УДК 517.926.45

Т. Л. СУРИН

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ СИСТЕМ ЛАППО-ДАНИЛЕВСКОГО

Пусть даны линейные дифференциальные системы

$$\dot{x} = P(t)x \quad (1) \quad \text{и} \quad \dot{z} = P(t)z + Q(t)z, \qquad (*)$$

где $P(t)$ — непрерывная ограниченная матрица, $\|Q(t)\| \to 0$. Известно [1], что показатели системы (1) неустойчивы при малых q-возмущениях даже в случае правильности системы (1).

Рассмотрим систему

$$\dot{y} = \varphi(t)P(t)y, \qquad (2)$$

где $\varphi(t)$ — непрерывная функция и $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = 1$. Предположим, что система (1) правильная. Будут ли совпадать показатели систем (1) и (2)? Оказывается, что ответ на этот вопрос в общем случае отрицателен. Можно привести примеры систем, у которых показатели при φ-преобразованиях не сохраняются. Однако, если мы рассмотрим правильную систему с матрицей Лаппо-Данилевского, т. е. матрицей, удовлетворяющей условию

$$P(t) \cdot \int_{t_0}^{t} P(\tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{t} P(\tau)\, d\tau \cdot P(t), \qquad (3)$$

то можно показать, что показатели систем (1) и (2) совпадают.

Теорема. 1. Если 1) система (1) правильная, 2) выполнено условие (3) и $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = 1$, то характеристические показатели системы (2) совпадают с показателями системы (1), и система (2) правильная.

Доказательство. Система (1) правильная, значит, [2] некоторая нормальная фундаментальная матрица системы (1) представима в виде

$$X(t) = S(t)\exp(\Lambda t), \qquad (4)$$

где $S(t)$ — обобщенная матрица Ляпунова, т. е. $\omega[S] = \omega[S^{-1}] = 0$, где $\omega[x] = \overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \dfrac{\ln\|x(t)\|}{t}$. Сделав преобразование $y = S(t)z$, получим

$$\dot{z} = (\Lambda + (\varphi - 1)S^{-1}PS)z. \qquad (5)$$

Так как $P(t)$ матрица Лаппо-Данилевского, то $X_1(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} P(\tau)\, d\tau\right)$ фундаментальная матрица системы (1) и

$$X(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} P(\tau)\, d\tau\right) C. \qquad (6)$$

Учитывая (3), (4) и (6), имеем

$$\dot{z} = (\Lambda + (\varphi - 1)\exp(\Lambda t)C^{-1}P(t)C\exp(-\Lambda t))z, \qquad (5')$$

причем

$$\omega[S^{-1}PS] = \omega[\exp(\Lambda t)C^{-1}P(t)C\exp(-\Lambda t)] \leqslant 0. \qquad (7)$$

Разобьем совокупность показателей системы (1) на группы

$$\lambda_1^{(1)} = \lambda_2^{(1)} = \ldots = \lambda_{e_1}^{(1)} = \Lambda_1$$

$$\lambda_{l_1+1}^{(1)} = \ldots = \lambda_{l_2}^{(1)} = \Lambda_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda_{l_{r-1}+1}^{(1)} = \ldots = \lambda_n^{(1)} = \Lambda_r,$$

где $l_k = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, n_i — кратность показателя Λ_i. Рассмотрим матрицу $R(t) = (\varphi(t) - 1)\exp(\Lambda t)C^{-1}P(t)C\exp(-\Lambda t)$

$$\omega[r_{ij}(t)] < 0, \text{ если } l_{k-1} \leqslant i \leqslant l_k,\ j > l_k,$$

$$r_{ij}(t)\to 0, \text{ если } l_{k-1}\leqslant i\leqslant l_k,\ l_{k-1}\leqslant j\leqslant l_k,$$
$$\omega[r_{ij}(t)]\leqslant 0, \text{ если } l_{k-1}\leqslant i\leqslant l_k,\ j<l_{k-1},$$

Система

$$\dot u(t)=[\Lambda+A(t)]u, \tag{8}$$

где $a_{ij}(t)=\begin{cases}0, & \text{при } l_{k-1}\leqslant i\leqslant l_k,\ j>l_k\\ r_{ij}(t), & \text{при } l_{k-1}\leqslant i\leqslant l_k,\ l_{k-1}\leqslant j\leqslant l_k\\ 0, & \text{при } l_{k-1}\leqslant i\leqslant l_k,\ j<l_{k-1}\end{cases}$

