В силу того, что u, v — голоморфные в окрестности $x = y = 0$ функции, функция $F(x, y) = c_{10}x + \sum_{2i+j=1}^{\infty} c_{2i+1,j}^{*} x^{2i+1} y^j$ также голоморфная в окрестности $x = y = 0$.

В данном случае имеем

$$\dot{u} = \dot{x} = -v + xF(x, y) = -y - P(x, y), \tag{11}$$

$$\dot{v} = x + vF(x, y). \tag{12}$$

Продифференцировав (11) по t, получим $-\dot{v} + x(F'_x\dot{x} + F'_y\dot{y}) + F\dot{x} = -\ddot{y} - P'_x\dot{x} - P'_y\dot{y}$. Подставляя значение $\dot{v}$ из (12) в последнее равенство и учитывая (11), будем иметь

$$\ddot{y} = [x + xF^2 + (2F + xF'_x + P'_x)(y + P)][1 + P'_y + xF'_y]^{-1}. \tag{13}$$

Соотношение (13), в силу теоремы 1 из [2], означает, что система (3) обладает сильной изохронностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амелькин В. В., Лукашевич Н. А., Садовский А. П. Нелинейные колебания в системах второго порядка.— Минск, 1982, с. 101.
2. Руденок А. Е.— Дифференц. уравнения, 1975, т. 11, № 5, с. 811.
3. Касим Мухамед Аль-Хайдер. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1983, № 2, с. 63.

Поступила в редакцию 21.02.83.

Кафедра дифференциальных уравнений

УДК 330.115 : 62-50

Л. А. ПИЛИПЧУК

К ДВОЙСТВЕННЫМ МЕТОДАМ РЕШЕНИЯ ДВУХПРОДУКТОВОЙ ТРАНСПОРТНОЙ СЕТЕВОЙ ЗАДАЧИ

В работе [1] Р. Ф. Габасова и Ф. М. Кирилловой изложен прямой опорный метод решения разнообразных задач линейного программирования. В [2—3] рассматривается прямой опорный метод решения двухпродуктовой транспортной задачи с дополнительными ограничениями в следующей постановке:

$$\sum_{k\in K} \sum_{(i,j)\in U} c_{ij}^k x_{ij}^k \to \min, \quad \sum_{j\in I_i^+(U^k)} x_{ij}^k - \sum_{j\in I_i^-(U^k)} x_{ji}^k = a_i^k, \ i \in I, \ k \in K,$$

$$\sum_{k\in K} \sum_{(i,j)\in U} \lambda_{ij}^{kp} x_{ij}^k = \alpha_p, \ p = \overline{1, l}, \ x_{ij}^k \geqslant 0, \ x_{ij}^1 + x_{ij}^2 \leqslant d_{ij}, \ (i, j)\in U, \ k \in K, \tag{1}$$

здесь для $S = \{I, U\}$ — сети, $U = \bigcup U^k$, $K = \{1, 2\}$. $|I| < \infty$, $I_i^+(U^k) = \{j : (i, j)^k \in U^k\}$, $I_i^-(U^k) = \{j : (j, i) \in U^k\}$, заданы следующие характеристики: $a_i = \{a_i^k, \ k \in K\}$ — интенсивность узла $i \in I$; d_{ij} — пропускная способность дуги (i, j), $(i, j) \in U$; $x_{ij} = \{x_{ij}^k, \ k \in K(i, j)\}$ — мультипоток по дуге $(i, j) \in U$; $c_{ij} = \{c_{ij}^k, \ k \in K(i, j)\}$ — стоимость единичного дугового мультипотока.

