

ЛИТЕРАТУРА

1. Sahni S., Horowitz E.— Operations Research, 1978, v. 26, № 5, p. 718.
2. Korte B.— Annals of Discrete Mathematics, 1979, № 4, p. 85.
3. Girlich E., Kowaljew M. M. Nichtlineare diskrete Optimierung.— Berlin, 1981.
4. Ibarra O. H., Kim C. E.— J. ACM, 1975, v. 22, № 4, p. 463.
5. Lawber E. L.— Math. Oper. Res., 1979, v. 4, № 4, p. 339.
6. Ковалев М. М., Котов В. М.— Докл. АН БССР, 1982, т. 11, с. 969.
7. Bachmann P., Dемpe S., Fischer R., Richter K. Optimale Aufteilung der Jahresproduktion auf Monate: ein dualer Zugang.— Karl-Marx-Stadt, 1981.
8. Dемpe S.— Math. Operationsforsch. Statist., ser. optimization, 1983, v. 14, № 3, p. 523.

Поступила в редакцию
13.01.83.

Кафедра МОАСУ

УДК 517.925.12

КАСИМ МУХАМЕД АЛЬ-ХАЙДЕР

СИЛЬНАЯ ИЗОХРОННОСТЬ ЦЕНТРА АНАЛИТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЯМ КОШИ — РИМАНА

Рассмотрим дифференциальную систему вида

$$\dot{x} = -y - P(x, y), \quad \dot{y} = x + Q(x, y), \quad (1)$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — голоморфные в окрестности начала координат функции, не содержащие линейных и свободных членов. В дальнейшем предполагаем, что (1) имеет в точке $O(0, 0)$ центр и удовлетворяет условиям Коши — Римана

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (2)$$

Как известно [1], система (1) всегда является изохронной. Естественно теперь поставить вопрос: обладает ли (1) сильной изохронностью в общем случае? Оказывается, что система (1) не всегда обладает сильной изохронностью. Так, рассмотрим систему вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - A_{20}x^2 - A_{11}xy + A_{20}y^2 - A_{30}x^3 - A_{21}x^2y + 3A_{30}xy^2 + \frac{1}{3}A_{21}y^3, \\ \dot{y} &= x + \frac{1}{2}A_{11}x^2 - 2A_{20}xy - \frac{1}{2}A_{11}y^2 + \frac{1}{3}A_{21}x^3 - 3A_{30}x^2y - A_{21}xy^2 + A_{30}y^3. \end{aligned} \quad (3)$$

Нетрудно проверить, что система (3) удовлетворяет условию (2).

Теорема. Для того чтобы система (3) обладала сильной изохронностью, необходимо и достаточно, чтобы $A_{11} = 0$ и либо $A_{20} = 0$, либо $A_{30} = 0$.

Доказательство. Пусть система (3) обладает сильной изохронностью. Тогда согласно лемме 5 из [2] существует голоморфное преобразование вида

$$u = x, \quad v = y + \sum_{i+j=2}^{\infty} \beta_{ij} x^i y^j, \quad (4)$$

приводящее (3) к виду

$$\dot{u} = -v + uF(u, v), \quad \dot{v} = u + vF(u, v), \quad (5)$$

где $F(u, v)$ — голоморфная в окрестности $u = v = 0$ функция, не содержащая свободных членов.

Записав систему (5) с учетом (4) и (3) в переменных x, y и приравняв затем в полученных равенствах коэффициенты при $x^p y^q$ ($p + q = 2, 3, 4$), получим системы уравнений, из которых следует, что $A_{11} = 0$ и $A_{20}A_{30} = 0$.

Достаточность. 1) Пусть $A_{11} = A_{20} = 0$, тогда, согласно теореме 2 из [3], система (3) обладает сильной изохронностью.
 2) Пусть $A_{11} = A_{30} = 0$. Тогда по лемме 2 из [2] существует голоморфное преобразование

$$u = x + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k} y^{2k}, \quad v = y + \sum_{i+j=2}^{\infty} \beta_{ij} x^i y^j, \quad (6)$$

