Математика

УДК 518 : 517.91/94

И. Ф. КУЛЕШОВА, П. И. МОНАСТЫРНЫЙ

О ВЫЧИСЛЕНИИ КРИТИЧЕСКИХ ДЛИН ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ

Здесь предлагается новый подход к решению важной задачи о вычислении критических длин для линейных граничных задач.

Пусть задана линейная граничная задача для системы о. д. у. первого порядка

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(t)\, y_1 + a_{12}(t)\, y_2 + f_1(t), \\ y_2' = a_{21}(t)\, y_1 + a_{22}(t)\, y_2 + f_2(t), \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(0) + \beta_1 y_2(0) = \gamma_1, \ \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1, \\ \alpha_2 y_1(x) + \beta_2 y_2(x) = \gamma_2, \ \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1, \end{cases} \tag{2}$$

где $0 \leqslant t \leqslant x$ и $x > 0$ — правая подвижная граница отрезка интегрирования.

Обозначим через $z(t)$ фундаментальную матрицу для системы уравнений (1). Легко показать, что задача (1), (2) имеет единственное решение для $\forall\, x > 0$, если выполняется условие

$$D(x) = \alpha_1 (z_{12}(x)\, \alpha_2 + z_{22}(x)\, \beta_2) - \beta_1 (z_{11}(x)\, \alpha_2 + z_{21}(x)\, \beta_2) \neq 0, \tag{3}$$

где $z_{ij}(x)$ — элементы матрицы $z(x)$. Минимальное положительное число x^*, удовлетворяющее условию $D(x)=0$, называется критической длиной граничной задачи (1), (2). Другие значения $x > x^*$, удовлетворяющие условию $D(x)=0$, называются псевдокритическими длинами граничной задачи (1), (2).

Мы будем предполагать, что множество таких длин существует. Это будет иметь место, например, в случае, когда матрица $A(z) = (a_{ij}(z))_1^2$ аналитическая, в частности, когда $A(z) = \text{const}$. Далее для определения критических длин целесообразно положить $f_1(t) \equiv f_2(t) = 0$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$.

Существующие вычислительные методики [1—3] решения рассматриваемой задачи не могут быть признаны удовлетворительными ни по надежности, ни по точности результатов. Это в основном объясняется тем, что почти во всех вычислительных процедурах критическая длина определяется как точка, в которой построенное специальным образом решение уравнения Риккати терпит разрыв первого рода. Поэтому понятны трудности при определении x^* и тем более при вычислении псевдокритических длин.

В разработанном авторами алгоритме уравнения Риккати вообще не используются, а переформулировка граничной задачи в виде задач Коши выполняется с помощью ортогональных преобразований [4], что, собственно, и обеспечивает хорошие вычислительные свойства метода, вычислительная схема которого состоит в следующем.

1. Для $t>0$ находится решение задачи Коши $\Theta'+[a_{11}(t)-a_{22}(t)]\times$ $\times\sin\Theta\cos\Theta+a_{21}(t)\cos^2\Theta-a_{12}(t)\sin^2\Theta=0$, $\sin\Theta(0)=\alpha_1$, $\cos\Theta(0)=\beta_1$. Таким образом, определяется функция $\Theta(t)$ для $t>0$.

2. Вычисляется наименьшее положительное решение численного уравнения

$$\Delta(x)=0, \tag{4}$$

где $\Delta(x)=\alpha_2\cos\Theta(x)-\beta_2\sin\Theta(x)$.

В условиях задачи уравнение (4) удобно решать по методу секущих, тем самым может быть определено x^* и псевдокритические длины.

3. Находится функция $u(t)$ для $t>0$ как решение задачи Коши $u'=b_{11}(t)u+c_1(t)$, $u(0)=\gamma_1$. Если $f_i(t)\equiv 0$ и $\gamma_1=0$, то $u(t)\equiv 0$.

4. Определяется нетривиальное решение системы уравнений $\sin\Theta(x)y_1(x)+\cos\Theta(x)y_2(x)=0$, $\alpha_2 y_1(x)+\beta_2 y_2(x)=0$. Найденные значения $y_1(x)$, $y_2(x)$ нормируются, например, по правилу $|y_1(x)|+|y_2(x)|=1$ и вычисляется значение

$$v(x)=\cos\Theta(x)y_1(x)-\sin\Theta(x)y_2(x). \tag{5}$$

5. Вычисляется функция $v(t)$ на отрезке $0\leqslant t\leqslant x$ как решение задачи Коши для уравнения $v'=b_{21}(t)u+b_{22}(t)v+c_2(t)$ с начальным условием (5). Формулы для вычисления $b_{ij}(t)$ и $c_i(t)$, $i,\ j=\overline{1,\ 2}$ даны в [5, § 6.5].