В настоящей работе для задачи (1) строится двойственный алгоритм. Задача, двойственная к (1), имеет вид:

$$\sum_{k\in K} \sum_{i\in I} a_i^k u_i^k - \sum_{(i,j)\in U} d_{ij} w_{ij} + \sum_{p=1}^{l} \alpha_p r_p \to \max,$$

$$u_i^k - u_j^k + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{kp} r_p \leqslant c_{ij}^k, \ w_{ij} \geqslant 0, \ (i, j) \in U, \ k \in K. \tag{2}$$

Совокупность чисел $(u^k,\ k \in K;\ r,\ w) = (u_i^k,\ i \in I,\ k \in K;\ r_p,\ p = \overline{1,\ l};\ w_{ij},\ (i,\ j) \in U)$, удовлетворяющую ограничениям задачи (2), назовем двойственным планом задачи (1). Каждому двойственному плану $(u^k,\ k \in K;\ r,\ w)$ поставим в соответствие копоток δ: $\delta = \{\delta_{ij}^k,\ (i,\ j) \in U,\ k \in K\}$, $\delta_{ij}^k = u_i^k - u_j^k + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{kp} r_p - c_{ij}^k$.

Будем считать, что копоток δ согласован с двойственным планом $\{u^k,\ k \in K;\ r,\ w\}$:

$$w_{ij} = \max\{0,\ \delta_{ij}^1,\ \delta_{ij}^2\}. \tag{3}$$

Определим опору $U_{\text{оп}} = \{U_{\text{оп}}^1,\ U_{\text{оп}}^2,\ U^*\}$ сети S таким же образом, как и в [2]. Совокупность $\{\delta,\ U_{\text{оп}}\}$ из копотока и опоры назовем опорным копотоком.

Опорный копоток $\{\delta,\ U_{\text{оп}}\}$ считаем вырожденным, если для него выполняется одно из следующих условий:

1) существует такая дуга $(i,\ j)^k \in U_{\text{н}}^k$, что $\delta_{ij}^k = 0$ или $(i,\ j)^k \in U_{\text{н}}^k$, на которой $w_{ij} = \delta_{ij}^k = 0$, $U_{\text{н}}^k = U \setminus U_{\text{оп}}^k$, $k \in K$;

2) существует дуга $(i,\ j) \in U_{\text{н}}^1 \cap U_{\text{н}}^2$ или $(i,\ j) \in U_{\text{оп}}^l \cap U_{\text{н}}^l$, $l \in K$, $k \in K$, $l \neq k$, где $w_{ij} = \delta_{ij}^1 = \delta_{ij}^2$, $w_{ij} > 0$;

3) существует такая дуга $(i,\ j) \in U^*$, что $w_{ij} = \delta_{ij}^k = 0$, $k \in K$.

Пусть $\{\delta,\ U_{\text{оп}}\}$ — начальный опорный копоток. Построим по нему псевдопоток $\varkappa = (\varkappa_{ij},\ (i,\ j)^k \in U^k,\ k \in K)$. Сначала найдем неопорные псевдопотоки:

$$\varkappa_{ij}^k = 0, \text{ если } \delta_{ij}^k < 0 \text{ или } \delta_{ij}^k \leqslant w_{ij},\quad \varkappa_{ij}^l = d_{ij}\quad w_{ij} = \delta_{ij}^l,\ l \neq k, \text{ если } w_{ij} = \delta_{ij}^l > 0,\ (i,\ j)^l \in U_{\text{н}}^l. \tag{4}$$

Опорные дуговые псевдопотоки однозначно найдутся из системы:

$$\sum_{j \in I_i^+(U_{\text{оп}}^k)} \varkappa_{ij}^k - \sum_{j \in I_i^-(U_{\text{оп}}^k)} \varkappa_{ji}^k = a_i^k - \sum_{j \in I_i^+(U_{\text{н}}^k)} \varkappa_{ij}^k + \sum_{j \in I_i^-(U_{\text{н}}^k)} \varkappa_{ji}^k,\quad \varkappa_{ij}^1 + \varkappa_{ij}^2 = d_{ij},$$

$$(i,\ j) \in U^*,\quad \sum_{k \in K} \sum_{(i,\ j)^k \in U_{\text{оп}}^k} \lambda_{ij}^{kp} \varkappa_{ij}^k = \alpha_p - \sum_{k \in K} \sum_{(i,\ j)^k \in U_{\text{н}}^k} \lambda_{ij}^{kp} \varkappa_{ij}^k. \tag{5}$$

