

где $d_j^{(k)}(\lambda) = (-1)^{k-1} a_j^{(1)}(\lambda) C_{j-1}^{k-1}$, $k = 2, 3, \dots$.

Заметим, что существует несколько методов уменьшения величины смещения для параметрических оценок (см., например, [5, 6]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бенткус Р.— Литовский матем. сб., 1977, т. 14, № 4, с. 37.
2. Журбенко И. Г.— Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1978, № 4, с. 36.
3. Журбенко И. Г., Труш Н. Н.— Литовский матем. сб., 1979, т. 19, № 1, с. 65.
4. Бриллинджер Д. Временные ряды. Обработка данных и теория.— М., 1980.
5. Терпугов А. Ф. Математическая статистика.— Томск, 1974.
6. Кокс Д., Хинкли Д. Теоретическая статистика.— М., 1978.

Поступила в редакцию
18.02.83.

Кафедра теории вероятностей и математической
статистики

УДК 519.62

В. Н. ШАЛИМА

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Учет специфики решаемых задач позволяет указать методы их численного решения, более эффективные в сравнении с методами, предназначенными для решения задач более общего вида (см., например, [1, 2]). Рассмотрим один из способов построения таких методов для задач с начальными условиями в случае систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Пусть на отрезке $[t_0, T]$ необходимо численно решить следующую задачу Коши:

$\dot{u}_k = a_k(t, \bar{u}) u_k + f_k(t, \bar{u})$, $u_k(t_0) = u_{k0}$, $k = 1, 2, \dots, s$, $\bar{u} = [u_1, \dots, u_s]$, (1)
где $a_k(t, \bar{u})$, $f_k(t, \bar{u})$, $k = 1, \dots, s$ предполагаются достаточно гладкими в некоторой области изменения аргументов.

Непосредственно проверяется, что задача (1) эквивалентна следующей системе интегральных уравнений:

$$u_k(t) = u_k(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t a_k(\eta, \bar{u}(\eta)) d\eta \right) + \\ + \int_{t_0}^t \exp \left(\int_{\eta}^t a_k(\xi, \bar{u}(\xi)) d\xi \right) f_k(\eta, \bar{u}(\eta)) d\eta. \quad (2)$$

Заменим отрезок интегрирования $[t_0, T]$ сеткой $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = t_0 + j\tau, j = 0, 1, \dots, N, N\tau = T - t_0\}$ и предположим, что вычисления доведены до точки t_j , $0 \leq j < N$. Тогда на основании равенств (2) можно записать

$$u_k(t_{j+1}) = u_k(t_j) \exp \left(\tau \int_0^1 a_k(t_j + \alpha\tau, \bar{u}(t_j + \alpha\tau)) d\alpha \right) + \\ + \tau \int_0^1 \exp \left((1-\beta) \tau \int_0^1 a_k(\tilde{\gamma}, \bar{u}(\tilde{\gamma})) d\gamma \right) f_k(t_j + \beta\tau, \bar{u}(t_j + \beta\tau)) d\beta, \quad (3)$$

где $\tilde{\gamma} = t_j + \beta\tau + (1-\beta)\tau\gamma$.

Воспользовавшись результатами работы [3], заменим интегралы в равенствах (3) квадратурными суммами; тогда получим

$$u_k(t_{j+1}) \approx u_k(t_j) \exp \left(\tau \sum_{i=1}^{q_0} A_i a_k(t_j + \alpha_i\tau, \bar{u}(t_j + \alpha_i\tau)) \right) \left(+ \right.$$

$$+ \tau \sum_{m=1}^{q_1} B_m \exp \left((1 - \beta_m) \tau \sum_{n=1}^{q_2} C_n a_k (\tilde{\gamma}_{n,m}, \bar{u}(\tilde{\gamma}_{n,m})) \right) f_k(\beta_m), \quad (4)$$

где $\tilde{\gamma}_{n,m} = t_j + \beta_m \tau + (1 - \beta_m) \tau \gamma_n$, $f_k(\beta_m) = f_k(t_j + \beta_m \tau, \bar{u}(t_j + \beta_m \tau))$. Подчинив выбор параметров A_i , α_i , B_m , β_m , C_n , γ_n требованию достаточно высокой алгебраической степени точности соответствующих квадратурных формул и учитывая присутствие множителя τ перед суммами в равенствах (4), мы можем построить многомодульные методы, подобные методам, приведенным в [4].

