Представим указанные тензоры в форме (1) $t = \sum_{i,j=1}^{3} t^{ij} dx_i \otimes dx_j$, $\varepsilon = \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon^{ij} dx_i \otimes dx_j$, $u = \sum_{i=1}^{3} u^i dx_i$, $Y = \sum_{i,j=1}^{3} \delta_{ij} dx_i \otimes dx_j$, тогда соотношение (11) примет вид $t = 2\mu\varepsilon + \lambda Y \operatorname{div} u$.

Учитывая, что $\varepsilon = du$ [2], получим тензорное дифференциальное уравнение относительно перемещений u

$$2\mu du + \lambda \partial u = t. \tag{12}$$

Применим к (12) оператор $P_s^{(2)}$ $(s = 0,1)$, тогда $2\mu P_s^{(2)}(du) + \lambda P_s^{(2)}(\partial u) = t_s$, $t_s \equiv P_s^{(2)}(t)$.

Воспользуемся формулой (9) при $m=1$, $n=3$, $k=0$, откуда

$$P_s^{(2)}(du) = \frac{t_s}{2\mu + \lambda\lambda_{0,1}^s}.$$

Суммируя по s, получим в силу второго равенства (5) тензорное уравнение $du = b$, где $b = \frac{t_0}{2\mu} + \frac{t_1}{2\mu + 3\lambda}$, эквивалентное (12). Условие $\delta b = 0$ [1] является необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (12).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ерофеенко В. Т.— Рукопись деп. в ВИНИТИ от 19.01.79, № 257—79.
2. Ерофеенко В. Т., Родов А. М.— Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук, 1975, № 3, с. 47.
3. Hannabuss K. C.— J. Inst. Math. and Apl., 1974, vol. 14, № 1, p. 83.
4. Plebanski J.— Report. Math. Phys., 1970, vol. 1, № 2, p. 87.
5. Лурье А. И. Теория упругости.— М., 1970.

Поступила в редакцию 22.12.82.

Кафедра уравнений математической физики

УДК 517.544

Т. Н. ЖОРОВИНА

ОБ ОДНОЙ ТРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА НА ТОРЕ

Рассмотрим прямоугольник $[0, P] \times [-iM, iM]$. Пусть контур L представляет собой отрезок $[0, P]$ вещественной прямой, на котором задано краевое условие

$$\varphi^+(x) = a\varphi^-(x) + b\overline{\varphi^-(x)}, \quad x \in L. \tag{1}$$

Требуется найти все аналитические двоякопериодические с периодами P, $2iM$ функции $\varphi(z)$, H-непрерывно продолжимые на L, где должно выполняться краевое условие (1) $(a, b \in C)$.

Введем вспомогательную вектор-функцию $F(z) = \begin{bmatrix} F_1(z) \\ F_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(z) \\ \overline{\varphi(\bar z)} \end{bmatrix}$.

Записывая условие (1) и сопряженное к нему через функцию $F(z)$ и разрешая полученную систему относительно $F_1^+(x)$ и $F_2^+(x)$, придем к краевой задаче Римана

$$F^+(x) = AF^-(x), \quad x \in L \tag{2}$$

с постоянной матрицей $A = \frac{1}{\bar a} \begin{bmatrix} |a|^2 - |b|^2 & b \\ -\bar b & 1 \end{bmatrix}$ $\left(\text{функция } F(z) \text{ должна удовлетворять условию симметрии } \overline{F(\bar z)} = IF(z), \text{ где } I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$.

