Теорема 3. Если разностная схема (12) аппроксимирует исходную систему (1) с погрешностью $0(h^2+\tau)$, то при достаточно малых h и τ и таких, что при $\tau = h^\alpha$, $\alpha > 1{,}5$, решение разностной схемы (12) сходится к точному решению исходной задачи, при этом скорость сходимости по порядку совпадает с погрешностью аппроксимации.

Доказательство теоремы 3 повторяет рассуждения теоремы 1. Как и в случае разностной схемы (4), решение системы нелинейных уравнений (12) будем находить по методу Ньютона, для сходимости которого имеет место

Теорема 4. При выполнении условий теоремы 3 и $\tau=h^\alpha$, $\alpha>0{,}5$ метод Ньютона решения системы (12) сходится.

Замечание 1. Все проведенные рассуждения имеют место для газа с нелинейными уравнениями состояния $p = P(\rho, T)$, $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T)$, где T — температура.

Замечание 2. Исследование сходимости разностной схемы, аналогичной (12), для случая изотермического течения газа при наличии слабых разрывов в решении проведено в [13].

Замечание 3. Вид (3) краевых условий для системы (1) не ограничивает общности изложенных рассуждений.

Замечание 4. Исследование сходимости полностью консервативных разностных схем типа Лакса — Вендроффа для задач газовой динамики с учетом теплопроводности [14] существенно усложняется. Однако основные результаты [4, 5] и приведенные в настоящей работе справедливы и для этого случая.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики.— М., 1980.
2. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений.— М., 1978.
3. Самарский А. А. Теория разностных схем.— М., 1977.
4. Вакульчик П. А.— Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1983, № 5, с. 23.
5. Вакульчик П. А., Баурина Н. И.— Рукопись деп. в ВИНИТИ № 5806-81. Деп. от. 23.12.81.
6. Lax P. D., Wendroff B.— Commun. Pure Appl. Math., 1960, v. 13, № 2, p. 217.
7. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем.— М., 1973.
8. Москальков М. Н.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1980, т. 20, № 1, с. 162.
9. Абрашин В. Н.— Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 4, с. 710.
10. Абрашин В. Н., Матус П. П.— Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 7, с. 1155.
11. Абрашин В. Н.— Дифференц. уравнения, 1975, т. 11, № 2, с. 294.
12. Попов Ю. П., Самарский А. А.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1976, т. 16, № 6, с. 1503.
13. Голик С. И.— Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1982, № 3, с. 10.
14. Повещенко Ю. А., Попов Ю. П., Самарская Е. А.— Ж. вычисл. математем. и матем. физ., 1982, т. 22, № 4, с. 903.

Поступила в редакцию 22.12.82.

Кафедра вычислительной математики

УДК 512.643

П. Т. КОЗЕЛ

О ВЛОЖЕНИИ ОРТОГОНАЛЬНОЙ ГРУППЫ НАД ПОЛЕМ ХАРАКТЕРИСТИКИ 2 В ПОЛНУЮ ЛИНЕЙНУЮ ГРУППУ

В работе дано доказательство теоремы, анонсированной в [1]. Используются обозначения из [2], а также следующие: 0_{sl} — нулевая $s\times l$-матрица; E_m — единичная $m\times m$-матрица; ${}^tX$ — матрица, транспонированная к X; $d(X)=(x_{11}, \ldots, x_{mm})$ — вектор диагональных элементов матрицы $X=(x_{ij})$. Симплектическая группа $Sp_{2m}(K)$ над полем K характеристики 2 отождествляется с группой матриц $S=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D\end{bmatrix}$, удовлетворяющих условию ${}^tSGS = G$, $G = \begin{bmatrix} 0 & E_m \\ E_m & 0 \end{bmatrix}$, A, B, C, D — $m \times m$ — матрицы.

