

УДК 517.925

В. Х. КОВАЧЕВ

О ПРИВЕДЕНИИ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЦИОНАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ К «ТРЕУГОЛЬНОМУ» ВИДУ ПРИ ПОМОЩИ БИЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В работе [1] рассмотрено невырожденное билинейное преобразование
 $axu + bxv + cyu + dyv = h$, $Axu + Bxv + Cyu + Dyv = H$, (1)
или $x = (\gamma u + \delta v) : R(u, v)$, $y = (\alpha u + \beta v) : R(u, v)$, где $R(u, v) = \xi u^2 + \eta uv + \zeta v^2$, $\xi = [a, c]$, $\eta = [a, d] + [b, c]$, $\zeta = [b, d]$, $\alpha = [a, h]$, $\beta = [b, h]$, $\gamma = [h, c]$, $\delta = [h, d]$, а символом вида $[a, c]$ обозначен определитель

$$\begin{vmatrix} a & c \\ A & C \end{vmatrix}.$$

Заметим, что должно выполняться $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \neq 0$, $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Ищем такие уравнения

$$\frac{dv}{du} = \frac{\tilde{P}(u, v)}{\tilde{Q}(u, v)}, \quad (2)$$

которые при помощи преобразования (1) можно привести к «треугольному» виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x)}. \quad (3)$$

Здесь $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$, P , Q являются многочленами. Кроме того, считаем, что выполнено одно из следующих двух условий:

а) $Q(x) = B_0 + B_1x$, $P(x, y) = \sum_{i=0}^n A_{i0}x^i + A_{i1}y$, где n — натуральное число, а $A_{n0} \neq 0$;

$$\text{б) } Q(x) = \sum_{i=0}^2 B_i x^i, \quad P(x, y) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^i A_{i-j, i} x^{i-j} y^j.$$

Отметим, что уравнение (3) в случае а) интегрируется в элементарных функциях.

Выясним, какие уравнения вида (2) можно получить из уравнения вида (3), удовлетворяющего одному из условий а) и б), при помощи преобразования (1). Тогда при помощи обратного преобразования эти уравнения можно привести к виду (3).

Преобразованное уравнение (2) имеет вид

$$\frac{dv}{du} = \frac{\tilde{P}(u, v)}{\tilde{Q}(u, v)},$$

$$\text{где } \tilde{P}(u, v) = \left\{ a(u, v) Q \left(\frac{\gamma u + \delta v}{R(u, v)} \right) - A(u, v) P \left(\frac{\gamma u + \delta v}{R(u, v)}, \frac{\alpha u + \beta v}{R(u, v)} \right) \right\} R^n(u, v),$$

$$\tilde{Q}(u, v) = \left\{ B(u, v) P \left(\frac{\gamma u + \delta v}{R(u, v)}, \frac{\alpha u + \beta v}{R(u, v)} \right) - b(u, v) Q \left(\frac{\gamma u + \delta v}{R(u, v)} \right) \right\} R^n(u, v).$$

Здесь и в дальнейшем n — это точная степень многочлена p (для случая б) $n=2$), $a(u, v)$, $b(u, v)$, $A(u, v)$, $B(u, v)$ — однородные многочлены второй степени, чьи коэффициенты зависят от ξ , η , ζ , α , β , γ , δ .

Многочлены P , Q , если не произведем сокращения, должны быть суммами однородных многочленов степени $2n+2$, $2n+1$, ..., $n+2$. Слагае-

мые высшей степени однородности в числителе и знаменателе должны иметь вид

$$(\xi u^2 + \eta uv + \zeta v^2)^n \sum_{i=0}^2 C_{2-i, i} u^{2-i} v^i$$

и

$$(\xi u^2 + \eta uv + \zeta v^2)^n \sum_{i=0}^2 D_{2-i, i} u^{2-i} v^i$$

соответственно, где $C_{20} = \xi\sigma$, $C_{11} = 2\xi\tau$, $C_{02} = -\zeta\sigma + \eta\tau$, $D_{20} = -\eta\sigma + \xi\tau$, $D_{11} = -2\zeta\sigma$, $D_{02} = -\zeta\tau$, а $\sigma = B_0\alpha - A_{00}\gamma$, $\tau = B_0\beta - A_{00}\delta$.

