УДК 517.925

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ И ПРОБЛЕМА АЙЗЕРМАНА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ШЕСТОГО ПОРЯДКА

Б. С. КАЛИТИН[1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Исследуется устойчивость равновесия обыкновенных дифференциальных уравнений методом знакопостоянных функций Ляпунова. Выделены типы нелинейных скалярных дифференциальных уравнений шестого порядка, для которых используются знакопостоянные вспомогательные функции. Получены достаточные условия глобальной асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения и установлено, что проблема Айзермана имеет положительное решение относительно корней соответствующего линейного дифференциального уравнения. Проведенные исследования подчеркивают преимущества использования знакоположительных функций по сравнению с классическим методом применения определенно-положительных функций Ляпунова.

Ключевые слова: скалярное дифференциальное уравнение; равновесие; устойчивость; знакопостоянная функция Ляпунова.

Образец цитирования:
Калитин БС. Устойчивость решений и проблема Айзермана для дифференциальных уравнений шестого порядка. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2020;2:49–58.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-2-49-58

For citation:
Kalitine BS. Stability of solutions and the problem of Aizerman for sixth-order differential equations. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2020;2:49–58. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-2-49-58

Автор:
Борис Сергеевич Калитин – кандидат физико-математических наук, доцент; профессор кафедры аналитической экономики и эконометрики экономического факультета.

Author:
Boris S. Kalitine, PhD (physics and mathematics), docent; professor at the department of analytical economics and econometrics, faculty of economy.
kalitine@yandex.by

Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2020;2:49–58
Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2020;2:49–58

STABILITY OF SOLUTIONS AND THE PROBLEM OF AIZERMAN FOR SIXTH-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

B. S. KALITINE[a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

This article is devoted to the investigation of stability of equilibrium of ordinary differential equations using the method of semi-definite Lyapunov's functions. Types of scalar nonlinear sixth-order differential equations for which regular constant auxiliary functions are used are emphasized. Sufficient conditions of global asymptotic stability and instability of the zero solution have been obtained and it has been established that the Aizerman problem has a positive solution concerning the roots of the corresponding linear differential equation. Studies highlight the advantages of using semi-definite functions compared to definitely positive Lyapunov's functions.

Keywords: scalar differential equation; equilibrium; stability; semi-definite Lyapunov's function.

Введение

Устойчивость решений нелинейных скалярных дифференциальных уравнений третьего, четвертого, пятого и шестого порядков рассматривалась в работах А. И. Огурцова [1–4]. Подробное изложение и анализ этих результатов содержатся в монографии [5]. Во всех упомянутых публикациях представлено решение задачи об устойчивости равновесия в целом (глобальная асимптотическая устойчивость) с использованием метода функций Ляпунова [6; 7], подразумевающего построение определенно-положительной функции V с неположительной производной по времени $\dot{V}$, вычисленной в силу динамической системы. Критерием качества полученных достаточных условий устойчивости в целом (оценка близости достаточных условий к необходимым) служит тот факт, что в соответствующем линейном случае такие условия являются необходимыми и достаточными для асимптотической устойчивости.

В работах [8, гл. 2; 9–13] решается задача об устойчивости равновесия скалярных дифференциальных уравнений второго, третьего, четвертого и пятого порядков на основании метода знакопостоянных функций Ляпунова.

Напомним, что проблема Айзермана сформулирована в работе [14] для систем из n линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}x_k + bx_1, \\ \dot{x}_i = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}x_k,\ i = \overline{2, n}. \end{cases} \tag{1}$$

Наряду с этим рассматривается система уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}x_k + f(x_1), \\ \dot{x}_i = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}x_k,\ i = \overline{2, n},\ f(0) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Предположим, что согласно условиям Рауса – Гурвица [5] решение $x_i = 0,\ i = \overline{1, n}$, линейной системы (1) асимптотически устойчиво для коэффициента b, удовлетворяющего при некоторых постоянных $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ условию

$$\alpha < b < \beta.$$

Проблема Айзермана состоит в следующем вопросе: будет ли решение $x_i = 0,\ i = \overline{1, n}$, нелинейной системы (2) устойчивым в целом, если выполнено обобщенное условие Рауса – Гурвица

$$\alpha < f(x_1) < \beta,\ x_1 \in \mathbb{R}?$$

Предлагаемая статья является продолжением исследований [8–13]. Здесь множество всех линейных скалярных дифференциальных уравнений шестого порядка с постоянными коэффициентами условно разделены на две группы в зависимости от того, существует или не существует действительный корень характеристического уравнения. В соответствии с этим рассмотрены два типа дифференциальных уравнений. Для каждого из них доказано, что относительно параметра корня (действительного или его действительной части) проблема Айзермана [14] имеет положительное решение. То есть при замене такого параметра произвольной непрерывной функцией, удовлетворяющей условиям, аналогичным линейному случаю, свойство глобальной асимптотической устойчивости нулевого решения сохраняется.

