ЛИТЕРАТУРА

1. Прокашева В. А.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 2, с. 37.
2. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— Харьков, 1939.
3. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений.— М.— Л., 1950.

Поступила в редакцию 08.12.82.

Кафедра дифференциальных уравнений

УДК 517.917

Н. В. ПЫЖКОВА

К ВОПРОСУ О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ИЗОХРОННЫХ СИСТЕМАХ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= A_{10}(t)\,\xi + A_{01}(t)\,\eta + A_{20}(t)\,\xi^2 + A_{11}(t)\,\xi\eta + A_{02}(t)\,\eta^2 + A_{30}(t)\,\xi^3 + \\ &+ A_{21}(t)\,\xi^2\eta + A_{12}(t)\,\xi\eta^2 + A_{03}(t)\,\eta^3, \\ \frac{d\eta}{dt} &= B_{10}(t)\,\xi + B_{01}(t)\,\eta + B_{20}(t)\,\xi^2 + B_{11}(t)\,\xi\eta + B_{02}(t)\,\eta^2 + \\ &+ B_{30}(t)\,\xi^3 + B_{21}(t)\,\xi^2\eta + B_{12}(t)\,\eta^2\xi + B_{03}(t)\,\eta^3\end{aligned} \tag{1}$$

с непрерывными периодическими коэффициентами $A_{ik}(t)$, $B_{ik}(t)$.

Получим условия, при которых система (1) с помощью преобразования

$$\xi = x\cos t - y\sin t,\quad \eta = x\sin t + y\cos t \tag{2}$$

приводится к системе с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}\cdot x^3 + a_{21}x^2y + \\ &+ a_{12}xy^2 + a_{03}y^3, \\ \frac{dy}{dt} &= b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + \\ &+ b_{12}xy^2 + b_{03}y^3.\end{aligned} \tag{3}$$

Теорема 1. Для приводимости (1) к виду (3) преобразованием (2) необходимо и достаточно существование постоянных β_i $(i = \overline{0,\ 17})$ таких, что

$$\begin{aligned}B_{10}(t) &= \beta_0 + 1 + \beta_1\sin 2t + \beta_2\cos 2t, \\ A_{10}(t) &= \beta_3 - \beta_2\sin 2t + \beta_1\cos 2t, \\ B_{01}(t) &= \beta_3 + \beta_2\sin 2t - \beta_1\cos 2t, \\ A_{01}(t) &= -(\beta_0 + 1) + \beta_1\sin 2t + \beta_2\cos 2t;\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}B_{20}(t) &= -\beta_4\sin t + \beta_5\cos t - \beta_6\sin 3t + \beta_7\cos 3t, \\ A_{20}(t) &= -\beta_8\sin t + \beta_9\cos t - \beta_7\sin 3t - \beta_6\cos 3t, \\ B_{11}(t) &= (\beta_5 - \beta_8)\sin t + (\beta_9 + \beta_4)\cos t + 2\beta_7\sin 3t + 2\beta_6\cos 3t, \\ A_{11}(t) &= (\beta_9 + \beta_4)\sin t - (\beta_5 - \beta_8)\cos t - 2\beta_6\sin 3t + 2\beta_7\cos 3t, \\ B_{02}(t) &= \beta_9\sin t + \beta_8\cos t + \beta_6\sin 3t - \beta_7\cos 3t, \\ A_{02}(t) &= -\beta_5\sin t - \beta_4\cos t + \beta_7\sin 3t + \beta_6\cos 3t;\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}B_{30}(t) &= (\beta_{12} + 3\beta_{10}) + 2(\beta_{17} - \beta_{16} - \beta_{14})\sin 2t + 2\beta_{11}\cos 2t - \\ &- (\beta_{15} + \beta_{16} + \beta_{17})\sin 4t - (\beta_{12} - \beta_{10})\cos 4t, \\ A_{30}(t) &= (\beta_{17} + \beta_{16}) - (\beta_{13} + \beta_{11})\sin 2t - \beta_{14}\cos 2t + \\ &+ (\beta_{12} - \beta_{10})\sin 4t - (\beta_{15} + \beta_{16} + \beta_{17})\cos 4t, \\ B_{21}(t) &= (\beta_{17} + \beta_{16}) + (3\beta_{11} - \beta_{13})\sin 2t + (4\beta_{16} - 4\beta_{17} + \\ &+ 3\beta_{14})\cos 2t - 3(\beta_{12} - \beta_{10})\sin 4t + 3(\beta_{15} + \beta_{16} + \beta_{17})\cos 4t, \\ A_{21}(t) &= -(\beta_{12} + 3\beta_{10}) + 2(\beta_{16} - \beta_{17})\sin 2t + 2\beta_{13}\cos 2t -\end{aligned} \tag{6}$$

