ЛИТЕРАТУРА

1. Аль-Хайдер К. М.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1983, № 2, с. 63.
2. Амелькин В. В.— Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 6, с. 979.
3. Анри Пуанкаре. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями.— М., 1947, с. 47.
4. Красносельский М. А., Перов А. И., Повалоцкий А. И., Забрейко П. П. Векторные поля на плоскости.— М., 1963.

Поступила в редакцию 22.12.82.

Кафедра дифференциальных уравнений

УДК 517.98

В. Т. ЕРОФЕЕНКО

СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ СИММЕТРИЧНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ДИВЕРГЕНЦИИ

Рассмотрим класс S_n^m симметричных тензоров $u(x)$ валентности m над евклидовым пространством E_n с достаточно гладкими коэффициентами

$$u(x)=a^{i_1\ldots i_m}(x)\,dx_{i_1}\otimes dx_{i_2}\otimes\ldots\otimes dx_{i_m}, \tag{1}$$

где $a^{i_1\ldots i_m}$ — инварианты относительно перестановок индексов $i_1, i_2, \ldots, i_m$, $x=(x_1\ldots x_n)$, повторяющиеся индексы означают суммирование от 1 до n.

Определим оператор симметричного дифференцирования d,

$$du=\frac{\partial a^{i_1\ldots i_m}(x)}{\partial x_{i_{m+1}}}S_{m+1}(dx_{i_1}\otimes\ldots\otimes dx_{i_m}\otimes dx_{i_{m+1}}), \tag{2}$$

преобразующий S_n^m в S_n^{m+1} [1, 2] (S_k — оператор симметризации [2]) и оператор дивергенции

$$\operatorname{div}u=\frac{\partial a^{i_1\ldots i_m}(x)}{\partial x_{i_m}}dx_{i_1}\otimes\ldots\otimes dx_{i_{m-1}}, \tag{3}$$

преобразующий S_n^m в S_n^{m-1}.

Установим взаимно однозначное соответствие между симметричными тензорами (1) и однородными полиномами по переменным $y_1,\ldots y_n$ [3]

$$u\leftrightarrow\hat u=a^{i_1\ldots i_m}(x)\,y_{i_1}\ldots y_{i_m},\quad du\leftrightarrow\widehat{du}=\frac{\partial a^{i_1\ldots i_m}(x)}{\partial x_{i_{m+1}}}y_{i_1}\ldots y_{i_m}y_{i_{m+1}}. \tag{4}$$

$$\operatorname{div}u\leftrightarrow\widehat{\operatorname{div}u}=\frac{\partial a^{i_1\ldots i_m}(x)}{\partial x_{i_m}}y_{i_1}\ldots y_{i_{m-1}}.$$

Введем оператор ∂, преобразующий S_n^m в S_n^{m+1} $\partial u=S_{m+1}(Y\otimes\operatorname{div}u)$, $\partial u\leftrightarrow\widehat{\partial u}=\hat Y\,\widehat{\operatorname{div}u}$, где $Y=\sum\limits_{i=1}^{n}dx_i\otimes dx_i$, $Y\leftrightarrow\hat Y=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2$.

Разложим пространство S_n^m на подпространства $H_i^m=P_i^{(m)}(S_n^m)$, инвариантные относительно группы $SO(n, R)$ [4], $i=0, 1, \ldots N_m$, $N_m=\left[\frac{m}{2}\right]$,

$$P_i^{(m)}P_j^{(m)}=\delta_{ij}P_i^{(m)},\quad\sum_{i=0}^{N_m}P_i^{(m)}=E. \tag{5}$$

Для операторов проектирования $P_i^{(m)}$ имеем [4]

$$P_k^{(m)}(\hat u)=\sum_{p=k}^{N_m}a_{km}^pB_p(\hat u),\ B_p(\hat u)=\sum_{k=p}^{N_m}b_{pm}^kP_k^{(m)}(\hat u), \tag{6}$$

где $a_{km}^{p} = \dfrac{(-1)^{p-k}(\nu-2k-1)\,\Gamma(\nu-k-p-1)}{4^p k!\,(p-k)!\,\Gamma(\nu-k)}$, $b_{pm}^{k} = \dfrac{4^p k!\,\Gamma(\nu-k)}{(k-p)!\,\Gamma(\nu-k-p)}$, $B_p = \widehat{Y}^p\Delta^p$, $\nu = \dfrac{n}{2}+m$.