Пусть $\mathbb{R}^n$ – вещественное n-мерное евклидово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot\rangle$ и нормой $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$. Положим $B_\alpha = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \alpha\right\}$ для $\alpha > 0$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x),\ x \in \mathbb{R}^n,\ f(0) = 0, \tag{3}$$

где $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – непрерывная функция, удовлетворяющая условиям, обеспечивающим единственность решений в пространстве $\mathbb{R}^n$. Решение (3), проходящее через точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ в момент времени $t = 0$, будем обозначать $x(x_0, t)$, т. е. $x(x_0, 0) = x_0$. Система (3) обладает тривиальным решением $x = 0$.

Напомним следующие понятия и определения теории устойчивости [5; 6; 8]. Множество $Y \subset \mathbb{R}^n$ называется положительно инвариантным, если для каждого состояния $x_0 \in Y$ решение $x(x_0, t) \in Y$ для всех $t > 0$. Множество $\gamma^-(x_0) = \left\{y \in \mathbb{R}^n : y = x(x_0, t),\ t \le 0\right\}$ решения $x(x_0, t)$ системы (3) называется отрицательной полутраекторией, проходящей через точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Решение $x = 0$ системы (3) является:

• устойчивым, если $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x_0 \in B_\delta) \Rightarrow \|x(x_0, t)\| < \varepsilon\ \forall t \ge 0$;

• притягивающим, если $(\exists\sigma > 0)(\forall\alpha > 0)(\exists T > 0)(\forall x_0 \in B_\sigma) \Rightarrow \|x(x_0, t)\| < \alpha\ \forall t \ge T$;

• асимптотически устойчивым, если оно устойчивое и притягивающее;

• устойчивым в целом, если оно асимптотически устойчивое и для всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$ норма решения $\|x(x_0, t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$;

• неустойчивым, если $(\exists\varepsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x_0 \in B_\delta)(\exists t^* > 0) \Rightarrow \|x(x_0, t^*)\| \ge \varepsilon$.

Пусть $\mathbb{R}^+$ – множество неотрицательных действительных чисел, $C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$ – множество непрерывно дифференцируемых функций из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^+$. Если $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$, то через

$$\dot{V}(x_0) = \frac{dV(x_0)}{dt} = \left\langle \frac{\partial V(x_0)}{\partial x},\ f(x_0) \right\rangle$$

обозначают производную по времени функции V в силу системы (3) в точке x_0.

На основании теорем 3.3.2 и 3.3.3 [13, с. 151–152] о глобальной асимптотической устойчивости компактного положительно инвариантного множества динамической системы сформулируем утверждение относительно свойств устойчивости нулевого решения автономной системы дифференциальных уравнений (3).

Теорема 1. *Предположим, что для системы (3) существует функция* $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$ *такая, что выполняются условия:*

1) $V(x) \ge 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ V(0) = 0$*;*

2) $\dot{V}(x) \le 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$*;*

3) множество $Y_\infty = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\right\}$ *не содержит ограниченных отрицательных полутраекторий, кроме нулевой;*

4) все решения системы (3) ограничены при $t \ge 0$.

Тогда решение $x = 0$ *системы (3) устойчиво в целом.*

В работе [11] доказана следующая лемма.

Лемма. *Пусть задана система дифференциальных уравнений* $\dot{x} = Ax + f(t)$, *где* A − *постоянная* $n \times n$*-матрица,* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ *– непрерывная функция. Предположим:*

1) все характеристические корни $\lambda_j(A)$ *матрицы* A *имеют отрицательные действительные части* $\mathrm{Re}\,\lambda_j(A) < 0,\ j = \overline{1, n}$*;*

2) функция $f(t)$ *ограничена при* $t \ge 0$.

Тогда все решения системы $\dot{x} = Ax + f(t)$ *ограничены при* $t \ge 0$.

Теорема 1 и лемма будут использованы для решения проблемы Айзермана.

