

$$y p \partial p / \partial x + y q \partial p / \partial y + y r \partial p / \partial z - x p \partial q / \partial x - x q \partial q / \partial y - x r \partial q / \partial z + \\ + y \partial p / \partial \tau - x \partial q / \partial \tau = 0, (x, y, z, \tau) \in ZT. \quad (8)$$

Приведенный критерий позволяет выделить классы систем заданного вида, обладающие законом площадей. Например, среди систем вида

$$\begin{cases} x' = a_1 x + a_2 y + f(\tau) \\ y' = b_1 x + b_2 y + g(\tau), \end{cases}$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 — постоянные; f, g — дифференцируемые функции, законом площадей обладают системы

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \mu \exp(-\alpha \tau) \\ y' = \alpha y + \nu \exp(-\alpha \tau) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x' = \alpha x + b y + f(\tau) \\ y' = c x - \alpha y + g(\tau), \end{cases}$$

где $\alpha, \mu, \nu, a, b, c$ — произвольные постоянные, а f и g являются решениями системы линейных уравнений

$$\begin{cases} f' = -\alpha f - b g \\ g' = -c f + \alpha g. \end{cases}$$

Аналогичным образом, среди систем

$$\begin{cases} x' = a_1(\tau) x + a_2(\tau) y \\ y' = b_1(\tau) x + b_2(\tau) y \end{cases}$$

законом площадей обладают системы

$$\begin{cases} x' = \psi(\tau) x + c_2 \nu(\tau) y \\ y' = c_1 \nu(\tau) x + (\varphi(\tau) + \psi(\tau)) y, \end{cases}$$

где $\psi(\tau)$ — произвольная функция, а $\varphi(\tau) = \left(c + \int_{\tau_0}^{\tau} \exp\left(-2 \int_{\tau_0}^{\tau} \psi(\xi) d\xi\right) d\tau \right)^{-1} \times$
 $\times \exp\left(-2 \int_{\tau_0}^{\tau} \psi(\tau) d\tau\right), \quad \nu(\tau) = \exp\left(-\int_{\tau_0}^{\tau} (2\psi(\tau) + \varphi(\tau)) d\tau\right).$

Отметим, что некоторые из полученных систем могут быть и вырожденными ($x'y - y'x$ — тождественная постоянная) (см. [2]). Например, система $x' = \alpha x, y' = \alpha y$ ($\mu = 0, \nu = 0$) вырождена.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богданов Ю. С. Лекции по дифференциальным уравнениям. — Минск, 1977.
2. Богданова М. Ю., Наумович Н. Ф. — Дифференц. уравнения, 1983, т. 19, № 9, с. 1613.
3. Немыцкий И. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.—Л., 1949.

Поступила в редакцию
29.06.82.

Кафедра высшей математики

УДК 517.925.12

КАСИМ МУХАМЕД АЛЬ-ХАЙДЕР

ОБ ИЗОХРОННОСТИ ГАМИЛЬТОНОВЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПОЛИНОМАМИ 4-й СТЕПЕНИ

В работе [1] проблема изохронности гамильтоновых систем с полиномами 3-й степени решена полностью. В настоящей заметке рассматривается система Гамильтона вида

$$\begin{aligned} \dot{x} = & -y - A_{20}x^2 - A_{11}xy - 3A_{02}y^2 - A_{30}x^3 - A_{21}x^2y - A_{12}xy^2 - \\ & - A_{40}x^4 - A_{31}x^3y - A_{22}x^2y^2 - A_{13}xy^3 - A_{04}y^4, \\ \dot{y} = & x + 3B_{20}x^2 + 2A_{20}xy + \frac{1}{2} A_{11}y^2 + B_{30}x^3 + 3A_{30}x^2y + A_{21}xy^2 + \frac{1}{3} A_{12}y^3 \\ & + B_{40}x^4 + 4A_{40}x^3y + \frac{3}{2} A_{31}x^2y^2 + \frac{2}{3} A_{22}xy^3 + \frac{1}{4} A_{13}y^4. \end{aligned} \quad (1)$$

Теорема. Для того чтобы система (1) была изохронной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялась одна из следующих серий условий:

$$1. A_{20} = \left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} - 2 \right) A_{02}, \quad A_{11} = 2 \left(\frac{2\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} \right) A_{02}, \quad B_{20} = -\frac{\alpha}{\beta} A_{02}, \quad A_{30} = \frac{2\alpha}{\beta^3} A_{02}^2, \quad A_{21} = \frac{6}{\beta^2} A_{02}^2, \quad A_{12} = \frac{6}{\alpha\beta} A_{02}^2, \quad A_{03} = \frac{2}{\alpha^2} A_{02}^2, \quad B_{30} = 2 \frac{\alpha^2}{\beta^4} A_{02}^2, \quad \text{где } \alpha^2 + \beta^2 = 1, \quad \alpha \cdot \beta \neq 0,$$

$$2. A_{02} = A_{11} = B_{20} = A_{30} = A_{21} = A_{12} = A_{03} = 0, \quad B_{30} = 2A_{20}^2,$$

$$3. A_{02} = A_{20} = B_{20} = A_{30} = A_{21} = A_{12} = B_{30} = 0, \quad A_{03} = \frac{1}{2} A_{11}^2, \quad \text{причем } A_{ij} = B_{40} = 0, \quad i + j = 4.$$

Доказательство. Достаточность доказана в [1]. Докажем необходимость. Пусть система (1) имеет в точке $O(0, 0)$ изохронный центр, тогда, согласно теореме 10 [2], начало координат для системы (1) должно быть единственной особой точкой в комплексной области.

