория гироскопа. Гироскопические эффекты. Правило Жуковского.

Тема 6.5. Теория удара материальной точки. Основное уравнение теории удара. Виды удара. Теория удара материальной системы. Теоремы Карно. Прямой центральный удар двух тел. Удар по телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси. Центр удара.

4.2. Учебно-методические карты

1 семестр

Номер раздела, темы, занятия	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов		Количество часов УСР	Формы контроля знаний
		лекции	Семинарские занятия практические		
1	Статика				
1.1	Предмет теоретической механики, ее место в системе естественных наук. Краткий исторический очерк развития механики, основные разделы механики и направления ее развития.	2			
1.2	Векторы, классификация векторов, проекция вектора на ось и на плоскость. Действия над векторами, скалярное и векторное произведение, их свойства. Дифференцирование вектора по скалярному аргументу.	2			Экспресс-опрос
1.3	Основные понятия и аксиомы статики. Несвободное твердое тело. Аксиома связей. Виды связей и их реакции. Основные задачи статики. Трение, связи с трением. Трение скольжения. Законы Кулона. Конус и угол трения. Трение качения.	2	1		
1.4	Определение момента силы относительно центра. Момент силы относительно оси, корректность определения. Теорема Вариньона. Вычисление моментов вектора относительно осей.	2	1		Экспресс-опрос
1.5	Основные теоремы. Условия равновесия произвольной пространственной системы сил. Теорема о трех силах.	2	2		Коллоквиум
1.6	Частные случаи систем сил и их условия равновесия. Система сходящихся сил, плоская система сил. Пара сил, момент пары. Эквивалентные формы условий равновесия для плоской системы сил. Статически определимые и статически неопределимые системы. Общий план решения задач статики.	4	4	2	Отчет по индивидуальному заданию

	Равновесие плоской системы сил с учетом трения.				
1.7	Система двух параллельных и антипараллельных сил. Пара сил. Центр параллельных сил. Центр тяжести и методы его определения: метод симметрии, метод группировки, метод отрицательных масс.	2	2		Контроль ная работа
1.8	Элементы и инварианты приведения. Динамический винт, центральная винтовая ось. Приведение системы к двум силам. Общие выводы, случаи приведения.	2	4	2	Отчет по индивиду альному заданию.
Итого		18	14	4	

2 семестр

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов				Формы контроля знаний
		лекции	практические занятия	количество часов УСР	Семинарские занятия	
1	2	3	4	5		6
2	Кинематика точки					
2.1	Основные понятия и задачи кинематики. Способы описания движения точки.	2	4			Экспресс-опрос
2.2	Скорость точки при координатном и естественном способах задания движения. Скорость точки в круговом движении. Разложение скорости на радиальную и тангенциальную составляющие.	2	4			Отчет по домашним заданиям
2.3	Ускорение точки. Разложение ускорения по осям естественного трехгранника. Ускорение в круговом движении. Равномерное и равнопеременное движение.	2	4	2		Отчет по индивидуальному заданию
2.4	Кинематика точки в криволинейных координатах. Коэффициенты Ляме. Цилиндрические и сферические координаты. Проекция скорости и ускорения в цилиндрических и сферических координатах.	4	4			

3	Кинематика твердого тела					
3.1	Основные задачи кинематики твердого тела. Виды движений твердого тела. Поступательное движение твердого тела. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Угловая скорость и угловое ускорение тела. Равномерное и равнопеременное вращение. Скорости и ускорения точек тела во вращательном движении.	4	4			Отчет по домашним заданиям
3.2	Плоскопараллельное движение тела. Геометрическое и аналитическое исследование движения плоской фигуры в ее плоскости. Скорости и ускорения точек тела в плоском движении. Мгновенный центр скоростей. Центроиды. Мгновенный центр ускорений.	6	8	4		Отчет по индивидуальному заданию
3.3	Движение твердого тела около неподвижной точки. Теорема Даламбера-Эйлера. Аксоиды. Скорости и ускорения точек тела в сферическом движении. Теорема Ривальса. Углы Эйлера. Кинематические уравнения Эйлера.	4	4	2		Отчет по индивидуальному заданию
3.4	Движение свободного твердого тела. Теорема Шаля. Скорости и ускорения точек свободно движущегося тела.	2	2			Коллоквиум
3.5	Сложное движение твердого тела. Сложение поступательных движений. Сложение мгновенных вращений. Общий случай сложного движения твердого тела. Винт. Центральная винтовая ось.	4	4			
3.6	Сложное движение точки. Теорема о сложении скоростей. Теорема Кориолиса.	4	4	2		Отчет по индивидуальному заданию
Итого		34	42	10		