Пусть $x(t)$ $\left(x : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}\right)$ – скалярная k раз непрерывно дифференцируемая функция. Для краткости положим

$$x^{(1)} = \dot{x} = \frac{dx}{dt},\ x^{(2)} = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2},\ \ldots,\ x^{(k)} = \frac{d^kx}{dt^k}\ \left(x^{(0)} = x\right)$$

для производных по времени высших порядков функции $x(t)$.

Уравнения шестого порядка

1. Случай комплексных корней. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$x^{(6)} + a_1x^{(5)} + a_2x^{(4)} + a_3\dddot{x} + a_4\ddot{x} + a_5\dot{x} + a_6x = 0 \tag{4}$$

с постоянными вещественными коэффициентами $a_j,\ j = \overline{1,\ 6}$. Предположим, что его характеристическое уравнение

$$\lambda^6 + a_1\lambda^5 + a_2\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^2 + a_5\lambda + a_6 = 0 \tag{5}$$

имеет два комплексно-сопряженных корня. Тогда уравнение (5) всегда можно записать в виде

$$\left(\lambda^2 + p\lambda + q\right)\left(\lambda^4 + \alpha\lambda^3 + \beta\lambda^2 + \gamma\lambda + \delta\right) = 0 \tag{6}$$

с постоянными вещественными коэффициентами p, q, α, β, γ, δ. Здесь p соответствует вещественной части пары комплексно-сопряженных корней квадратного уравнения $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Перемножив скобки в левой части (6), приходим к выводу, что коэффициенты $a_j,\ j = \overline{1,\ 6}$, уравнения (5) и коэффициенты p, q, α, β, γ, δ уравнения (6) связаны соотношениями

$$\begin{gathered} a_1 = p + \alpha,\ a_2 = q + \alpha p + \beta,\ a_3 = \alpha q + \beta p + \gamma, \\ a_4 = \beta q + \gamma p + \delta,\ a_5 = \gamma q + \delta p,\ a_6 = \delta q. \end{gathered} \tag{7}$$

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$\begin{gathered} x^{(6)} + (p + \alpha)x^{(5)} + (q + \alpha p + \beta)x^{(4)} + (\alpha q + \beta p + \gamma)\dddot{x} + \\ + (\beta q + \gamma p + \delta)\ddot{x} + (\gamma q + \delta p)\dot{x} + \delta qx = 0, \end{gathered} \tag{8}$$

где α, β, γ, δ, q – те же постоянные, что и в (6), а $p = p\left(x,\ \dot{x},\ \ddot{x},\ \ldots,\ x^{(5)}\right)$ – непрерывная функция, обеспечивающая единственность решений уравнения (8) для всех $x \in \mathbb{R}$.

Очевидно, что в линейном случае этому дифференциальному уравнению соответствует характеристическое уравнение (5) с коэффициентами (7). Поэтому условие глобальной асимптотической устойчивости нулевого решения $x = \dot{x} = \ddot{x} = \dddot{x} = x^{(4)} = x^{(5)} = 0$ линейного дифференциального уравнения (8) относительно коэффициента p состоит в требовании $p > 0$.

Покажем, что при замене коэффициента p в линейном уравнении (8) на нелинейную функцию $p\left(x,\ \dot{x},\ \ddot{x},\ \ldots,\ x^{(5)}\right)$ с условием

$$p\left(x,\ \dot{x},\ \ddot{x},\ \ldots,\ x^{(5)}\right) > 0\ \ \forall\left(x,\ \dot{x},\ \ddot{x},\ \ldots,\ x^{(5)}\right) \in \mathbb{R}^6 \tag{9}$$

свойство глобальной асимптотической устойчивости нулевого решения (для нелинейного дифференциального уравнения (8)) сохраняется. Тем самым будет показано, что проблема Айзермана [14] относительно коэффициента p имеет положительное решение.

Перейдем от уравнения (8) к соответствующей системе дифференциальных уравнений с использованием следующей замены переменных:

$$\begin{aligned} & y = \dot{x},\ z = \dot{y},\ u = \dot{z}, \\ & v = x^{(4)} + \alpha\dddot{x} + \beta\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \delta x, \\ & w = x^{(5)} + \alpha x^{(4)} + \beta\dddot{x} + \gamma\ddot{x} + \delta\dot{x}. \end{aligned} \tag{10}$$