Теорема. Пусть K — алгебраически замкнутое поле характеристики 2; V — n-мерное векторное пространство над K; $Q: V \to K$ — невырожденная квадратичная форма. Существует базис пространства V, в котором

1) ортогональная группа $O_n(K, Q)$ при $n = 2m + 1$ совпадает с группой матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0_{m1} & A & B \\ 0_{m1} & C & D \end{bmatrix},$$

где $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ — произвольный элемент группы $Sp_{2m}(K)$, $1 \times m$ — матрицы $a = [a_1 \dots a_m]$, $b = [b_1 \dots b_m]$ элементом $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ определяются однозначно: $(a_1^2, \dots, a_m^2) = d({}^tAC)$, $(b_1^2, \dots, b_m^2) = d({}^tBD)$.

2) $0_n(K, Q)$ при $n = 2m$ совпадает с подгруппой матриц $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ группы $Sp_{2m}(K)$, где $d({}^tAC) = d({}^tBD) = 0$.

Доказательство. 1) $n = 2m + 1$. Из [2, гл. 1, § 16] следует, что в этом случае для алгебраически замкнутого поля ранг знакопеременной формы f, связанной с невырожденной квадратичной формой Q, равен $n - 1 = 2m$; пространство V представимо в виде $V = V^0 \dotplus V_1$, где V^0 — одномерное подпространство, ортогональное к V относительно формы f; в пространстве V_1 существует базис из особых векторов $e_1, \dots, e_{2m}$, т. е. $Q(e_i) = 0$, $i = \overline{1, 2m}$, удовлетворяющий также условиям $f(e_i, e_{m+i}) = 1$, $i = \overline{1, m}$, $f(e_i, e_j) = 0$, если $j \neq m + i$; в подпространстве V^0 существует вектор e, для которого $Q(e) = 1$. Следовательно, в пространстве V существует базис

$$e, e_1, \dots, e_{2m}, \tag{1}$$

удовлетворяющий указанным выше условиям, а также $f(e, e_i) = 0$, $i = \overline{1, 2m}$. Пусть $X = xe + x_1e_1 + \dots + x_{2m}e_{2m}$, $Y = ye + y_1e_1 + \dots + y_{2m}e_{2m}$. Непосредственно проверяется, что $Q(X) = x^2 + \sum_{i=1}^{m} x_i x_{m+i}$, $f(X, Y) = \sum_{i=1}^{m} x_i y_{m+i} + \sum_{i=1}^{m} x_{m+i} y_i$. Отождествим ${}^tX = [xx_1 \dots x_{2m}]$, ${}^tY = [yy_1 \dots y_{2m}]$, тогда

$$Q(X) = {}^tXHX, \quad f(X, Y) = {}^tXFY, \tag{2}$$

где $H = \begin{bmatrix} 1 & 0_{1m} & 0_{1m} \\ 0_{m1} & 0_{mm} & E_m \\ 0_{m1} & 0_{mm} & 0_{mm} \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} 0 & 0_{1m} & 0_{1m} \\ 0_{m1} & 0_{mm} & E_m \\ 0_{m1} & E_m & 0_{mm} \end{bmatrix}$.

Пусть $\sigma \in 0_n(K, Q)$, R — матрица σ в базисе (1), тогда

$$Q(\sigma X) = Q(X), \quad f(\sigma X, \sigma Y) = f(X, Y) \tag{3}$$

$$Q(\sigma X) = {}^tX{}^tRHRX, \quad f(\sigma X, \sigma Y) = {}^tX{}^tRFRY. \tag{4}$$

Из (2)—(4) следует

$${}^tRFR = F. \tag{5}$$

Матрицы ${}^tRHR$ и H могут отличаться на некоторую симметрическую матрицу с нулевыми элементами на главной диагонали. Билинейная форма $\varphi(X, Y) = {}^tXNY$ с симметрической матрицей N и $d(N) = 0$ над полем характеристики 2 является знакопеременной. Поэтому $Q(\sigma X) = Q(X) + \varphi(X, X)$, ${}^tRHR = H + N$, или

$$ {}^tRHR + H = N, \tag{6} $$
где ${}^tN = N$, $d(N) = 0$.