3 семестр

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов				Формы контроля знаний
		лекции	практические занятия	Семинарские занятия	количество часов УСП	
1	2	3	4		5	6
4	Динамика точки					
4.1	Основные понятия и законы динамики. 2 задачи динамики. Дифференциальные уравнения движения точки.	1	4			
4.2	Общие теоремы динамики точки и их первые интегралы.	2	8			Экспресс-опрос
4.3	Прямолинейное движение точки. Необходимые и достаточные условия прямолинейности движения. Случаи точного интегрирования уравнений движения.	1	4			
4.4	Прямолинейные колебания точки. Свободные, затухающие, вынужденные колебания. Резонанс.	2	6		4	Отчет по индивидуальному заданию
4.5	Движение точки в поле центральных сил. Законы Кеплера. Формулы Бинэ. Закон всемирного тяготения. Задача Ньютона. Уравнение Кеплера. Искусственные спутники Земли. Баллистические траектории.	4	8		4	Отчет по индивидуальному заданию
4.6	Движение несвободной материальной точки. Математический маятник. Задача о брахистохроне. Сферический маятник.	2	4			
4.7	Относительное движение материальной точки. Относительный покой и движение вблизи поверхности Земли. Отклонение падающих тел от вертикали. Движение тел вдоль	3	4			Тестирование

	земной поверхности. Маятник Фуко					
5	Динамика системы					
5.1	Основные понятия и основные динамические величины: Центр масс системы, главный вектор количества движения, кинетический момент, кинетическая энергия системы, их вычисление.	2	2			Экспресс-опрос
5.2	Общие теоремы динамики системы и их первые интегралы: Теорема о движении центра масс, теорема об изменении главного вектора количества движения, теорема об изменении кинетического момента, теорема об изменении кинетической энергии.	3	10		8	Отчет по индивидуальному заданию
5.3	Динамика тел переменной массы. Уравнение Мещерского. Задачи Циолковского. Вертикальное движение тяжелой нити.	3	6			
6	Динамика твердого тела					
6.1	Геометрия масс. Моменты инерции относительно оси, плоскости, полюса, их свойства. Тензор инерции, эллипсоид инерции. Главные оси инерции тела, их динамический смысл.	2	4			
6.2	Вращение тела вокруг неподвижной оси. Давление на ось. Условия отсутствия добавочных динамических давлений на ось. Физический маятник. Плоское движение твердого тела.	2	4			Коллоквиум
6.3	Движение тела около неподвижной точки. Выражение основных динамических величин. Динамические уравнения Эйлера. Общая постановка задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Проблема четвертого алгебраического интеграла. Случаи Эйлера, Лагранжа, Ковалевской. Движение свободного твердого тела.	4	2			Экспресс-опрос

6.4	Элементарная теория гироскопа. Гироскопические эффекты. Правило Жуковского.	2	4			
6.5	Теория удара материальной точки. Основное уравнение теории удара. Виды удара. Теория удара материальной системы. Теоремы Карно. Прямой центральный удар двух тел. Удар по телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси. Центр удара.	3	4			Тестирование
Итого		36	74		16	

4.3. Рекомендуемая литература

Основная:

1. Валькова Т.А., Рабецкая Э.И., Митяев А.Е. и др. Теоретическая механика. Курс лекций. Сибирский федеральный университет, 2019.- 272 с.
2. О.Н. Вярвильская, Д.Г. Медведев, В.П. Савчук/ Краткий курс теоретической механики: учебн. пособие; под ред. Д.Г. Медведева. - Минск: БГУ, 2020.-207 с.
3. Доронин Ф.А. Теоретическая механика: уч. пособ., изд-во «Лань», 2022. - 480 с.
4. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике, 52-изд., под ред. Пальмова В.А., Меркина Д.Р., изд-во «Лань», 2022.- 448 с.
5. Сборник коротких задач по теоретической механике, под ред. О.Э. Кепе, 2020.- 368 с.
6. Диевский В.А., Теоретическая механика: учебн. пособие; изд-во «Лань», 2022.- 336 с.