Отсюда получаем равенства $\ddot{x} = z$, $\dddot{x} = u$. Поэтому согласно (8) имеем представление $\dot{w} + pw + qv = 0$, что дает дифференциальное уравнение относительно переменной w, а именно $\dot{w} = -qv - pw$. Из предыдущего следуют также равенства

$$x^{(4)} = \dot{u}, \ \dot{v} = w, \tag{11}$$

из которых с учетом (10) последовательно выводим дифференциальное уравнение относительно переменной u:

$$v = \dot{u} + \alpha\dddot{x} + \beta\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \delta x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \dot{u} = v - \alpha\dddot{x} - \beta\ddot{x} - \gamma\dot{x} - \delta x = v - \alpha u - \beta z - \gamma y - \delta x.$$

Кроме того, на основании (10) можем записать представления для производных четвертого и пятого порядков:

$$\begin{gathered} x^{(4)} = v - \alpha\dddot{x} - \beta\ddot{x} - \gamma\dot{x} - \delta x = -\delta x - \gamma y - \beta z - \alpha u + v, \\ x^{(5)} = w - \alpha x^{(4)} - \beta\dddot{x} - \gamma\ddot{x} - \delta\dot{x} = \\ = w - \alpha(-\delta x - \gamma y - \beta z - \alpha u + v) - \beta u - \gamma z - \delta y = \\ = \alpha\delta x + (\alpha\gamma - \delta)y + (\alpha\beta - \gamma)z + (\alpha^2 - \beta)u + w. \end{gathered} \tag{12}$$

Таким образом, в результате замены переменных (10) приходим к системе из шести дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = u, \\ \dot{u} = -\delta x - \gamma y - \beta z - \alpha u + v, \\ \dot{v} = w, \\ \dot{w} = -qv - \varphi(x, y, z, u, v, w)w, \end{cases} \tag{13}$$

где в соответствии с формулами (11) и (12) положено

$$\begin{gathered} \varphi(x, y, z, u, v, w) = p\left(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, x^{(4)}, x^{(5)}\right) = \\ = p\left(x, y, z, u, -\delta x - \gamma y - \beta z - \alpha u + v, \ \alpha\delta x + (\alpha\gamma - \delta)y + (\alpha\beta - \gamma)z + (\alpha^2 - \beta)u + w\right). \end{gathered} \tag{14}$$

Нетрудно убедиться в том, что из устойчивости в целом или неустойчивости нулевого решения $x = y = z = u = v = w = 0$ системы уравнений (13) следует устойчивость в целом или соответственно неустойчивость нулевого решения $x = \dot{x} = \ddot{x} = \dddot{x} = x^{(4)} = x^{(5)} = 0$ дифференциального уравнения (8).

Для исследования устойчивости нулевого решения системы (13) рассмотрим знакопостоянную функцию Ляпунова

$$V(x, y, z, u, v, w) = \frac{1}{2}qv^2 + \frac{1}{2}w^2. \tag{15}$$

Ее производная по времени в силу системы (8) равна

$$\dot{V}(x, y, z, u, v, w) = -\varphi(x, y, z, u, v, w)w^2.$$

Можно легко проверить, что при условии, когда функция $p\left(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(5)}\right)$ постоянная, равная p, характеристическое уравнение линейного дифференциального уравнения (8) имеет вид (6).

Потребуем, чтобы для (6) корни λ_j, $j = \overline{1, 4}$, уравнения

$$\lambda^4 + \alpha\lambda^3 + \beta\lambda^2 + \gamma\lambda + \delta = 0 \tag{16}$$

имели отрицательные вещественные части, т. е. $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$. Кроме того, пусть выполняются неравенства

$$q > 0; \ \varphi(x, y, z, u, v, w) > 0 \ \ \forall (x, y, z, u, v, w) \in \mathbb{R}^6. \tag{17}$$

Далее согласно условию 3 теоремы 1 укажем условия, при которых множество $Y_\infty \backslash \{(0, 0, 0, 0, 0, 0)\}$, где производная $\dot{V}(x, y, z, u, v, w) = 0$, не содержит ограниченных отрицательных полутраекторий. Действительно, если бы такая полутраектория $\gamma^- = \gamma^-(x, y, z, u, v, w) \neq \{(0, 0, 0, 0, 0, 0)\}$ существовала, то вдоль нее компонента $w(t) = 0 \ \ \forall t \le 0$, а значит, и ее производная по времени $\dot{w}(t) = 0 \ \ \forall t \le 0$. Вдоль указанной полутраектории γ^- система (13) последовательно трансформируется следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = u, \\ \dot{u} = -\delta x - \gamma y - \beta z - \alpha u + v, \\ \dot{v} = w, \\ \dot{w} = -qv - \varphi(x, y, z, u, v, w)w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = u, \\ \dot{u} = -\delta x - \gamma y - \beta z - \alpha u + v, \\ \dot{v} = 0, \\ 0 = -qv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = u, \\ \dot{u} = -\delta x - \gamma y - \beta z - \alpha u + v, \\ v = 0. \end{cases}$$