Пусть слагаемые высшей степени однородности имеют указанный вид. Отсюда определяем сначала ξ , η , ζ , а потом и σ и τ , если выполнены необходимые условия. Если например $\xi \neq 0$, эти условия имеют вид $2C_{02}\xi + 2C_{20}\zeta = C_{11}\eta$, $2D_{20}\xi + 2C_{20}\eta = C_{11}\xi$, $D_{11}\xi + 2C_{20}\zeta = 0$, $2D_{02}\xi + C_{11}\zeta = 0$. Далее, слагаемые $2n+1$ -й степени однородности являются произведениями $(\xi u^2 + \eta uv + \zeta v^2)^{n-1}$ и однородных многочленов третьей степени, чьи коэффициенты зависят от уже известных ξ , η , ζ , как и от γ , δ и от $\varphi = (B_1 - A_{01})\alpha - A_{10}\gamma$, $\psi = (B_1 - A_{01})\beta - A_{10}\delta$, $z = A_{01}\Delta$.

Отсюда можем определить φ , ψ и z , только если выполняются определенные условия, связывающие упомянутые выше коэффициенты и ξ , η , ζ , а отношение $\delta:\gamma$ удовлетворяет уравнению, вообще говоря, второй степени. Таким образом, получаем 0, 1, 2 или бесконечное число допустимых значений для отношения $\frac{\delta}{\gamma} \in R \cup \{\infty\}$.

Если в случае а) $n=1$, определяем γ и δ так, чтобы их отношение было среди найденных выше допустимых значений. Теперь уже знаем φ , ψ и z . Определяем α и β так, что $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Таким образом находим A_{01} . Зная σ , τ , φ , ψ и α , β , γ , δ , можем найти остальные коэффициенты B_0 , B_1 , A_{00} , A_{10} .

Если в случае а) $n \geq 2$, слагаемые степени однородности $2n+2-i$, $2 \leq i \leq n$, должны иметь вид $A_{10}(\xi u^2 + \eta uv + \zeta v^2)^{n-i}[(\eta\gamma - \xi\delta)u^2 + 2\xi\gamma uv + \zeta\delta v^2](\gamma u + \delta v)^i$. Отсюда находим в лучшем случае одно значение отношения $\frac{\delta}{\gamma} \in R \cup \{\infty\}$. Если оно находится среди найденных выше, определяем, как и раньше, коэффициенты уравнения (3).

Рассмотрим теперь случай б). Коэффициенты слагаемых четвертой степени в числителе и знаменателе выражаются через ξ , η , ζ , α , β , γ , δ и A_{20} , A_{11} , A_{02} , B_2 . Если эти коэффициенты и ξ , η , ζ удовлетворяют определенным условиям, а $\delta:\gamma$ является общим корнем двух уравнений, вообще говоря, второй степени, и находится среди допустимых значений, найденных выше, для подходящего выбора α и β отсюда можно выразить коэффициенты A_{20} , A_{11} , A_{02} , B_2 . После этого, зная уже α , β , γ , δ , определяем остальные коэффициенты уравнения (3), как выше.

Таким образом, находим совокупность алгебраических условий на коэффициенты уравнения (2), при выполнении которых можем привести его к «треугольному» виду (3), удовлетворяющего одному из условий а) или б), при помощи уже вполне определенного преобразования вида (1). В общем случае надо проверить, можно ли добиться выполнения этих условий путем умножения $\bar{P}(u, v)$ и $\bar{Q}(u, v)$ на один и тот же многочлен.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковачев В. Х.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1983, № 2, с. 45.

Поступила в редакцию
10.01.83.

Кафедра высшей математики ФПМ