Критическое и псевдокритические решения граничной задачи (1), (2) можно вычислить по правилу: $y_1(t)=v(t)\cos\Theta(t)$, $y_2(t)=-v(t)\sin\Theta(t)$.

В заключение рассмотрим задачу расчета критической нагрузки колонны с шарнирным концом, на которую действует сила P: $y''(t)+$ $+\lambda y(t)=0$, $t>0$, $y(0)=0$, $y(x)=0$, где $\lambda=\frac{P}{EI}$; I — момент инерции; E — модуль Юнга; t — осевая координата; x — длина колонны. Полагаем $\lambda=\pi^2$. Требуется определить критическую длину x^* колонны и несколько псевдокритических длин.

В этом случае задача Коши для определения функции $\Theta(x)$ имеет вид

$$\Theta'(t)=1+(\pi^2-1)\cos^2\Theta(t),\ t>0,\ \Theta(0)=\frac{\pi}{2}. \tag{6}$$

Уравнение (4) имеет простой вид: $\Delta(x)=\cos\Theta(x)=0$.

Очевидно, что при $\Theta(x)=\frac{\pi}{2}+\pi$ достигается критическая длина x^* колонны, а при $\Theta(x)=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k=2,\ 3,\ \ldots$, получаются другие псевдокритические длины. Таким образом, при численном решении задачи (6) остается только следить, при каких значениях x функция $\Theta(x)$ достигает своих критических величин $\frac{\pi}{2}+k\pi$, и уточнять эти значения по методу секущих или выполняя обратное интерполирование, например, по трем соседним значениям $\Theta(x)$, ближайшим к $\frac{\pi}{2}+k\pi$.

Отметим, что и в общем случае, когда $\alpha_2^2+\beta_2^2=1$, критические значения функции $\Theta(x)$ определяются столь же просто: $\Theta(x)=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi-$ $-\arccos\alpha_2$, $k=1,\ 2,\ \ldots$.

В таблице даны результаты численного решения задачи расчета критической нагрузки колонны, в частности, в третьем столбце приведены критическая и две псевдокритические длины колонны.

Точные значения критической длины и псевдокритических длин известны [1]: 1 и 2,3 и т. д. соответственно. Сравнение этих значений с полученными по предлагаемому методу и приведенными в таблице свидетельствует о высокой точности метода.

t_k	$\Theta(t_k)$	x^*
0,99	.470238583775 1	
1,00	.471238879537 1	1,000000989
1,01	.472239175266 1	
1,99	.784397830621 1	
2,00	.785398126399 1	2,000001743
2,01	.786398422111 1	
2,99	.109855707734 2	
3,00	.109955737313 2	3,000002913
3,01	.110055766882 2	

Задача (1), (2) может быть обобщена на случай систем n линейных о. д. у. первого порядка и для нее по аналогии может быть развита рассматриваемая здесь методика, для чего можно воспользоваться результатами работы [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Kalaba R. E., Spingarn K. and Zagustin E.— Comput. and Math., 1975, v. 1, № 3, 4, p. 277.
2. Golberg M. A.— SIAM I. Numer. Anal 1977, v. 14, № 1, p. 152.
3. Schwarz B.— Notices Amer. Math., Soc., 1975, v. 22, p. 302.
4. Монастырный П. И.— Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1967, т. 7, № 2, с. 284.
5. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. Вычислительные методы высшей математики.— Минск, 1975, т. 2.

Поступила в редакцию
25.11.82.

Кафедра численных методов
и программирования

УДК 517.925

В. А. ПРОКАШЕВА

ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА БЕЗ ПОДВИЖНЫХ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК (п. к. т.) (случай $A_0=0$)

В работе [1] изучался вопрос отсутствия п. к. т. в решениях системы

$$\begin{cases} a_0u'^2 + a_1u'v' + a_2v'^2 + a_3u^2 + a_4uv + a_5v^2 = 0, \\ b_0u'^2 + b_1u'v' + b_2v'^2 + b_3u^2 + b_4uv + b_5v^2 = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $a_k=a_k(z)$, $b_k=b_k(z)$, $k=0, 1, 2, 3, 4, 5$.

С помощью преобразования $u=v\cdot w$ данная система приведена к уравнению

$$A_0(z, w)w'^6 + A_1(z, w)w'^4 + A_2(z, w)w'^2 + A_3(z, w) = 0. \tag{2}$$

Для уравнения (2) получены [1] необходимые и достаточные условия отсутствия п. к. т. для случая $A_0\neq0$.

В данной работе изучается случай $A_0=0$, т. е. случай, когда (2) примет следующий вид:

$$A_1(z, w)w'^4 + A_2(z, w)w'^2 + A_3(z, w) = 0, \tag{3}$$

Поскольку [1], $A_0 = a_0\left(\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right)\equiv0,$