правильная, так как Λ — постоянная матрица, а $a_{ij}(t)\to 0$, показатели этой системы — $\lambda_i^{(1)}$. Приведем ее к нижне-треугольному виду с помощью унитарной матрицы $U(t)$, где $U(t)$ блочно-диагональная, такой же структуры, как и $A(t)$. Система

$$\dot v(t)=K(t)v(t), \tag{9}$$

в которую перейдет (8) после преобразования $U(t)$, снова правильная. Запишем систему (5′) в виде

$$\dot z=(\Lambda+A(t)+B(t)+C(t))z, \tag{10}$$

где $b_{ij}(t)=\begin{cases}0, & \text{при } l_{k-1}\leqslant i\leqslant l_k,\ j\geqslant l_{k-1},\\ r_{ij}(t), & \text{при } l_{k-1}\leqslant i\leqslant l_k,\ j<l_k,\end{cases}$

$c_{ij}(t)=\begin{cases}r_{ij}(t), & \text{при } l_{k-1}\leqslant i\leqslant l_k,\ j>l_k,\\ 0, & \text{при } l_{k-1}\leqslant i\leqslant l_k,\ j\leqslant l_k.\end{cases}$

Система (10) при преобразовании $U(t)$ перейдет в

$$\dot v(t)=K(t)v+U^{-1}BUv+U^{-1}CUv. \tag{11}$$

Рассмотрим систему

$$\dot v(t)=K(t)v(t)+U^{-1}(t)B(t)U(t)v(t). \tag{12}$$

$D(t)=K(t)+U^{-1}B(t)U$ — нижне-треугольная матрица, причем диагональные элементы имеют точные средние значения. Так как выполнено (7), то $\omega[d_{ij}(t)]\leqslant 0$. Можно показать, что некоторая нормальная фундаментальная матрица системы (12) представима в виде $V(t)=S(t)\exp(\Lambda t)$, где $S(t)$ — обобщенная матрица Ляпунова. Из критерия В. П. Басова [2], Д. М. Гробмана [3], Ю. С. Богданова [4] следует, что система (12) правильная.

Рассмотрим систему (11). Так как $\omega[U^{-1}CU]<0$, то, как показано в [5], показатели систем (11) и (12) совпадают и равны $\lambda_i^{(1)}(i=1,\ldots,n)$. Следовательно, показатели системы (2) равны $\lambda_i^{(1)}$, и эта система правильная.

Предположим, что система (1) неправильная. В [6] показано, что фундаментальная матрица системы (2) представима в виде

$$Y(t)=\exp\int_{t_0}^{t}P(\tau)\,d\tau\, S(t), \tag{13}$$

где $S(t)$ — обобщенная матрица Ляпунова и $\dot S(t)=(\varphi-1)P(t)S(t)$. Там же показано, что $\lambda_n^{(2)}=\lambda_n^{(1)}$. Если $\lambda_1^{(1)}=\ldots=\lambda_n^{(1)}$, то справедлива

Теорема 2. Если система (1) — система Лаппо-Данилевского и $\lambda_1^{(1)}=\lambda_2^{(1)}=\ldots=\lambda_n^{(1)}$, то $\sigma_\Lambda^{(2)}\leqslant\sigma_\Lambda^{(1)}$.

Доказательство следует из (13).

ЛИТЕРАТУРА

1. Виноград Р. Э.— Докл. АН СССР, 1953, т. 91, № 5, с. 999.
2. Басов В. П.— Вестн. Ленинградского ун-та, 1952, № 12, с. 3.
3. Гробман Д. М.— Матем. сб., 1952, т. 30, № 1, с. 121.
4. Богданов Ю. С.— Докл. АН СССР, 1955, т. 104, № 6, с. 813.
5. Богданов Ю. С.— Матем. сб., 1957, т. 41 (83), № 4, с. 481.
6. Сурин Т. Л.— Вестн. Белорусского ун-та, 1984, № 1, с. 58.

Поступила в редакцию 20.04.83.

Кафедра высшей математики