

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ФАКТОРИЗОВАННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работе исследуется асимптотическая эквивалентность факторизованных линейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$(D - \alpha_2(t))(D - \alpha_1(t))x = 0; \alpha_i(t) \in C^1([0, +\infty[), \quad (1)$$

$$(D - \beta_2(t))(D - \beta_1(t))y = 0; \beta_i(t) \in C^1([0, +\infty[). \quad (2)$$

Введем переменные $X_1 = x$; $X_2 = (D - \alpha_1(t))x$ и перейдем от уравнения (1) к равносильной треугольной системе

$$DX = P(t)X, \quad (3)$$

$$\text{где } X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}; \quad P(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) & 1 \\ 0 & \alpha_2(t) \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом переходим от уравнения (2) к треугольной системе

$$DY = Q(t)Y, \quad (4)$$

$$\text{где } Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}; \quad Q(t) = \begin{pmatrix} \beta_1(t) & 2 \\ 0 & \beta_2(t) \end{pmatrix}.$$

Будем говорить, что уравнения (1) и (2) асимптотически эквивалентны, если асимптотически эквивалентны вправо соответствующие системы (3) и (4), т. е. существует преобразование Ляпунова $Y = L(t)X$, переводящее систему (3) в систему (4). Матрица Ляпунова $L(t)$ при этом удовлетворяет условиям [1]:

$$|\det L(t)| \geq m > 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (5), \quad \|L(t)\| \leq M \quad \forall t \geq 0. \quad (6)$$

Лемма 1. Фундаментальную матрицу решений системы (3) (главный базис) можно представить в виде:

$$X_0(t) = \begin{pmatrix} \exp \int_0^t \alpha_1(\tau) d\tau & \exp \int_0^t \alpha_1(\tau) d\tau \int_a^t (\exp \int_0^s (\alpha_2(\tau) - \alpha_1(\tau)) d\tau) ds \\ 0 & \exp \int_0^t \alpha_2(\tau) d\tau \end{pmatrix},$$

где нижний предел интегрирования

$$a = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \int_0^{+\infty} \left(\exp \int_0^s (\alpha_2(\tau) - \alpha_1(\tau)) d\tau \right) ds, \text{ сходится} \\ 0, & \text{если } \int_0^{+\infty} \left(\exp \int_0^s (\alpha_2(\tau) - \alpha_1(\tau)) d\tau \right) ds, \text{ расходится.} \end{cases}$$

Аналогичным образом строим главный базис $Y_0(t)$ для системы (4), при этом нижний предел интегрирования определяется следующим образом:

$$b = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \int_0^{+\infty} \left(\exp \int_0^s (\beta_2(\tau) - \beta_1(\tau)) d\tau \right) ds, \text{ сходится;} \\ 0, & \text{если } \int_0^{+\infty} \left(\exp \int_0^s (\beta_2(\tau) - \beta_1(\tau)) d\tau \right) ds, \text{ расходится.} \end{cases}$$

Очевидно, что системы (3) и (4) асимптотически эквивалентны тогда и только тогда, когда существует такая невырожденная матрица C , что

$L(t) = Y_0(t) C X_0^{-1}(t)$ является матрицей Ляпунова. Из формулы Лиувилля и условий (5) — (6) следует

$$\left| \int_0^t (\beta_1(\tau) + \beta_2(\tau)) - (\alpha_1(\tau) + \alpha_2(\tau)) d\tau \right| \leq m_1 < +\infty. \quad (7)$$

Обозначим:

$$\delta(i) = \begin{cases} 2 & \text{при } i = 1 \\ 1 & \text{при } i = 2 \end{cases}; \quad m_{ij}(t) = \int_0^t (\beta_i(\tau) - \alpha_j(\tau)) d\tau \quad i, j = 1, 2;$$

$$\overline{m}_{ij} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t (\beta_i - \alpha_j) d\tau; \quad \underline{m}_{ij} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t (\beta_i - \alpha_j) d\tau,$$

тогда условие (7) равносильно:

$$\sup_{t \geq 0} |m_{1j}(t) + m_{2\delta(j)}(t)| < +\infty; \quad j = 1, 2. \quad (7_j)$$

Условия (7_j) являются необходимыми условиями асимптотической эквивалентности уравнений (1) и (2). В дальнейшем предполагаем эти условия выполненными.