Оператору $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial y_i^2}$ соответствует оператор следа tr [3]: $\Delta\widehat{u} \leftrightarrow \leftrightarrow m(m-1)\,\mathrm{tr}\,u$.

Лемма. Имеет место коммутационное соотношение для операторов d и B_k $(k=0, 1, \ldots)$

$$d(B_k u) = B_k(du) - 2kmY \circ B_{k-1}\,\mathrm{div}\,u. \tag{7}$$

Доказательство. Докажем формулу

$$d(\Delta^k\widehat{u}) = \Delta^k(\widehat{du}) - 2km\Delta^{k-1}\,\mathrm{div}\,\widehat{u}. \tag{8}$$

Учитывая (4),

$$\Delta^k(\widehat{du}) = \Delta^{k-1}\left[\frac{\partial a^{i_1\ldots i_m}(x)}{\partial x_{i_{m+1}}}\Delta(y_{i_1}\ldots y_{i_m}y_{i_{m+1}})\right] =$$

$$= \Delta^{k-1}\left\{\frac{\partial a^{i_1\ldots i_m}(x)}{\partial x_{i_{m+1}}}\left[y_{i_{m+1}}\Delta(y_{i_1}\ldots y_{i_m}) + 2\frac{\partial}{\partial y_{i_{m+1}}}(y_{i_1}\ldots y_{i_m})\right]\right\} =$$

$$= \Delta^{k-1}\left\{\frac{\partial a^{i_1\ldots i_m}(x)}{\partial x_{i_{m+1}}}\, y_{i_{m+1}}\Delta(y_{i_1}\ldots y_{i_m}) + 2\frac{\partial}{\partial x_{i_{m+1}}}\left[a^{i_{m+1}i_2\ldots i_m}(x)y_{i_2}\ldots\right.\right.$$

$$\left.\left. y_{i_m} + a^{i_1 i_{m+1} i_3\ldots i_m}(x)\,y_{i_1}y_{i_3}\ldots y_{i_m} + \ldots + a^{i_1\ldots i_{m+1}}(x)\,y_{i_1}\ldots y_{i_{m-1}}\right)\right\} =$$

$$= \Delta^{k-1}\left[\frac{\partial a^{i_1\ldots i_m}(x)}{\partial x_{i_{m+1}}}\, y_{i_{m+1}}\,\Delta\,(y_{i_1}\ldots y_{i_m})\right] + 2m\,\Delta^{k-1}\,\mathrm{div}\,\widehat{u} = \ldots$$

$$= \Delta^{k-2}\left[\frac{\partial a^{i_1\ldots i_m}(x)}{\partial x_{i_{m+1}}}\, y_{i_{m+1}}\Delta^2(y_{i_1}\ldots y_{i_m})\right] + 4m\,\Delta^{k-1}\,\mathrm{div}\,\widehat{u} = \ldots$$

$$= \frac{\partial a^{i_1\ldots i_m}(x)}{\partial x_{i_{m+1}}}\Delta^k(y_{i_1}\ldots y_{i_m})\,y_{i_{m+1}} + 2mk\,\Delta^{k-1}\,\mathrm{div}\,\widehat{u} =$$

$$= d(\Delta^k\widehat{u}) + 2mk\,\Delta^{k-1}\,\mathrm{div}\,\widehat{u}.$$

Получена формула (8). Умножая (8) на $\widehat{Y}^k$ и переходя от полиномов к симметричным тензорам, получим соотношение (7).

Теорема. Имеет место спектральное разложение оператора ∂ относительно оператора симметричного дифференцирования d

$$P_s^{(m+1)}\partial P_k^{(m)}(w) = \lambda_{km}^{s}P_s^{(m+1)}dP_k^{(m)}(w),\; w \in S_n^m, \tag{9}$$

где $\lambda_{km}^{s} = \dfrac{1}{m}[s(n+2m-2s) - k(n+2m-2k-2)]$, $s=0, 1, \ldots N_{m+1}$, $k=0, \ldots N_m$.

Доказательство. Из (7) при $k=1$

$$d(B_1 u) = B_1(du) - 2m\partial u. \tag{10}$$

Применим к (10) оператор $P_s^{(m+1)}$ и положим $u = P_k^{(m)}w$, тогда, учитывая второе соотношение (6) и ортогональность (5), получим (9).