Приведем способ решения системы (5). Из системы уравнений:

$$\sum_{k \in K} \sum_{(\gamma,\ \rho)^k \in U_a^k} \varkappa_{\gamma\rho}^k R_p(L(\gamma,\ \rho)^k) = \alpha_p - \sum_{k \in K} \sum_{(\xi,\ \eta)^k \in U_{\text{н}}^k} \varkappa_{\xi\eta}^k \times$$

$$\times R_p(L(\xi,\ \eta)^k) - \sum_{k \in K} \sum_{r \in I} a_r^k R_p(L_r^k),$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{(\gamma,\ \rho)^k \in U_a^k} \varkappa_{\gamma\rho}^k \delta_{\tau(i,\ j),\ L(\xi,\ \eta)^k} = d_{ij} - \sum_{k \in K} \sum_{(\xi,\ \eta)^k \in U_{\text{н}}^k} \varkappa_{\xi\eta}^k \times$$

$$\times \operatorname{sign}(i,\ j)_{L(\xi,\ \eta)^k}^k - \sum_{k \in K} \sum_{r \in I} a_r^k \operatorname{sign}(i,\ j)^k L_r^k,$$

где величины $\delta_{\tau(i,\ j),\ L(\gamma,\ \rho)^k}$, $R_p(L_{(\gamma,\ \rho)^k})$, $L(\gamma,\ \rho)^k$ определены таким же образом, как и в [2 — 3], найдем однозначно псевдопотоки на дугах $(i,\ j)^k \in U_a^k$, $U_a^k = U_{\text{оп}}^k \setminus U_{\text{д}}^k$, $U_{\text{д}}^k$ — остовное дерево в частичной сети $S_k = \{I, U_{\text{оп}}^k\}$, $k \in K$, так как матрица коэффициентов системы неособая. Остальные опорные псевдопотоки $\varkappa_{ij}^k$, $(i,\ j)^k \in U_{\text{д}}^k$ вычислим из условий баланса. Теорема (критерий оптимальности). Соотношения

$$\varkappa_{ij}^k = 0 \text{ при } \delta_{ij}^k < w_{ij};\quad \sum_{k \in K_{\text{оп}}^0(i,\ j)} \varkappa_{ij}^k = d_{ij},\ \varkappa_{ij}^k \geqslant 0,\ K_{\text{оп}}^0(i,\ j) =$$

$= \{k \in K_{\text{оп}}(i, j) : \omega_{ij} = \delta_{ij}^k, \ \omega_{ij} > 0\}$, если $K_{\text{оп}}^0(i, j) \neq \varnothing$; $\varkappa_{ij}^k \geqslant 0$,

$$\sum_{k \in K_{\text{оп}}^1(i, j)} \varkappa_{ij}^k < d_{ij}, \ K_{\text{оп}}^1(i, j) = \{k \in K_{\text{оп}}(i, j) : \omega_{ij} = \delta_{ij}^k = 0\},$$

$$\text{если } K_{\text{оп}}^1(i, j) \neq \varnothing, \tag{6}$$

достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности опорного копотока $\{\delta, U_{\text{оп}}\}$.