приводящее (3) к виду (5).
 Из (3), (6) и (5) имеем

$$\begin{aligned} & \left(-y - A_{20}x^2 + A_{20}y^2 - A_{21}x^2y + \frac{1}{3} A_{21}y^3 \right) + \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2k\alpha_{2k} y^{2k-1} \right) \left(x - 2A_{20}xy + \right. \\ & \left. + \frac{1}{3} A_{21}x^3 - A_{21}xy^2 \right) \equiv -y - \sum_{i+j=2}^{\infty} \beta_{ij} x^i y^j + \sum_{i+j=1}^{\infty} c_{ij} \left(x + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k} y^{2k} \right)^{i+1} \left(y + \right. \\ & \left. + \sum_{s+l=2}^{\infty} \beta_{sl} x^s y^l \right)^l, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \left(-y - A_{20}x^2 + A_{20}y^2 - A_{21}x^2y + \frac{1}{3} A_{21}y^3 \right) \left(\sum_{i+j=2}^{\infty} i\beta_{ij} x^{i-1} y^j \right) + \\ & + \left(1 + \sum_{i+j=2}^{\infty} j\beta_{ij} x^i y^{j-1} \right) \left(x - 2A_{20}xy + \frac{1}{3} A_{21}x^3 - A_{21}xy^2 \right) \equiv x + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k} y^{2k} + \\ & + \sum_{i+j=1}^{\infty} c_{ij} \left(x + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k} y^{2k} \right)^i \left(y + \sum_{s+l=2}^{\infty} \beta_{sl} x^s y^l \right)^{j+1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Из тождеств (7) и (8) для определения коэффициентов $\beta_{20}, \beta_{11}, \beta_{02}, \alpha_2, c_{10}, c_{01}$ получаем следующие системы уравнений:

$$\begin{aligned} x^2 : -A_{20} &= -\beta_{20} + c_{10}, \quad xy : -2\alpha_2 = -\beta_{11} + c_{01}, \quad y^2 : A_{20} = -\beta_{02}; \\ x^2 : \beta_{11} &= 0, \quad xy : -2\beta_{20} + 2\beta_{02} - 2A_{20} = c_{10}, \quad y^2 : -\beta_{11} = \alpha_2 + c_{01}. \end{aligned}$$

Отсюда получим $\alpha_2 = c_{01} = \beta_{11} = 0$. Аналогично можно показать, что $\beta_{30} = \beta_{12} = c_{20} = c_{02} = \beta_{31} = \beta_{13} = c_{21} = c_{03} = \alpha_4 = 0$.

Предположим теперь, что все $\alpha_{2k}, \beta_{2i+1,j}, c_{2s,l}$ равны нулю для $k < n, 2i+j < 2n-2, 2s+l < 2n-2$. Тогда для нахождения $\beta_{2n-2i-1,2i}, c_{2n-2i-2,2i}, i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ из (7) и (8) получаем системы уравнений:

$$\begin{aligned} 0 &= -\beta_{2n-1,0} + c_{2n-2,0}, \quad 0 = -\beta_{2n-3,2} + c_{2n-4,2}, \\ 0 &= -\beta_{2n-5,4} + c_{2n-6,4}, \quad 0 = -\beta_{2n-7,6} + c_{2n-8,6}, \\ &\dots \dots \dots \\ 0 &= -\beta_{7,2n-8} + c_{6,2n-8}, \quad 0 = -\beta_{5,2n-6} + c_{4,2n-6}, \\ 0 &= -\beta_{3,2n-4} + c_{2,2n-4}, \quad 0 = -\beta_{1,2n-2} + c_{0,2n-2}; \\ &-(2n-1)\beta_{2n-1,0} + 2\beta_{2n-3,2} = c_{2n-2,0}, \\ &-(2n-3)\beta_{2n-3,2} + 4\beta_{2n-5,4} = c_{2n-4,2}, \\ &\dots \dots \dots \\ &-3\beta_{3,2n-4} + (2n-2)\beta_{1,2n-2} = c_{2,2n-4}, \\ &\quad -\beta_{1,2n-2} = c_{0,2n-2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Легко видеть, что системы (9), (10) имеют единственное решение $\beta_{2n-2i-1,2i} = c_{2n-2i-2,2i} = 0$ для всех $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Аналогичным образом доказывается, что $\beta_{2n-2i-1,2i+1} = c_{2n-2i-2,2i+1} = \alpha_{2n} = 0, i = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Отсюда следует, что $u = x, v = y + \sum_{2i+j=2}^{\infty} \beta_{2i,j} x^{2i} y^j$, а

$$F(u, v) = c_{10}u + \sum_{i+j=1}^{\infty} c_{2i+1,j} u^{2i+1} v^j - \text{голоморфная в окрестности } u = v = 0 \text{ функция.}$$

В силу того, что u, v — голоморфные в окрестности $x = y = 0$ функции, функция $F(x, y) = c_{10}x + \sum_{2i+j=1} c_{2i+1,j} x^{2i+1} y^j$ также голоморфная в окрестности $x = y = 0$.

