УДК 519.1

С. ДЕМПЕ

ГРАДИЕНТНЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ О РЮКЗАКЕ

Основные методы конструирования субоптимальных алгоритмов изложены в работах [1] — [3]. Приближенные градиентные алгоритмы решения с заданной точностью различных задач рюкзачного типа разработаны в работах [4] — [6]. В данной работе исследуется обобщенная задача о рюкзаке:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}c_{ij}x_{ij}\to\min \quad (1), \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}\geqq a_0, \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}\geqq a_i,\ 1\leqq i\leqq m, \quad (3),\ x_{ij}\in\{0\}\cup[x_i^-,\ x_i^+],\ 1\leqq i\leqq m,\ 1\leqq j\leqq n_i. \quad (4)$$

Эта задача возникает при решении проблемы производственного планирования двойственным методом [7].

Проблема (1) — (4) является NP-трудной. Действительно, при $n_i = 1$, $a_i=0$, $x_i^- = x_i^+$ для всех i, (1) — (4) есть задача о рюкзаке, которая, как известно, NP — трудная задача. Это значит, что только задачи с дополнительными ограничениями на коэффициенты a_0, a_i, x_i^-, x_i^+ можно решить полиномиальным алгоритмом.

Предлагается следующий алгоритм, построенный по общей схеме градиентных алгоритмов [3]. O-й шаг: Решаем m линейных задач о рюкзаке:

$$\min\left\{\sum_{j=1}^{n_i}c_{ij}x_{ij}:\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}\geqq a_i,\ x_{ij}\in\{0\}\cup[x_i^-,\ x_i^+],\ 1\leqq j\leqq n_i\right\} \qquad (5)$$

для $1\leqq i\leqq m$. Обозначим полученное решение символом x^0. Пусть $t=0$, $z^0=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}^0$ и $s_i=\left]\dfrac{a_i}{x_i^+}\right[$, $r_i=\left]\dfrac{a_i-s_ix_i^-}{x_i^+-x_i^-}\right[$, $c_{i1}\leqq c_{i2}\leqq\ldots\leqq c_{in_i}$. Здесь $]z[$ означает наименьшее целое неотрицательное число не меньшее чем z. Легко проверить, что

$$x_{ij}^0=\begin{cases}x_i^+, & 1\leqq j\leqq r_i-1,\\ a_i-(r_i-1)x_i^+-(s_i-r_i)x_i^-, & j=r_i,\\ x_i^-, & r_i<j\leqq s_i,\\ 0, & s_i<j\leqq n_i\end{cases}$$

t-й шаг: 1. Найдем допустимое направление $(k,\ l)$ по правилу $c_{kl}=\min\{c_{ij}:x_{ij}^t<x_i^+\}$ 2. Вычисляем величину $d=\min\{x_k^+-x_{kl}^t,\ a_0-z^t\}$. 3. Строим новое решение $x_{ij}^{t+1}=\begin{cases}\max\{x_k^-,\ x_{kl}^t+d\} & \text{для } (i,\ j)=(k,\ l)\\ x_{ij}^t & \text{иначе,}\end{cases}$

$z^{t+1}=z^t+x_{kl}^{t+1}-x_{kl}^t$. 4. Если $z^{t+1}\geqq a_0$, то полученное решение является допустимым и алгоритм заканчивает работу с решением $x^g=x^{t+1}$, иначе полагаем $t=t+1$ и перейдем к $(t+1)$-му шагу.

Трудоемкость алгоритма $0(n)=0\left(\sum_{i=1}^{m}n_i\right)$. Если выполняется одно из следующих условий: (i) $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}^g=a_0$, (ii) $\sum_{i=1}^{m}a_i\geqq a_0$, (iii) $x_i^+=x_i^-=x^-$ для всех $1\leqq i\leqq m$, то градиентный алгоритм строит оптимальное решение x^*.

Пусть a_0 принимает любое значение из интервала $\left[0, \sum_{i=1}^{m} n_i x_i^+\right]$ с равной вероятностью. В [8] доказано, что градиентный алгоритм находит оптимальное решение с вероятностью

$$P(x^g = x^*) \geqq 1 - \frac{\sum_{i=1}^{m} (n_i - s_i) x_i^-}{\sum_{i=1}^{m} n_i x_i^+}.$$

Пусть $Q(x^*) = \{(i, j) : x_{ij}^* \geqq x_i^-, \ x_{ij}^A = 0\}$, где $x^A = x^{t-1}$ — последнее недопустимое решение алгоритма.

Теорема 1 [8]. Пусть дано целое число k такое, что

$$\frac{k-1}{k} < \frac{\max\{x_i^- : 1 \leqq i \leqq m\}}{\min\{x_i^t : 1 \leqq i \leqq m\}} \leqq \frac{k}{k+1}, \ k \leqslant s_i, \ 1 \leqq i \leqq m. \tag{6}$$

Тогда существует оптимальное решение x^*, для которого $|Q(x^*)| \leqq k$. Используя условия (6), разработаем приближенный алгоритм решения любой конкретной задачи (1)—(4). Рассмотрим задачу минимизации (1) при ограничениях (2), (3) и

$$x_{ij} \in \{0\} \cup [(1 - \lambda_i) x_i^-, \ x_i^+], \ 1 \leqq i \leqq m, \ 1 \leqq j \leqq n_i. \tag{4'}$$