Предположим, что опорные компоненты псевдопотока удовлетворяют ограничениям:

$$\varkappa_{ij}^k \geqslant 0, \ k \in K_{\text{оп}}(i, j), \ (i, j) \in U; \ \sum_{k \in K_{\text{оп}}(i, j)} \varkappa_{ij}^k \leqslant d_{ij} -$$

$$- \sum_{k \in K_{\text{н}}(i, j)} \varkappa_{ij}^k, \ (i, j) \in U. \tag{7}$$

Вычислим величину β:

$$\beta = - \sum_{(i, j) \in U_0^1} \sum_{k \in K_{\text{оп}}(i, j)} \varkappa_{ij}^k \delta_{ij}^k - \sum_{(i, j) \in U_0^2} (\varkappa_{ij}^k \delta_{ij}^k + \delta_{ij}^{p_0(i, j)} (d_{ij} -$$

$$- \varkappa_{ij}^{p_0(i, j)})), \ U_0^1 = \{(i, j) \in U : \omega_{ij} = 0\}, \ U_0^2 = \{(i, j) \in U : \omega_{ij} = \delta_{ij}^{p_0(i, j)} > 0$$

Достаточное условие субоптимальности. Если для псевдопотока $\varkappa$, построенного по опорному копотоку $\{\delta, U_{\text{оп}}\}$, выполняются соотношения (7) и $\beta \leqslant \varepsilon$, то $\varkappa$ — субоптимальный (ε — оптимальный) копоток.

Предположим, что критерий оптимальности и достаточное условие субоптимальности не выполняются.

На опорных дугах $(i, j)^k \in U_{\text{оп}}^k$, $k \in K_{\text{оп}}(i, j)$, на которых нарушаются соотношения (6), отметим числа $\varkappa_{ij}^k$, если $\delta_{ij}^k < \omega_{ij}$, или $\varkappa_{ij}^k < 0$, $k \in K_{\text{оп}}^0(i, j) \cup K_{\text{оп}}^1(i, j)$, и число $\sum_{k \in K_{\text{оп}}^0(i, j)} \varkappa_{ij}^k - d_{ij}$, если $K_{\text{оп}}^0(i, j) \neq \varnothing$ или $\sum_{k \in K_{\text{оп}}^1(i, j)} \varkappa_{ij}^k - d_{ij}$ при $\sum_{k \in K_{\text{оп}}^1(i, j)} \varkappa_{ij}^k > d_{ij}$, $K_{\text{оп}}^1(i, j) \neq \varnothing$. Пусть $(i_0, j_0)^k \in K_0$, $|K_0| = 2$ при $K_0 = K_{\text{оп}}^0(i, j) \cup K_{\text{оп}}^1(i, j)$ (в остальных случаях $|K_0| = 1$). Обозначим через v^0 — максимальное по модулю среди отмеченных чисел. Построим подходящее направление $t = (t_{ij}, (i, j) \in U)$, $t_{ij} = \{t_{ij}^k, \ k \in K(i, j)\}$ для копотока δ:

$$t_{i_0 j_0}^k = \begin{cases} \operatorname{sign} v_0, & \text{если } (i_0, j_0) \overline{\in} U^*, \\ \beta_{i_0 j_0} + \operatorname{sign} v^0, & \text{если } (i_0, j_0) \in U^*, \ k \in K, \end{cases}$$

$t_{ij}^k = \Delta u_i^k - \Delta u_j^k + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{kp} \Delta r_p$, $(i, j)^k \in U_{\text{н}}^k$, $k \in K$, где Δu_i^k, $i \in I$, —приращения потенциалов узлов, которые вычисляются аналогично [2]. Следуя [1], вычислим величину максимального двойственного шага σ^0. Если $\sigma^0 = \sigma_{i_* j_*}^k < \infty$, перейдем к новому копотоку $\bar{\delta}$, $\bar{\delta} = \delta + \sigma^0 t$.

В случае невырожденности описанный алгоритм является конечным, что следует из конечности двойственного опорного метода [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы линейного программирования.— Минск, 1977, ч. 1.

2. Пилипчук Л. А. Мультипоток минимальной стоимости с дополнительными ограничениями на частичные суммы дуговых потоков.— Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 2522-81. Деп. от 28.05.81.

3. Пилипчук Л. А.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 1, с. 42.

Поступила в редакцию 21.02.83.

Кафедра общего программирования