Приложение. Пусть $\{t^{ij}\}$, $\{\varepsilon^{ij}\}$ — компоненты тензоров напряжений и деформаций, $\{u^i\}$ — компоненты вектора перемещений. Обобщенный закон Гука для изотропного тела описывается соотношением [5]

$$t^{ij} = 2\mu\varepsilon^{ij} + \lambda\delta_{ij}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u^i}{\partial x_i},\; \lambda,\ \mu - \mathrm{const}. \tag{11}$$

Представим указанные тензоры в форме (1) $t = \sum\limits_{i,j=1}^{3} t^{ij} dx_i \otimes dx_j$, $\varepsilon = \sum\limits_{i,j=1}^{3} \varepsilon^{ij} dx_i \otimes dx_j$, $u = \sum\limits_{i=1}^{3} u^i dx_i$, $Y = \sum\limits_{i,j=1}^{3} \delta_{ij} dx_i \otimes dx_j$, тогда соотношение (11) примет вид $t = 2\mu\varepsilon + \lambda Y \operatorname{div} u$.

Учитывая, что $\varepsilon = du$ [2], получим тензорное дифференциальное уравнение относительно перемещений u

$$2\mu du + \lambda \partial u = t. \tag{12}$$

Применим к (12) оператор $P_s^{(2)}$ $(s = 0,1)$, тогда $2\mu P_s^{(2)}(du) + \lambda P_s^{(2)}(\partial u) = t_s$, $t_s \equiv P_s^{(2)}(t)$.

Воспользуемся формулой (9) при $m = 1$, $n = 3$, $k = 0$, откуда

$$P_s^{(2)}(du) = \frac{t_s}{2\mu + \lambda \lambda_{0,1}^s}.$$

Суммируя по s, получим в силу второго равенства (5) тензорное уравнение $du = b$, где $b = \frac{t_0}{2\mu} + \frac{t_1}{2\mu + 3\lambda}$, эквивалентное (12). Условие $\delta b = 0$ [1] является необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (12).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ерофеенко В. Т.— Рукопись деп. в ВИНИТИ от 19.01.79, № 257—79.
2. Ерофеенко В. Т., Родов А. М.— Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук, 1975, № 3, с. 47.
3. Hannabuss K. C.— J. Inst. Math. and Apl., 1974, vol. 14, № 1, p. 83.
4. Plebanski J.— Report. Math. Phys., 1970, vol. 1, № 2, p. 87.
5. Лурье А. И. Теория упругости.— М., 1970.

Поступила в редакцию 22.12.82.

Кафедра уравнений математической физики

УДК 517.544

Т. Н. ЖОРОВИНА

ОБ ОДНОЙ ТРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА НА ТОРЕ

Рассмотрим прямоугольник $[0, P] \times [-iM, iM]$. Пусть контур L представляет собой отрезок $[0, P]$ вещественной прямой, на котором задано краевое условие

$$\varphi^+(x) = a\varphi^-(x) + b\overline{\varphi^-(x)}, \quad x \in L. \tag{1}$$

Требуется найти все аналитические двоякопериодические с периодами P, $2iM$ функции $\varphi(z)$, H-непрерывно продолжимые на L, где должно выполняться краевое условие (1) $(a, b \in C)$.

Введем вспомогательную вектор-функцию $F(z) = \begin{bmatrix} F_1(z) \\ F_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(z) \\ \overline{\varphi(\bar{z})} \end{bmatrix}$. Записывая условие (1) и сопряженное к нему через функцию $F(z)$ и разрешая полученную систему относительно $F_1^+(x)$ и $F_2^+(x)$, придем к краевой задаче Римана

$$F^+(x) = AF^-(x), \quad x \in L \tag{2}$$

с постоянной матрицей $A = \frac{1}{\bar{a}} \begin{bmatrix} |a|^2 - |b|^2 & b \\ -\bar{b} & 1 \end{bmatrix}$ (функция $F(z)$ должна удовлетворять условию симметрии $\overline{F(\bar{z})} = IF(z)$, где $I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$).

Задача (2) решается приведением матрицы A к жордановой нормальной форме. Для этого введем новую неизвестную функцию $\Phi(z)$ по пра-