Задача (2) решается приведением матрицы A к жордановой нормальной форме. Для этого введем новую неизвестную функцию $\Phi(z)$ по правиду $F(z)=S\Phi(z)$, где S — некоторая невырожденная матрица. Подставляя $F(z)=S\Phi(z)$ в (2), получаем:

$$\Phi^+(x)=[S^{-1}AS]\cdot\Phi^-(x),\quad x\in L. \tag{3}$$

Матрицу S выбираем таким образом, чтобы матрица задачи (3) $S^{-1}AS$ была жордановой, т. е. чтобы выполнялось условие

$$S^{-1}AS=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ c & \lambda_2\end{bmatrix}, \tag{4}$$

где λ_1, λ_2 — собственные значения матрицы A,

$$\lambda_{1,2}=\frac{1+|a|^2-|b|^2\pm\sqrt{(1+|a|^2-|b|^2)^2-4|a|^2}}{2\bar a},$$

а число c равно нулю, если $\lambda_1\neq\lambda_2$, и равно единице при $\lambda_1=\lambda_2$. Элементы матрицы S находятся из (4).

В случае $\lambda_1\neq\lambda_2$ задача (3) равносильна паре скалярных задач Римана

$$\Phi_1^+(x)=\lambda_1\Phi_1^-(x),\ x\in L,\quad (5),\qquad \Phi_2^+(x)=\lambda_2\Phi_2^-(x),\ x\in L. \quad (6)$$

Из теоремы 1 [1] следует, что число $l_1(l_2)$ решений задачи (5) (или (6)) для функций совпадает с числом l_1' (l_2') решений союзной однородной краевой задачи для дифференциалов. В нашей задаче реализуется особый случай, и для числа $l_1(l_2)$ известна точная оценка: $0\leqslant l_1(l_2)\leqslant 1$.

Используя результаты работ [1, 2], получаем, что при выполнении условий $\lambda_j>0$, $\frac{P\cdot\ln\lambda_j}{4M\pi}\in Z$ задача (5) или (6) (соответственно) имеет нетривиальное решение вида

$$\Phi_{0j}^+(z)=k_j\exp\left\{zi\frac{\ln\lambda_j}{2M}\right\},\quad \Phi_{0j}^-(z)=\frac{k_j}{\lambda_j}\exp\left\{zi\frac{\ln\lambda_j}{2M}\right\}$$

(k_j — произвольная постоянная). В остальных случаях задача (5) или (6) (соответственно) имеет только тривиальное решение. Случай $\lambda_1=\lambda_2$ исследуется аналогично.

Возвращаясь к задаче (1) и учитывая условие симметрии, будем иметь следующий результат.

Теорема 1. Если $1+|a|^2-|b|^2=2\operatorname{Re}a$, то общее решение задачи (1) есть константа. Если $a\in R$, $1+a^2-|b|^2\neq 2a$,

$$\lambda=\frac{1+a^2-|b|^2+\sqrt{(1+a^2-|b|^2)^2-4a^2}}{2a}$$

и такое, что выполняются условия $\lambda>0$, $\frac{P\cdot\ln\lambda}{4M\pi}\in Z$, то задача (1) имеет 2 линейно независимых решения.

В остальных случаях задача (1) имеет только тривиальное решение.

Общее решение задачи (1) в случае, когда $a\in R$, $1+a^2-|b|^2\neq 2a$, $\lambda>0$, $\frac{P\cdot\ln\lambda}{4M\pi}\in Z$, записывается в виде:$\in Z$,

$$\varphi^+(z)=\alpha\left[(a\lambda-1)\exp\left\{iz\frac{\ln\lambda}{2M}\right\}-\frac{b}{\lambda}\exp\left\{-iz\frac{\ln\lambda}{2M}\right\}\right]+$$
$$+i\beta\left[(a\lambda-1)\exp\left\{iz\frac{\ln\lambda}{2M}\right\}+\frac{b}{\lambda}\exp\left\{-iz\frac{\ln\lambda}{2M}\right\}\right];$$
$$\varphi^-(z)=\alpha\left[\left(a-\frac{1}{\lambda}\right)\exp\left\{iz\frac{\ln\lambda}{2M}\right\}-b\exp\left\{-iz\frac{\ln\lambda}{2M}\right\}\right]+$$
$$+i\beta\left[\left(a-\frac{1}{\lambda}\right)\exp\left\{iz\frac{\ln\lambda}{2M}\right\}+b\exp\left\{-iz\frac{\ln\lambda}{2M}\right\}\right],$$

где α и β — произвольные вещественные постоянные.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зверович Э. И.— УМН, 1971, т. 26, вып. 1, с. 113.