В данном случае имеем

$$\dot{u} = \dot{x} = -v + xF(x, y) = -y - P(x, y), \quad (11)$$

$$\dot{v} = x + vF(x, y). \quad (12)$$

Продифференцировав (11) по t , получим $-\dot{v} + x(F'_x \dot{x} + F'_y \dot{y}) + F\dot{x} = -\dot{y} - P'_x \dot{x} - P'_y \dot{y}$. Подставляя значение $\dot{v}$ из (12) в последнее равенство и учитывая (11), будем иметь

$$\dot{y} = [x + xF^2 + (2F + xF'_x + P'_x)(y + P)][1 + P'_y + xF'_y]^{-1}. \quad (13)$$

Соотношение (13), в силу теоремы 1 из [2], означает, что система (3) обладает сильной изохронностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амелькин В. В., Лукашевич Н. А., Садовский А. П. Нелинейные колебания в системах второго порядка. — Минск, 1982, с. 101.
2. Руденок А. Е. — Дифференц. уравнения, 1975, т. 11, № 5, с. 811.
3. Касим Мухамед Аль-Хайдер. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1983, № 2, с. 63.

Поступила в редакцию
21.02.83.

Кафедра дифференциальных уравнений

УДК 330.115 : 62-50

Л. А. ПИЛИПЧУК

К ДВОЙСТВЕННЫМ МЕТОДАМ РЕШЕНИЯ ДВУХПРОДУКТОВОЙ ТРАНСПОРТНОЙ СЕТЕВОЙ ЗАДАЧИ

В работе [1] Р. Ф. Габасова и Ф. М. Кирилловой изложен прямой опорный метод решения разнообразных задач линейного программирования. В [2—3] рассматривается прямой опорный метод решения двухпродуктовой транспортной задачи с дополнительными ограничениями в следующей постановке:

$$\sum_{k \in K} \sum_{(i, j) \in U} c_{ij}^k x_{ij}^k \rightarrow \min, \quad \sum_{j \in I_i^+(U^k)} x_{ij}^k - \sum_{j \in I_i^-(U^k)} x_{ji}^k = a_i^k, \quad i \in I, \quad k \in K, \\ \sum_{k \in K} \sum_{(i, j) \in U} \lambda_{ij}^{kp} x_{ij}^k = \alpha_p, \quad p = \overline{1, l}, \quad x_{ij}^k \geq 0, \quad x_{ij}^1 + x_{ij}^2 \leq d_{ij}, \quad (i, j) \in U, \quad k \in K, \quad (1)$$

здесь для $S = \{I, U\}$ — сети, $U = \bigcup U^k$, $K = \{1, 2\}$. $|I| < \infty$, $I_i^+(U^k) = \{j : (i, j)^k \in U^k\}$, $I_i^-(U^k) = \{j : (j, i) \in U^k\}$, заданы следующие характеристики: $a_i = \{a_i^k, k \in K\}$ — интенсивность узла $i \in I$; d_{ij} — пропускная способность дуги (i, j) , $(i, j) \in U$; $x_{ij} = \{x_{ij}^k, k \in K(i, j)\}$ — мультипоток по дуге $(i, j) \in U$; $c_{ij} = \{c_{ij}^k, k \in K(i, j)\}$ — стоимость единичного дугового мультипотока.

В настоящей работе для задачи (1) строится двойственный алгоритм. Задача, двойственная к (1), имеет вид:

$$\sum_{k \in K} \sum_{i \in I} a_i^k u_i^k - \sum_{(i, j) \in U} d_{ij} w_{ij} + \sum_{p=1}^l \alpha_p r_p \rightarrow \max, \\ u_i^k - u_j^k + \sum_{p=1}^l \lambda_{ij}^{kp} r_p \leq c_{ij}^k, \quad w_{ij} \geq 0, \quad (i, j) \in U, \quad k \in K. \quad (2)$$