То есть вдоль γ^- система (13) сводится к упрощенной линейной системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = u, \\ \dot{u} = -\delta x - \gamma y - \beta z - \alpha u. \end{cases} \tag{18}$$

Согласно критерию Гурвица (см. [5]) асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (18) вытекает из того, что корни уравнения (16) имеют отрицательные вещественные части. На основании свойств структуры общего решения таких линейных систем дифференциальных уравнений можем заключить, что существование отличных от нулевой ограниченных отрицательных полутраекторий невозможно, и мы приходим к противоречию с предположением о наличии γ^-.

Таким образом, если корни уравнения (16) имеют отрицательные действительные части, то функция (15) удовлетворяет условию 3 теоремы 1.

Покажем теперь, что всякое решение $(x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t))$ системы (13) ограничено при $t > 0$. Действительно, так как $q > 0$, то наличие знакоположительной функции (15) со знакоотрицательной производной по времени означает, что решение $(x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t))$ системы (13) ограничено по координатам $(v(t), w(t))$. Покажем ограниченность и по остальным координатам.

Рассмотрим первые четыре уравнения системы (13), предполагая, что $v(t)$ – компонента решения $(x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t))$. Имеем подсистему

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = u, \\ \dot{u} = -\delta x - \gamma y - \beta z - \alpha u + v(t). \end{cases} \tag{19}$$

С учетом предположения относительно корней уравнения (16) матрица соответствующей однородной системы для системы (19) обладает лишь характеристическими корнями с отрицательными действительными частями. Кроме того, мы показали ограниченность функции $v(t)$. Следовательно, для системы дифференциальных уравнений (19) выполнены все условия леммы, которая дает ограниченность по координатам $(x(t), y(t), z(t), u(t))$.

Таким образом, выполнены все требования теоремы 1, определяющей устойчивость в целом нулевого решения системы (13).

Поскольку очевидно, что множество точек $(x, y, z, u, 0, 0) \in \mathbb{R}^6$ системы (13) положительно инвариантно, то неустойчивость решения $x = y = z = u = 0$ системы (18) влечет неустойчивость решения $x = y = z = u = v = w = 0$ исходной системы (13).

В результате приходим к справедливости следующей теоремы.

Теорема 2. *Предположим, что линейное скалярное дифференциальное уравнение (4) с постоянными коэффициентами имеет характеристическое уравнение в виде (6), где уравнение* $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, $p > 0$, *обладает комплексно-сопряженными корнями. Тогда нулевое решение* $x = \dot{x} = \ddot{x} = \dddot{x} = x^{(4)} = x^{(5)} = 0$ *скалярного дифференциального уравнения (8) с постоянными величинами* α, β, γ, δ, q *и функцией*

$p = p\left(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(5)}\right)$ *устойчиво в целом, если все корни уравнения (16) имеют отрицательные действительные части и выполнено условие (17), где функция* $\varphi : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$ *определена соотношениями (14).*

Если среди корней уравнения (16) есть хотя бы один корень с положительной действительной частью, то нулевое решение уравнения (8) неустойчиво.

Замечание 1. Из условий устойчивости в целом в теореме 2, в частности, следует условие выполнения неравенства (9) для функции $p\left(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(5)}\right)$. Другими словами, для линейного дифференциального уравнения (8) проблема Айзермана [14] имеет положительное решение относительно коэффициента p.

2. Случай вещественного корня. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение (4) и предположим, что его характеристическое уравнение (5) имеет вещественный корень $\lambda = -s < 0$. Тогда уравнение (5) может быть записано в виде

$$(\lambda + s)\left(\lambda^5 + \alpha\lambda^4 + \beta\lambda^3 + \gamma\lambda^2 + \delta\lambda + \mu\right) = 0, \tag{20}$$

причем нетрудно установить, что между коэффициентами $a_j,\ j = \overline{1, 6}$, уравнения (5) и коэффициентами $s, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu$ уравнения (20) имеет место связь в виде равенств

$$a_1 = \alpha + s,\ a_2 = \beta + \alpha s,\ a_3 = \gamma + \beta s,\ a_4 = \delta + \gamma s,\ a_5 = \mu + \delta s,\ a_6 = \mu s. \tag{21}$$

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$x^{(6)} + (\alpha + s)x^{(5)} + (\beta + \alpha s)x^{(4)} + (\gamma + \beta s)\dddot{x} + (\delta + \gamma s)\ddot{x} + (\mu + \delta s)\dot{x} + \mu s x = 0, \tag{22}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu$ – постоянные, а $s = s\left(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(5)}\right)$ – непрерывная функция, обеспечивающая единственность решений для всех $x \in \mathbb{R}$.