Укажем в качестве примера на следующий метод четвертого порядка точности, опустив для простоты записей индекс k :

$$\begin{aligned} y_{j+\frac{1}{6}} &= e^{\frac{\tau}{6} a_j} \left[y_j + \frac{\tau}{6} f_j^{[1]} \right], \quad y_{j+\frac{1}{3}} = y_j e^{\frac{\tau}{3} a_j + \frac{1}{6}} + \frac{\tau}{3} f_{j+\frac{1}{6}} e^{\frac{\tau}{6} a_j + \frac{1}{6}}, \\ y_{j+\frac{1}{2}} &= y_j e^{\frac{\tau}{8} [a_j + 3a_j + \frac{1}{3}]} + \frac{\tau}{8} [f_j^{[1]} e^{\frac{\tau}{2} a_j} + 3f_{j+\frac{1}{3}} e^{\frac{\tau}{6} a_j + \frac{1}{3}}], \\ y_{j+1}^{[4]} &= y_j e^{\frac{\tau}{2} [a_j - 3a_j + \frac{1}{3} + 4a_j + \frac{1}{2}]} + \frac{\tau}{2} [f_j^{[1]} e^{\tau a_j} - 3f_{j+\frac{1}{3}} e^{\frac{2}{3} \tau a_j + \frac{1}{3}} + \\ &\quad + 4f_{j+\frac{1}{2}} e^{\frac{\tau}{2} a_j + \frac{1}{2}}], \\ y_{j+1}^{[5]} &= y_j e^{\frac{\tau}{6} [a_j + 4a_j + \frac{1}{2} + a_{j+1}^{[4]}]} + \frac{\tau}{6} [f_j^{[1]} e^{\frac{\tau}{2} a_j + \frac{1}{2}} + \\ &\quad + 4f_{j+\frac{1}{2}} e^{\frac{\tau}{4} [a_j + \frac{1}{2} + a_{j+1}^{[4]}]} + f_{j+1}^{[4]}]. \end{aligned}$$

Здесь i может принимать значения 4 или 5. Заметим, что при $a_k(t, \bar{u}) = a_k = \text{const}$ и $f_k(t, \bar{u}) \equiv 0$, предлагаемые методы являются точными и, следовательно, в случае $a_k < 0$, $k = 1, 2, \dots, s$ A -устойчивыми.

В тех случаях, когда поведение подынтегральной функции во втором интеграле равенств (3) определяется поведением экспоненциального множителя, можно попытаться учесть это влияние на пути построения методов, используя квадратурные формулы с экспоненциальным весом. Так, если $a_k = \text{const}$, $k = 1, 2, \dots, s$ потребуем, чтобы квадратурная формула

$$\int_0^1 \exp((1 - \beta) \alpha \tau) f(t_j + \beta \tau, u(t_j + \beta \tau)) d\beta \approx \sum_{m=1}^q B_m f(t_j + \beta_m \tau, u(t_j + \beta_m \tau))$$

была точной для всевозможных алгебраических многочленов до степени $p-1$ ($1 \leq p \leq 2q$) включительно. Это требование приводит к следующей системе уравнений:

$$\sum_{m=1}^q B_m \beta_m^\mu = E_\mu, \quad (5)$$

$$\text{где } E_\mu = \int_0^1 \exp((1 - \beta) \alpha \tau) \beta^\mu d\beta, \quad \mu = 0, 1, \dots, p-1.$$

Выбрав B_m и β_m удовлетворяющими системе (5), можно записать

$$y_{j+1} = y_j e^{a\tau} + \tau \sum_{m=1}^q B_m f_{j+\beta_m}. \quad (6)$$

Дальнейший процесс построения методов аналогичен [4].

В качестве примера приведем следующий метод первого порядка точности

$$y_{j+1} = y_j e^{a\tau} + \frac{1}{a} (e^{a\tau} - 1) f_j.$$

В заключение отметим, что методы, построенные на основании равенств (5), (6), являются точными на решении уравнения $\dot{y} = ay + b$, где $b = \text{const}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н. С.— В кн.: Численные методы. М., 1973, т. 1, с. 632.
2. Калиткин Н. Н.— В кн.: Численные методы. М., 1978, с. 512.
3. Бобков В. В.— Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1967, № 4, с. 27.
4. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. И. Начала теории вычислительных методов. Дифференциальные уравнения.— Минск, 1982.

Поступила в редакцию
05.04.83

Кафедра вычислительной математики