Дополнительная:

7. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. ч.I – II. М. «Наука», 1972.- 467 -332 с.
8. Теоретическая механика: курс лекций. Под ред. В.П. Савчука. - Мн.: БГУ, 2003.-236 с.
9. Теоретическая механика: учебн. пособие. Под ред. Д.Г. Медведева. - Мн.: БГУ, 2006.-287 с.
10. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. М. «Наука», 1976.-478 с.
11. Теоретическая механика: практикум: учебн. пособие. Под ред. Д.Г. Медведева. - Мн.: БГУ, 2005.-143 с.

12. Теоретическая механика: сб. задач: учебн. пособие. Под ред. Д.Г. Медведева. - Мн.: БГУ, 2008.- 151 с.
13. О.Н. Вярвильская, С.М. Босяков, Д.Г. Медведев. Механика в лицах. - Мн.: БГУ, 2011.-279 с.
14. О.Н. Вярвильская, Д.Г. Медведев, В.А. Савенков, В.П. Савчук/ Теоретическая механика в примерах и задачах: учебн. пособие. Под ред. Д.Г. Медведева. - Мн.: БГУ, 2014.-395 с.
15. В.П. Савчук, Д.Г. Медведев, О.Н. Вярвильская // Теоретическая механика: учебник. Под ред. Д.Г. Медведева. - Мн.: БГУ, 2016. -231 с. – (Классическое университетское издание)
16. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. ч. I-II. М. «Высшая школа», 1971.- 423-487 с.
17. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. ч. I-II. М. «Наука», 1982.- 487-540 с.
18. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М. «Наука», 1979.- 478 с.
19. Аппель П. Теоретическая механика. Т. 1-2, М., 1960.-511-484 с.
20. Вильке В.Г. Теоретическая механика. М., 2003.- 272 с.
21. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах, ч.1, II и III, Физматгиз, 1961.
22. Геронимус Я.Л. Теоретическая механика, Москва, «Наука», 1973.- 511 с.
23. Голубева О.Н. Теоретическая механика, Москва, «Высшая школа», 1976.- 283 с.
24. Бражниченко Н.А. и др. Сборник задач по теоретической механике, Москва, «Высшая школа», 1974.- 519 с.
25. Айзенберг Т.Б. и др. Руководство к решению задач по теоретической механике, Москва, 1968.- 419 с.

4.4. Электронные ресурсы

1. Краткий курс теоретической механики: учеб. пособие/ О.Н. Вярвильская, Д.Г. Медведев, В.П. Савчук; под ред. Д.Г. Медведева. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/257179>. – Дата доступа: 10.10.2022.
2. Теоретическая механика: учебная программа учреждения высшего образования по учебной дисциплине для специальности: 1-31 03 02 Механика и математическое моделирование. – Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/276058> . – Дата доступа: 10.10.2022.
3. Теоретическая механика. Статика. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://edummf.bsu.by/course/view.php?id=1108>. – Дата доступа: 07.10.2022.
4. Теоретическая механика. Кинематика. [Электронный ресурс]. – Режим доступа <https://edummf.bsu.by/course/view.php?id=1107>. – Дата доступа: 07.10.2022.

5. Теоретическая механика. Динамика. [Электронный ресурс]. – Режим доступа <https://edummf.bsu.by/course/view.php?id=1106>. – Дата доступа: 07.10.2022.

**ВОСПИТАТЕЛЬНО-ИДЕОЛОГИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ
УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»**

Учебно-методический комплекс по дисциплине «Теоретическая механика» составлен в соответствии с основными направлениями государственной молодежной политики, отраженными в Концепции непрерывного воспитания детей и учащейся молодежи в Республике Беларусь, в Плане идеологической и воспитательной работы БГУ на 2022-2023 годы и других государственных программах, нормативно-правовых и инструктивно-методических документах, определяющих приоритетные направления идеологии белорусского государства.

Учебно-методический комплекс по дисциплине «Теоретическая механика» способствует созданию условий для формирования нравственно зрелой, интеллектуально развитой личности обучающегося, которой присущи социальная активность, гражданская ответственность и патриотизм, приверженность к университетским ценностям и традициям, стремление к профессиональному самосовершенствованию, активному участию в экономической и социально-культурной жизни страны.

Основными **задачами** идеологической и воспитательной составляющей Учебно-методического комплекса по дисциплине «Теоретическая механика» являются:

1. Максимальное использование потенциальных возможностей кафедры по формированию творческих, глубоко образованных специалистов.
2. Содействие становлению личности, духовно-нравственное и интеллектуальное развитие студентов.
3. Выработка разумной организации времени, дисциплинированного и ответственного отношения к делу, развитие творческих способностей, логической и методологической культуры.