Очевидно, что в линейном случае это уравнение соответствует характеристическому уравнению (20) с коэффициентами (21). Поэтому условие глобальной асимптотической устойчивости нулевого решения $x = \dot{x} = \ddot{x} = \dddot{x} = x^{(4)} = x^{(5)} = 0$ линейного уравнения относительно коэффициента s состоит в требовании $s > 0$. Покажем, что при замене коэффициента s в линейном уравнении (22) на нелинейную функцию $s\left(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(5)}\right)$ с условием

$$s\left(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(5)}\right) > 0\ \ \forall\left(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(5)}\right) \in \mathbb{R}^6 \tag{23}$$

свойство глобальной асимптотической устойчивости нулевого решения (для нелинейного дифференциального уравнения (22)) сохраняется. Тем самым будет показано, что проблема Айзермана относительно корня характеристического уравнения s имеет положительное решение.

Перейдем от уравнения (22) к соответствующей системе дифференциальных уравнений с помощью замены переменных

$$y = \dot{x},\ z = \dot{y},\ u = \dot{z},\ v = \dot{u},\ w = x^{(5)} + \alpha x^{(4)} + \beta\dddot{x} + \gamma\ddot{x} + \delta\dot{x} + \mu x. \tag{24}$$

Тогда с учетом представления (24) относительно переменной w получаем дифференциальное уравнение $\dot{w} = -sw$.

Выведем дифференциальное уравнение относительно переменной v. Из (24) имеем

$$\dot{v} = \ddot{u} = \dddot{z} = y^{(4)} = x^{(5)} = w - \alpha x^{(4)} - \beta\dddot{x} - \gamma\ddot{x} - \delta\dot{x} - \mu x = w - \mu x - \delta y - \gamma z - \beta u - \alpha v.$$

Из предыдущего также следует, что $\ddot{x} = \dot{y} = z$. Таким образом, в результате использования новых переменных (24) приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = u, \\ \dot{u} = v, \\ \dot{v} = -\mu x - \delta y - \gamma z - \beta u - \alpha v + w, \\ \dot{w} = -\varphi(x, y, z, u, v, w)w, \end{cases} \tag{25}$$

где положено

$$\varphi(x, y, z, u, v, w) = s(x, y, z, u, v, -\mu x - \delta y - \gamma z - \beta u - \alpha v + w). \tag{26}$$

Для этой системы рассмотрим знакопостоянную функцию с соответствующей производной по времени в силу системы (25):

$$V(x,\, y,\, z,\, u,\, v,\, w) = \frac{1}{2}w^2,\ \dot{V}(x,\, y,\, z,\, u,\, v,\, w) = -\varphi(x,\, y,\, z,\, u,\, v,\, w)w^2. \tag{27}$$

Легко проверить, что при условии, когда функция $s\left(x,\, \dot{x},\, \ddot{x},\, \ldots,\, x^{(5)}\right)$ постоянная, равная s, характеристическое уравнение линейного дифференциального уравнения (22) имеет вид (20).

Потребуем для уравнения (20), чтобы

$$\lambda^5 + \alpha\lambda^4 + \beta\lambda^3 + \gamma\lambda^2 + \delta\lambda + \mu = 0,\ \operatorname{Re}\left(\lambda_j\right) < 0,\ j = \overline{1,\, 5}, \tag{28}$$

т. е. корни уравнения (28) имели отрицательные вещественные части. Кроме того, пусть выполняется неравенство

$$\varphi(x,\, y,\, z,\, u,\, v,\, w) > 0\ \ \forall(x,\, y,\, z,\, u,\, v,\, w) \in \mathbb{R}^6. \tag{29}$$

Тогда производная $\dot{V}$ будет неположительной.