2. Аксентьева Е. П.— Труды семинара по краевым задачам. Казань, 1982, вып. 18, с. 12.

Поступила в редакцию 07.01.83.

Кафедра теории функций

УДК 517.925

В. Х. КОВАЧЕВ

О ПРИВЕДЕНИИ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЦИОНАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ К «ТРЕУГОЛЬНОМУ» ВИДУ ПРИ ПОМОЩИ БИЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В работе [1] рассмотрено невырожденное билинейное преобразование

$$axu+bxv+cyu+dyv=h,\ Axu+Bxv+Cyu+Dyv=H, \qquad (1)$$

или $x=(\gamma u+\delta v):R(u, v)$, $y=(\alpha u+\beta v):R(u, v)$, где $R(u, v)=\xi u^2+\eta uv+\zeta v^2$, $\xi=[a, c]$, $\eta=[a, d]+[b, c]$, $\zeta=[b, d]$, $\alpha=[a, h]$, $\beta=[b, h]$, $\gamma=[h, c]$, $\delta=[h, d]$, а символом вида $[a, c]$ обозначен определитель

$$\begin{vmatrix} a & c \\ A & C \end{vmatrix}.$$

Заметим, что должно выполняться $\xi^2+\eta^2+\zeta^2\neq 0$, $\Delta=\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$. Ищем такие уравнения

$$\frac{dv}{du}=\frac{\tilde{P}(u, v)}{\tilde{Q}(u, v)}, \qquad (2)$$

которые при помощи преобразования (1) можно привести к «треугольному» виду

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P(x, y)}{Q(x)}. \qquad (3)$$

Здесь $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$, P, Q являются многочленами. Кроме того, считаем, что выполнено одно из следующих двух условий:

а) $Q(x)=B_0+B_1x$, $P(x, y)=\sum\limits_{i=0}^{n}A_{i0}x^i+A_{01}y$, где n — натуральное число, а $A_{n0}\neq 0$;

б) $Q(x)=\sum\limits_{i=0}^{2}B_ix^i$, $P(x, y)=\sum\limits_{i=0}^{2}\sum\limits_{j=0}^{i}A_{i-j,\,j}x^{i-j}y^j$.

Отметим, что уравнение (3) в случае а) интегрируется в элементарных функциях.

Выясним, какие уравнения вида (2) можно получить из уравнения вида (3), удовлетворяющего одному из условий а) и б), при помощи преобразования (1). Тогда при помощи обратного преобразования эти уравнения можно привести к виду (3).

Преобразованное уравнение (2) имеет вид

$$\frac{dv}{du}=\frac{\tilde{P}(u, v)}{\tilde{Q}(u, v)},$$

где $\tilde{P}(u, v)=\left\{a(u, v)Q\left(\frac{\gamma u+\delta v}{R(u, v)}\right)-A(u, v)P\left(\frac{\gamma u+\delta v}{R(u, v)}, \frac{\alpha u+\beta v}{R(u, v)}\right)\right\}R^n(u, v)$,

$\tilde{Q}(u, v)=\left\{B(u, v)P\left(\frac{\gamma u+\delta v}{R(u, v)}, \frac{\alpha u+\beta v}{R(u, v)}\right)-b(u, v)Q\left(\frac{\gamma u+\delta v}{R(u, v)}\right)\right\}R^n(u, v)$.

Здесь и в дальнейшем n — это точная степень многочлена p (для случая б) $n=2$), $a(u, v)$, $b(u, v)$, $A(u, v)$, $B(u, v)$ — однородные многочлены второй степени, чьи коэффициенты зависят от ξ, η, ζ, α, β, γ, δ.

Многочлены P, Q, если не произведем сокращения, должны быть суммами однородных многочленов степени $2n+2$, $2n+1$, ..., $n+2$. Слагае-