Выбираем минимальное число λ_i, $1 \leqq i \leqq m$ так, чтобы выполнялись условия (6). Это возможно, так как при $\lambda_i = 1$, $1 \leqq i \leqq m$ возникает задача минимизации линейной функции на полиматроиде, которая разрешима градиентным алгоритмом. Решая задачу (1)—(3), (4′) алгоритмом ветвей и границ, на основе теоремы 1 получаем решение x^p, не обязательно допустимое в задаче (1)—(4). Построим решение x^n по правилу

$$x_{ij}^n = \begin{cases} x_i^-, & \text{если } x_{ij}^p \notin \{0\} \cup [x_i^-, \ x_i^+], \\ x_{ij}^p & \text{иначе.} \end{cases} \tag{7}$$

Теорема 2. Пусть f_1 — нижняя граница значений целевой функции. Тогда

$$\frac{f(x^n)}{f(x^*)} \leqq 1 + \frac{1}{f_1} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sum_{j=1}^{n_i} c_{ij} x_i^-. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть $I = \{(i, j) : x_{ij}^p \in \{0\} \cup [x_i^-, \ x_i^+]\}$. Имеем $f(x^*) \geqq f(x^p) = \sum_{(i,j) \in I} c_{ij} x_{ij}^p + \sum_{(i,j) \in I} c_{ij} x_i^- + \sum_{(i,j) \notin I} c_{ij} (x_{ij}^p - x_i^-) \geqq f(x^n) - \sum_{(i,j) \in I} c_{ij} (x_i^- - (1 - \lambda_i) x_i^-)$. Откуда следует $f(x^n) \leqq f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sum_{j=1}^{n_i} \times c_{ij} x_i^- \leqq f(x^*) \left(1 + \frac{1}{f_1} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_i c_{ij} x_i^-\right)$.

Замечание 1. В качестве нижней границы f_1 значений целевой функции можно взять $f(x^g) - c_{kl}(z^t - a_0)$.

Замечание 2. Теорему 2 можно использовать, чтобы уменьшить объем вычислений при решении задачи, удовлетворяющей условиям теоремы 1.

Теорема 2 дает оценку значения целевой функции в наихудшем случае. Вычислительные эксперименты показали, что обычно значение целевой функции в точке x^n лежит существенно ближе к оптимальному решению. С другой стороны, легко показать, что оценка (8) достижима.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sahni S., Horowitz E.— Operations Research, 1978, v. 26, № 5, p. 718.
2. Korte B.— Annals of Discrete Mathematics, 1979, № 4, p. 85.
3. Girlich E., Kowaljow M. M. Nichtlineare diskrete Optimierung.— Berlin, 1981.
4. Ibarra O. H., Kim C. E.— J. ACM, 1975, v. 22, № 4, p. 463.
5. Lawber E. L.— Math. Oper. Res., 1979, v. 4, № 4, p. 339.
6. Ковалев М. М., Котов В. М.— Докл. АН БССР, 1982, т. 11, с. 969.
7. Bachmann P., Dempe S., Fischer R., Richter K. Optimale Aufteilung der Jahresproduktion auf Monate: ein dualer Zugang.— Karl-Marx-Stadt, 1981.
8. Dempe S.— Math. Operationsforsch. Statist., ser. optimization, 1983, v. 14, № 3, p. 523.

Поступила в редакцию
13.01.83.

Кафедра МОАСУ

УДК 517.925.12

КАСИМ МУХАМЕД АЛЬ-ХАЙДЕР

СИЛЬНАЯ ИЗОХРОННОСТЬ ЦЕНТРА АНАЛИТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЯМ КОШИ — РИМАНА

Рассмотрим дифференциальную систему вида

$$\dot{x} = -y - P(x, y), \quad \dot{y} = x + Q(x, y), \tag{1}$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — голоморфные в окрестности начала координат функции, не содержащие линейных и свободных членов. В дальнейшем предполагаем, что (1) имеет в точке $O(0, 0)$ центр и удовлетворяет условиям Коши — Римана

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{2}$$

Как известно [1], система (1) всегда является изохронной. Естественно теперь поставить вопрос: обладает ли (1) сильной изохронностью в общем случае? Оказывается, что система (1) не всегда обладает сильной изохронностью. Так, рассмотрим систему вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - A_{20}x^2 - A_{11}xy + A_{20}y^2 - A_{30}x^3 - A_{21}x^2y + 3A_{30}xy^2 + \frac{1}{3}A_{21}y^3, \\ \dot{y} &= x + \frac{1}{2}A_{11}x^2 - 2A_{20}xy - \frac{1}{2}A_{11}y^2 + \frac{1}{3}A_{21}x^3 - 3A_{30}x^2y - A_{21}xy^2 + A_{30}y^3. \end{aligned} \tag{3}$$

Нетрудно проверить, что система (3) удовлетворяет условию (2).

Теорема. Для того чтобы система (3) обладала сильной изохронностью, необходимо и достаточно, чтобы $A_{11} = 0$ и либо $A_{20} = 0$, либо $A_{30} = 0$.

Доказательство. Пусть система (3) обладает сильной изохронностью. Тогда согласно лемме 5 из [2] существует голоморфное преобразование вида

$$u = x, \quad v = y + \sum_{i+j=2}^{\infty} \beta_{ij} x^i y^j, \tag{4}$$

приводящее (3) к виду

$$\dot{u} = -v + uF(u, v), \quad \dot{v} = u + vF(u, v), \tag{5}$$

где $F(u, v)$ — голоморфная в окрестности $u = v = 0$ функция, не содержащая свободных членов.

Записав систему (5) с учетом (4) и (3) в переменных x, y и приравняв затем в полученных равенствах коэффициенты при $x^p y^q$ $(p + q = 2, 3, 4)$, получим системы уравнений, из которых следует, что $A_{11} = 0$ и $A_{20}A_{30} = 0$.