Согласно условию 3 теоремы 1 потребуем, чтобы множество $Y_\infty \setminus \{(0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0)\}$, где производная $\dot{V}(x,\, y,\, z,\, u,\, v,\, w) = 0$, не содержало ограниченных отрицательных полутраекторий. Действительно, если бы такая полутраектория $\gamma^- = \gamma^-(x,\, y,\, z,\, u,\, v,\, w) \neq \{(0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0)\}$ существовала, то вдоль нее компонента $w(t) = 0\ \ \forall t \leq 0$, а значит, и ее производная по времени $\dot{w}(t) = 0\ \ \forall t \leq 0$. Вдоль этой полутраектории система (25) преобразуется в систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = u, \\ \dot{u} = v, \\ \dot{v} = -\mu x - \delta y - \gamma z - \beta u - \alpha v. \end{cases} \tag{30}$$

На основании критерия Гурвица нулевое решение этой системы асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда корни уравнения (28) будут иметь отрицательные вещественные части. Следовательно, линейная система (30) не может содержать отличных от нулевой ограниченных отрицательных полутраекторий, что приводит к противоречию с существованием γ^-. Таким образом, функция (28) удовлетворяет условию 3 теоремы 1.

Покажем теперь выполнение условия 4 теоремы 1, т. е. что все решения системы (24) ограниченны. Действительно, наличие знакоположительной функции (27) со знакоотрицательной производной означает, что всякое решение $(x(t),\, y(t),\, z(t),\, u(t),\, v(t),\, w(t))$ системы (25) ограничено по координате $w(t)$.

Покажем ограниченность и по остальным координатам. Для этого рассмотрим первые пять уравнений системы дифференциальных уравнений (26):

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = u, \\ \dot{u} = v, \\ \dot{v} = -\mu x - \delta y - \gamma z - \beta u - \alpha v + w(t), \end{cases}$$

где $w(t)$ – компонента решения $(x(t),\, y(t),\, z(t),\, u(t),\, v(t),\, w(t))$. С учетом предположения относительно корней уравнения (28) матрица соответствующей ей однородной системы имеет лишь характеристические корни с отрицательными действительными частями. Кроме того, мы показали ограниченность функции $w(t)$. Следовательно, выполнены все условия леммы, из которой получаем ограниченность решений системы (25) и по координатам $(x(t),\, y(t),\, z(t),\, u(t),\, v(t))$.

Таким образом, выполнены все требования теоремы 1, и мы приходим к следующей теореме.

Теорема 3. *Нулевое решение* $x = \dot{x} = \ddot{x} = \dddot{x} = x^{(4)} = x^{(5)} = 0$ *скалярного дифференциального уравнения (22) с постоянными величинами* $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \mu$ *и функцией* $s = s\left(x,\, \dot{x},\, \ddot{x},\, \ldots,\, x^{(5)}\right)$ *устойчиво в целом,* *если выполнено условие (29), где функция* $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ *определена соотношением (26), а корни уравнения (28) имеют отрицательные вещественные части.*

Если же среди корней уравнения (28) есть хотя бы один корень с положительной действительной частью, то нулевое решение уравнения (22) неустойчиво.

Здесь утверждение о неустойчивости следует из того факта, что множество точек $(x, y, z, u, v, 0) \in \mathbb{R}^6$ системы (25) положительно инвариантно.

Замечание 2. Из условий устойчивости в целом в теореме 3, в частности, следует условие выполнения неравенства (23) для функции $s = s\left(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(5)}\right)$. Иначе говоря, для линейного дифференциального уравнения (22) проблема Айзермана [14] имеет положительное решение относительно s (вещественного корня характеристического уравнения).

Заключение

Укажем на следующие важные обстоятельства, которые вытекают из проведенных исследований устойчивости равновесия:

• достаточные условия устойчивости в целом, полученные в теореме 2 относительно коэффициента p и в теореме 3 относительно коэффициента s, совпадают с необходимыми и достаточными условиями асимптотической устойчивости в соответствующем линейном случае скалярных дифференциальных уравнений (8) и (22). Это указывает на общепринятую качественную оценку полученных условий устойчивости в целом;

• для каждой пары исследованных скалярных дифференциальных уравнений шестого порядка задача Айзермана имеет следующее более сильное решение. В отличие от традиционной постановки проблемы Айзермана [5; 14] постоянный коэффициент в линейном случае можно заменить функцией, зависящей от всех фазовых переменных соответствующей системы дифференциальных уравнений, и при этом сохраняется свойство устойчивости в целом.

Библиографические ссылки

1. Огурцов АИ. Об устойчивости в целом решений нелинейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков. *Известия высших учебных заведений. Математика*. 1958;1:124–129.