На основании неравенств (7_j) нетрудно показать справедливость следующих утверждений:

$$\begin{aligned} \overline{m}_{ij} &= +\infty \Leftrightarrow \underline{m}_{\delta(i)\delta(j)} = -\infty, \\ \overline{m}_{ij} &= -\infty \Leftrightarrow \underline{m}_{\delta(i)\delta(j)} = +\infty, \\ -\infty < \overline{m}_{ij} < +\infty &\Leftrightarrow -\infty < \underline{m}_{\delta(i)\delta(j)} < +\infty. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(a)}(t) &= \exp \int_0^t (\beta_i - \alpha_j) d\tau \int_a^t \left(\exp \int_0^s (\alpha_2 - \alpha_1) d\tau \right) ds, \\ b_{ij}^{(b)}(t) &= \exp \int_0^t (\beta_i - \alpha_j) d\tau \int_b^t \left(\exp \int_0^s (\beta_2 - \beta_1) d\tau \right) ds, \\ \overline{M} &= \begin{pmatrix} \overline{m}_{11} & \overline{m}_{12} \\ \overline{m}_{21} & \overline{m}_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Дальнейшее исследование будем проводить в зависимости от значений $\overline{m}_{ij}$ и m_{ij} . При этом, если по крайней мере три элемента матрицы $\overline{M}$ равны $+\infty$, или либо первый столбец, либо вторая строка состоят из символов $+\infty$, то уравнения (1) и (2) не являются асимптотически эквивалентными. Остальные девять случаев дают критерий асимптотической эквивалентности. Сформулируем некоторые из них.

Теорема 1. Пусть все $m_{ij}(t)$ ограничены. Тогда уравнения (1) и (2) асимптотически эквивалентны тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- 1) $a = b = +\infty$;
- 2) $a = b = 0$ и существуют такие ненулевые c_{11} и c_{22} , что функция $c_{22}a_{12}^{(0)}(t) - c_{11}b_{12}^{(0)}(t)$ ограничена.

Теорема 2. Пусть $\overline{m}_{ii} = +\infty$; $\overline{m}_{ij} < +\infty$. Тогда уравнения (1) и (2) асимптотически эквивалентны тогда и только тогда, когда $a = b = +\infty$ и функции $b_{11}^{(\infty)}(t)$, $a_{22}^{(\infty)}(t)$ ограничены.

Теорема 3. Пусть $\overline{m}_{11} = +\infty$; $\overline{m}_{12} < +\infty$; $\overline{m}_{21} < +\infty$; $\overline{m}_{22} < +\infty$. Тогда уравнения (1) и (2) асимптотически эквивалентны тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- a) $a = b = +\infty$, функция $b_{11}^{(\infty)}(t)$ ограничена;

б) $a = 0$; $b = +\infty$, функции $b_{11}^{(\infty)}(t)$; $a_{22}^{(0)}(t)$ и $\int_0^t \left(\exp \int_0^s (\alpha_2 - \alpha_1) d\tau \right) ds \times$
 $\times \int_{-\infty}^t \left(\exp \int_0^s (\beta_2 - \beta_1) d\tau \right) ds$ ограничены.

З а м е ч а н и е. Если условие б) теоремы 3 выполнено, то $\lim_{t \rightarrow +\infty} m_{11}(t) = +\infty$ и $\lim_{t \rightarrow +\infty} m_{22}(t) = -\infty$.

В работе [2] получены некоторые достаточные условия эквивалентности (1) и (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Былов Б. Ф. и др. Теория показателей Ляпунова.— М., 1966.
2. Мохамед Стил Камара. Асимптотическая эквивалентность факторизуемых уравнений второго порядка.— Рукопись деп. в БелНИИНТИ, № 741 Бе83. Деп. от 06.08.83.

Поступила в редакцию
21.12.83.

Кафедра высшей математики ФПМ