$$-3(\beta_{15}+\beta_{16}+\beta_{17})\sin 4t-3(\beta_{12}-\beta_{10})\cos 4t,$$

$$B_{12}(t)=(\beta_{12}+3\beta_{10})+2(\beta_{16}-\beta_{17})\sin 2t+2\beta_{13}\cos 2t+$$
$$+3(\beta_{15}+\beta_{16}+\beta_{17})\sin 4t+3(\beta_{12}-\beta_{10})\cos 4t,$$

$$A_{12}(t)=(\beta_{17}+\beta_{16})-(3\beta_{11}-\beta_{13})\sin 2t-(4\beta_{16}-4\beta_{17}+$$
$$+3\beta_{14})\cos 2t-3(\beta_{12}-\beta_{10})\sin 4t+3(\beta_{15}+\beta_{16}+\beta_{17})\cos 4t,$$

$$B_{03}(t)=(\beta_{17}+\beta_{16})+(\beta_{13}+\beta_{11})\sin 2t+\beta_{14}\cos 2t+$$
$$+(\beta_{12}-\beta_{10})\sin 4t-(\beta_{15}+\beta_{16}+\beta_{17})\cos 4t,$$

$$A_{03}(t)=-(\beta_{12}+3\beta_{10})+2(\beta_{17}-\beta_{16}-\beta_{14})\sin 2t+2\beta_{11}\cos 2t+$$
$$+(\beta_{15}+\beta_{16}+\beta_{17})\sin 4t+(\beta_{12}-\beta_{10})\cos 4t.$$

Доказательство осуществляется непосредственной подстановкой обратного преобразования к преобразованию (2) в (3) и сравнением с (1). Эта теорема обобщает теорему, полученную в [1]. После вычислений получаем:

$$\begin{gathered}
2\beta_0=b_{10}-a_{01},\quad 2\beta_1=a_{10}-b_{01},\\
2\beta_2=a_{01}+b_{10},\quad 2\beta_3=a_{10}+b_{01},\\
4\beta_4=-3a_{02}-a_{20}+b_{11},\quad 4\beta_5=3b_{20}+b_{02}-a_{11},\\
4\beta_6=-a_{20}+a_{02}+b_{11},\quad 4\beta_7=b_{20}-b_{02}+a_{11},\\
4\beta_8=3b_{02}+b_{20}+a_{11},\quad 4\beta_9=3a_{20}+a_{02}+b_{11},\\
8\beta_{10}=b_{30}-a_{03},\quad 4\beta_{11}=b_{30}+a_{03},\\
8\beta_{12}=b_{12}-a_{21},\quad 4\beta_{13}=b_{12}+a_{21},\\
2\beta_{14}=b_{03}-a_{30},\quad 2\beta_{15}=-a_{30}-b_{03},\\
8\beta_{16}=b_{21}+3a_{30},\quad 8\beta_{17}=3b_{03}+a_{12}.
\end{gathered}\tag{7}$$

Отметим, что система (7) однозначно разрешима относительно a_{ik}, b_{ik}. Ниже будем предполагать, что

$$a_{01}=-1,\ b_{10}=1,\ a_{10}=b_{01}=0.\tag{8}$$

Период решений (3) при выполнении (8) по Ляпунову [2] можно представить в виде $T(c)=2\pi(1+\sum\limits_{i=2}^{\infty}h_ic^i)$, где h_i — полиномы степени i от коэффициентов a_{ij}, b_{ij}.

На основании (2) решения $x=x(t)$, $y=y(t)$ исходной системы (1) оказываются комбинацией периодических функций периодов 2π и $T(c)$. Если O (0, 0) для (3) является изохронным центром, то $T(c)=2\pi$, и все решения (1) из достаточно малой окрестности O (0, 0) будут периодическими периода 2π.

Из вышеизложенного следует

Теорема 2. Для того чтобы особая точка системы (1) была изохронным центром, достаточно, чтобы особая точка соответствующей ей системы с постоянными коэффициентами (3) была изохронным центром.

Ниже будем рассматривать частные случаи системы (1). Пусть

$$A_{ij}(t)=B_{ij}(t)=0,\ i+j=3.\tag{9}$$

Из теоремы об изохронности центра O (0, 0) системы с нелинейностями второй степени [3] теоремы 1 и теоремы 2 следует

Теорема 3. Для того чтобы система (1) при условиях (9) имела в начале координат изохронный центр, достаточно существования постоянных β_i, ($i=\overline{0,\ 9}$) таких, что $A_{ij}(t)$, $B_{ij}(t)$ представимы в виде (4), (5) и выполнения хотя бы одной из четырех серий условий:

1. $\beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta_6=\beta_7=\beta_9-\beta_4=\beta_8+\beta_5=\beta_0-1=0$,
2. $\beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta_4=\beta_5=\beta_6=\beta_7=\beta_0-1=0$,
3. $\beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta_0-1=3\beta_9-7\beta_4=3\beta_8+7\beta_5=\beta_7^3+\beta_7\beta_6^2+\beta_5^3-3\beta_5\beta_4^2=$
$=\beta_6^3+\beta_7^2\beta_6+3\beta_5^2\beta_4-\beta_4^3=0$,

4. $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_0 - 1 = \beta_9 - 13\beta_4 = \beta_8 + 13\beta_5 = \beta_7^3 + \beta_7\beta_6^2 - 27\beta_5^3 + 81\beta_5\beta_4^2 = \beta_6^3 + \beta_7^2\beta_6 + 27\beta_4^3 - 81\beta_5^2\beta_4 = 0$.

$$\text{Пусть } A_{ij}(t) = B_{ij}(t) = 0, \; i + j = 2. \tag{10}$$

Из теоремы об изохронности центра O (0, 0) системы с нелинейностями третьей степени [3], теорем 1 и 2 следует

Теорема 4. Для того чтобы система (1) при выполнении условия (10) имела в начале координат изохронный центр, достаточно существования постоянных β_i ($i = \overline{0, 3}$, $i = \overline{10, 17}$ таких, что $A_{ij}(t)$, $B_{ij}(t)$ представимы в виде (4), (6) и выполнения хотя бы одной из трех серий условий:

1. $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_0 - 1 = \beta_{10} = \beta_{12} = \beta_{15} = \beta_{16} + \beta_{17} = \beta_{13} + 3\beta_{11} = 4\beta_{16} + 3\beta_{14} = 0$.
2. $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_0 - 1 = \beta_{10} = \beta_{12} = \beta_{15} = \beta_{16} + \beta_{17} = \beta_{11} = 2\beta_{16} + \beta_{14} = 0$,
3. $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_0 - 1 = \beta_{12} + 3\beta_{10} = \beta_{16} + \beta_{17} = \beta_{13} + 6\beta_{11} = 5\beta_{16} + 3\beta_{14} = 4\beta_{14}^2 + 25(4\beta_{11}^2 - 16\beta_{10}^2 - \beta_{15}^2) = 4\beta_{15}\beta_{16}^2 - \beta_{15}\beta_{13}^2 - 16\beta_{16}\beta_{13}\beta_{10} = 0$.

Для нетривиальной системы нелинейных колебаний

$$\frac{dx}{dt} = y, \; \frac{dy}{dt} = x + 3axy + a^2x^3$$

можно получить, пользуясь теоремами 1 и 2, соответствующую систему с периодическими коэффициентами вида (1), начало координат которой является изохронным центром. Эта система имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} = &-2\eta + \frac{3}{4}a(\cos t - \cos 3t)\xi^2 + \frac{3}{2}a(\sin t - \sin 3t)\xi\eta - \\ &- \frac{3}{4}a(\cos t - \cos 3t)\eta^2 - \frac{1}{8}a^2(2\sin 2t + \sin 4t)\xi^3 - \\ &- \frac{3}{8}a^2(1 - \cos 4t)\xi^2\eta - \frac{3}{8}a^2(2\sin 2t - \sin 4t)\xi\eta^2 - \\ &- \frac{1}{8}a^2(3 - 4\cos 2t + \cos 4t)\eta^3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\eta}{dt} = &\, 2\xi - \frac{3}{4}a(\sin t + \sin 3t)\xi^2 + \frac{3}{2}a(\cos t + \cos 3t)\xi\eta + \\ &+ \frac{3}{4}a(\sin t + \sin 3t)\eta^2 + \frac{1}{8}a^2(3 + 4\cos 2t + \cos 4t)\xi^3 + \\ &+ \frac{3}{8}a^2(2\sin 2t + \sin 4t)\xi^2\eta + \frac{3}{8}a^2(1 - \cos 4t)\xi\eta^2 + \\ &+ \frac{1}{8}a^2(2\sin 2t - \sin 4t)\eta^3.\end{aligned}$$

Воспользовавшись результатами [4, 5], теоремами 1 и 2, можно выделить еще одну изохронную систему с периодическими коэффициентами:

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} = &-2\eta - \frac{1}{2}(a_{11}\sin t - b_{11}\cos t)\xi^2 + (b_{11}\sin t + a_{11}\cos t)\xi\eta + \\ &+ \frac{1}{2}(a_{11}\sin t - b_{11}\cos t)\eta^2 - \frac{1}{3}(a_{21}\sin 2t + a_{12}\cos 2t)\xi^3 - (a_{12}\sin 2t - \\ &- a_{21}\cos 2t)\xi^2\eta + (a_{21}\sin 2t + a_{12}\cos 2t)\xi\eta^2 + \frac{1}{3}(a_{12}\sin 2t - a_{21}\cos 2t)\eta^3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\eta}{dt} = &\, 2\xi - \frac{1}{2}(b_{11}\sin t + a_{11}\cos t)\xi^2 - (a_{11}\sin t - b_{11}\cos t)\xi\eta + \\ &+ \frac{1}{2}(b_{11}\sin t + a_{11}\cos t)\eta^2 + \frac{1}{3}(a_{12}\sin 2t - a_{21}\cos 2t)\xi^3 - \\ &- (a_{21}\sin 2t + a_{12}\cos 2t)\xi^2\eta - (a_{12}\sin 2t - a_{21}\cos 2t)\xi\eta^2 + \\ &+ \frac{1}{3}(a_{21}\sin 2t + a_{12}\cos 2t)\eta^3,\end{aligned}$$

где a_{11}, b_{11}, a_{12}, a_{21} — любые действительные числа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пыжкова Н. В.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1972, № 1, с. 22.
2. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движений.— Собр. соч.— Л., 1956, т. 2, с. 473.
3. Сибирский К. С. Алгебраические инварианты дифференциальных уравнений и матриц.— Кишинев, 1976, с. 268.
4. Амелькин В. В., Лукашевич Н. А.— Дифференц. уравнения, 1974, т. 10, № 4, с. 585.
5. Лукашевич Н. А.— Дифференц. уравнения, 1965, т. 1, № 3, с. 295.

Поступила в редакцию
16.12.82.

*Кафедра высшей математики
и математической физики*

УДК 518 : 517.6 : 533.7

П. А. ВАКУЛЬЧИК

О СХОДИМОСТИ ПОЛНОСТЬЮ КОНСЕРВАТИВНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ И МЕТОДА НЬЮТОНА ИХ РЕАЛИЗАЦИИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Рассмотрим систему уравнений газовой динамики в случае адиабатического течения газа [1, 2]

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial s}, \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\partial v}{\partial s}, \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right) = -\frac{\partial}{\partial s}(pv), \qquad (1)$$

где t — время; s — лагранжева массовая координата; ρ — плотность среды; v — скорость; p — давление; ε — внутренняя энергия. Пусть при $t = 0$ заданы начальные условия

$$v(s, 0) = v_0(s), \ p(s, 0) = p_0(s), \ \rho(s, 0) = \rho_0(s), \ \varepsilon(s, 0) = \varepsilon_0(s), \ 0 \leqslant s \leqslant M, \qquad (2)$$

а при $s = 0$ и $s = M$ — граничные условия вида [3].

$$v(0, t) = v^*(t), \ p(M, t) = p^*(t), \ 0 < t \leqslant t_0. \qquad (3)$$

Будем также предполагать, что решение задачи (1)—(3) в $\Pi = \{0 \leqslant s \leqslant M, \ 0 \leqslant t \leqslant t_0\}$ существует, единственно и является достаточно гладким.

Задача, аналогичная (1)—(3) в случае изотермического течения идеального газа, рассматривалась ранее в [4, 5], где на целочисленном шаблоне исследуется сходимость разностных схем типа Лакса — Вендроффа [6, 7], а также метода Ньютона их реализации. Эти исследования продолжим здесь для случая адиабатического течения, при этом, не ограничивая общности исследования, будем предполагать, что газ идеален с уравнением состояния $\varepsilon = p\zeta/(\gamma - 1)$, где $\zeta = \frac{1}{\rho}$, $\gamma > 1$ — постоянная величина.

На равномерной сетке узлов $\omega_{h\tau}$ [3] рассмотрим полностью консервативную разностную схему типа Лакса — Вендроффа

$$\bar{v}_t + p_s^{(0,5)} = 0, \ \bar{\zeta}_t - v_s^{(0,5)} = 0, \ \bar{\varepsilon}_t + \bar{p}^{(0,5)} v_s^{(0,5)} = 0, \ \varepsilon_{t,0} = -p_0^{(0,5)}\zeta_{t,0}, \qquad (4)$$

которая аппроксимирует исходную систему (1) с погрешностью $O(h^2 + \tau^2)$. Здесь $\bar{f} = 0,5\,(f(+1) + f)$, $f^{(0,5)} = 0,5\,(\hat{f} + f)$, $\bar{\varepsilon} = \frac{\overline{p\zeta}}{\gamma - 1}$. Дисперсионные свойства разностной схемы (4) изучены в работе [8]. Разностные схемы решения задачи (1)—(3), отличные от (4), предложены в [9]. Здесь же получены оценки погрешности в норме L_2. В [10] исследуется сходимость разностных схем в случае идеального газа при наличии слабого разрыва в решении. Для погрешности разностной схемы в этой работе получены априорные оценки в сеточных нормах L_2 и C. Будем исследовать сходимость разностной схемы (4) в сеточной норме $L_2 + W_2^1$. Рассмотрим ее погрешность. С этой целью обозначим через x,