2. Огурцов АИ. Об устойчивости решений двух нелинейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков. *Прикладная математика и механика.* 1959;23(1):179–181.

3. Огурцов АИ. Об устойчивости решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков. *Известия высших учебных заведений. Математика*. 1959;3:200–209.

4. Огурцов АИ. Об устойчивости решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений пятого и шестого порядков. *Математические записки.* 1962;3(2):78–93.

5. Барбашин ЕА. *Функции Ляпунова.* Москва: Наука; 1970. 240 с.

6. Ляпунов АМ. *Общая задача об устойчивости движения.* Москва: Гостехиздат; 1950. 472 с.

7. Калитин БС. *Устойчивость дифференциальных уравнений (Метод знакопостоянных функций Ляпунова).* Саарбрюккен: LAP LAMBERT Academic Publishing; 2012. 223 с.

8. Калитин БС. Об устойчивости уравнения Льенара. *Известия высших учебных заведений. Математика.* 2018;10:17–28.

9. Калитин БС. Об устойчивости дифференциальных уравнений третьего порядка. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2018;2:25–33.

10. Калитин БС. Устойчивость некоторых дифференциальных уравнений четвертого и пятого порядков. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2019;1:18–27.

11. Калитин БС. О проблеме Айзермана для систем двух дифференциальных уравнений. *Математические заметки.* 2019; 105(2):240–250.

12. Калитин БС. *Устойчивость динамических систем второго порядка.* Саарбрюккен: LAP LAMBERT Academic Publishing; 2019. 138 с.

13. Калитин БС. *Устойчивость динамических систем (Метод знакопостоянных функций Ляпунова).* Саарбрюккен: LAP LAMBERT Academic Publishing; 2013. 259 с.

14. Айзерман МА. Об одной проблеме, касающейся устойчивости «в большом» динамических систем. *Успехи математических наук.* 1949;4(4):187–188.

References

1. Ogurtsov AI. [On the stability in general of solutions of third-order and fourth-order nonlinear differential equations]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika.* 1958;1:124–129. Russian.

2. Ogurtsov AI. [On the stability of solutions of two nonlinear differential equations of the third and fourth order]. *Prikladnaya matematika i mekhanika.* 1959;23(1):179–181. Russian.

3. Ogurtsov AI. [On the stability of solutions of certain third-order and fourth-order nonlinear differential equations]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika.* 1959;3:200–209. Russian.

4. Ogurtsov AI. [On the stability of solutions of certain nonlinear differential equations of the fifth and sixth orders]. *Matematicheskie zapiski.* 1962;3(2):78–93. Russian.
5. Barbashin EA. *Funktsii Lyapunova* [Lyapunov's functions]. Moscow: Nauka; 1970. 240 p. Russian.
6. Lyapunov AM. *Obshchaya zadacha ob ustoichivosti dvizheniya* [The general problem of the stability of motion]. Moscow: Gostekhizdat; 1950. 472 p. Russian.
7. Kalitine BS. *Ustoichivost' differentsial'nykh uravnenii (Metod znakopostoyannykh funktsii Lyapunova)* [Stability of differential equations (Lyapunov's method of semi-definite functions)]. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing; 2012. 223 p. Russian.
8. Kalitine BS. Stability of Liénard equation. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika.* 2018;10:17–28. Russian.
9. Kalitine BS. On the stability of third order differential equations. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2018;2:25–33. Russian.
10. Kalitine BS. Stability of some differential equations of the fourth-order and fifth-order. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2019;1:18–27. Russian.
11. Kalitine BS. [On the Aizerman problem for systems of two differential equations]. *Matematicheskie zametki.* 2019;105(2): 240–250. Russian.
12. Kalitine BS. *Ustoichivost' dinamicheskikh sistem vtorogo poryadka* [Stability of second-order dynamical systems]. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing; 2019. 138 p. Russian.
13. Kalitine BS. *Ustoichivost' dinamicheskikh sistem (Metod znakopostoyannykh funktsii Lyapunova)* [Stability of dynamical systems (Lyapunov's method of semi-definite functions)]. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing; 2013. 259 p. Russian.
14. Aizerman MA. [On one problem concerning stability «in large» dynamical systems]. *Uspekhi matematicheskikh nauk.* 1949; 4(4):187–188. Russian.

Статья поступила в редколлегию 09.06.2020.
Received by editorial board 09.06.2020.