Таким образом, матрица R изометрии $\sigma \in 0_n(K, Q)$ в базисе (1) удовлетворяет условиям (5) и (6). Так как на подпространстве V^0 σ действует тождественно [2], то $\sigma(e) = e$, и R имеет вид

$$ \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0_{m1} & A & B \\ 0_{m1} & C & D \end{bmatrix}, \tag{7} $$

где A, B, C, D — $m \times m$-матрицы, $a = [a_1 \dots a_m]$, $b = [b_1 \dots b_m]$. Из (5) следует, что $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in Sp_{2m}(K)$, т. е.

$$ {}^tCA = {}^tAC, \ {}^tDB = {}^tBD, \ {}^tCB + {}^tAD = E_m. \tag{8} $$

Непосредственно проверяется, что

$$ {}^tRHR + H = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ {}^ta & A_1 & B_1 + E_m \\ {}^tb & C_1 & D_1 \end{bmatrix}, \tag{9} $$

где $A_1 = {}^taa + {}^tAC$, $B_1 = {}^tab + {}^tAD$, $C_1 = {}^tba + {}^tBC$, $D_1 = {}^tbb + {}^tBD$. Из (8) следует, что ${}^tA_1 = A_1$, ${}^tD_1 = D_1$, $B_1 + E_m = {}^tC_1$. Поэтому матрица (9) является симметрической при любых a и b, если $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in Sp_{2m}(K)$. Условие $d({}^tRHR + H) = 0$ будет выполняться, если $d(A_1) = d(D_1) = 0$. Так как $d(A_1) = d({}^taa) + d({}^tAC)$, $d(D_1) = d({}^tbb) + d({}^tBD)$ и $d({}^taa) = (a_1^2, \dots, a_m^2)$, $d({}^tbb) = (b_1^2, \dots, b_m^2)$, то имеем

$$ (a_1^2, \dots, a_m^2) = d({}^tAC), \ (b_1^2, \dots, b_m^2) = d({}^tBD). \tag{10} $$

Таким образом, если $\sigma \in 0_n(K, Q)$ при $n = 2m + 1$, то матрица элемента σ в базисе (1) имеет вид (7) и удовлетворяет условиям (8) и (10). И обратно, гомоморфизм σ пространства V с такой матрицей в базисе (1) удовлетворяет условию $Q(\sigma X) = Q(X)$.

2) Пусть $n = 2m$. В этом случае ранг знакопеременной формы f, соответствующей форме Q, равен n. Пространство V обладает свойствами пространства V_1 из п. 1). Поэтому в V существует базис $e_1, \dots, e_{2m}$, что $Q(X) = {}^tXHX$, $f(X, Y) = {}^tXFY$, где

$$ H = \begin{bmatrix} 0_{mm} & E_m \\ 0_{mm} & 0_{mm} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0_{mm} & E_m \\ E_m & 0_{mm} \end{bmatrix}. $$

Как и выше получим, что матрица $R = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ элемента $\sigma \in 0_n(K, Q)$ принадлежит $Sp_{2m}(K)$. Матрица

$$ {}^tRHR + H = \begin{bmatrix} {}^tAC & {}^tAD + E_m \\ {}^tBC & {}^tBD \end{bmatrix}. $$

Из (8) следует симметричность ее. Из $d({}^tRHR + H) = 0$ получим $d({}^tAC) = d({}^tBD) = 0$. Обратно, $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in Sp_{2m}(K)$ с $d({}^tAC) = d({}^tBD) = 0$ является матрицей элемента $\sigma \in 0_n(K, Q)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Козел П. Т.— В сб.: VIII Всесоюзный симпозиум по теории групп / Тез. сообщений. Киев, 1982, с. 52.
2. Дьедонне Ж. Геометрия классических групп.— М., 1974.

Поступила в редакцию
13.01.83.

Кафедра высшей алгебры