Оказывается, что всегда существует такое вещественное число α_0 , что замена переменных $x_1 = \alpha_0 x + \sqrt{1 - \alpha_0^2} y$, $y_1 = -\sqrt{1 - \alpha_0^2} x + \alpha_0 y$, где $-1 \leq \alpha_0 \leq 1$, приводит систему (1) к виду

$$\dot{x}_1 = -y_1 - a_{20}x_1^2 - a_{11}x_1y_1 - 3a_{02}y_1^2 - a_{30}x_1^3 - a_{21}x_1^2y_1 - a_{12}x_1y_1^2 - a_{03}y_1^3 - a_{40}x_1^4 - a_{31}x_1^3y_1 - a_{22}x_1^2y_1^2, \quad (2)$$

$$\dot{y}_1 = x_1 + 3b_{20}x_1^2 + 2a_{20}x_1y_1 + \frac{1}{2}a_{11}y_1^2 + b_{30}x_1^3 + 3a_{30}x_1^2y_1 + a_{21}x_1y_1^2 + \frac{1}{3}a_{12}y_1^3 + b_{40}x_1^4 + 4a_{40}x_1^3y_1 + \frac{3}{2}a_{31}x_1^2y_1^2 + \frac{2}{3}a_{22}x_1y_1^3.$$

При рассмотрении поведения траекторий системы (2) на круге Пуанкаре легко видеть, что система (2) имеет, по крайней мере, одну особую точку на экваторе сферы Пуанкаре, т. е. на бесконечности.

Учитывая вышесказанное и формулу о сумме индексов из [3], приходим к тому, что сумма индексов всех особых точек на экваторе сферы Пуанкаре должна быть равна нулю.

Вычисляя методом векторных полей [4] индексы всех особых точек на бесконечности и учитывая изложенные рассуждения и первое необходимое условие изохронности системы (2)

$$2a_{20}^2 + 10(b_{20}^2 + a_{02}^2) + \frac{1}{2}a_{11}^2 + 4a_{20}a_{02} + 2a_{11}b_{20} - \frac{2}{3}a_{21} - b_{30} - a_{03} = 0, \quad (3)$$

получим следующий результат: если бы один из коэффициентов b_{40} , a_{40} , a_{31} , a_{22} был бы отличен от нуля, то система (2) была бы неизохронной. В частности, для изохронности системы (1) необходимо, чтобы $B_{40} = A_{40} = A_{31} = A_{22} = A_{13} = A_{04} = 0$.

При этом система (1) примет вид, который рассматривался в работе [1]. Последний факт завершает доказательство необходимости.

Следствие. Если в системе (1) хотя бы один из коэффициентов A_{40} , B_{40} , A_{31} , A_{13} , A_{22} , A_{04} не обращается в нуль, то система (1) является неизохронной.

З а м е ч а н и е. При доказательстве необходимости теоремы возникают системы, которые имеют единственную особую точку $O(0, 0)$, однако они неизохронны. Так, например, рассмотрим систему вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - 3axy - 3a^2x^2y - a^3x^3y, \\ \dot{y} &= x + \frac{3}{2}ay^2 + 3a^2xy^2 + \frac{3}{2}a^3x^2y^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Система (4) имеет в начале координат неизохронный центр, так как для нее условие (3) не выполняется при $a \neq 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аль-Хайдер К. М.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1983, № 2, с. 63.
2. Амелькин В. В.— Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 6, с. 979.
3. Анри Пуанкаре. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями.— М., 1947, с. 47.
4. Красносельский М. А., Перов А. И., Повалочкий А. И., Забрейко П. П. Векторные поля на плоскости.— М., 1963.

Поступила в редакцию
22.12.82.

Кафедра дифференциальных уравнений

УДК 517.98

В. Т. ЕРОФЕЕНКО

СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ СИММЕТРИЧНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ДИВЕРГЕНЦИИ

Рассмотрим класс S_n^m симметричных тензоров $u(x)$ валентности m над евклидовым пространством E_n с достаточно гладкими коэффициентами

$$u(x) = a^{i_1 \dots i_m}(x) dx_{i_1} \otimes dx_{i_2} \otimes \dots \otimes dx_{i_m}, \quad (1)$$

где $a^{i_1 \dots i_m}$ — инварианты относительно перестановок индексов $i_1, i_2, \dots, i_m$, $x = (x_1 \dots x_n)$, повторяющиеся индексы означают суммирование от 1 до n .

Определим оператор симметричного дифференцирования d ,

$$du = \frac{\partial a^{i_1 \dots i_m}(x)}{\partial x_{i_{m+1}}} S_{m+1}(dx_{i_1} \otimes \dots \otimes dx_{i_m} \otimes dx_{i_{m+1}}), \quad (2)$$

преобразующий S_n^m в S_n^{m+1} [1, 2] (S_k — оператор симметризации [2]) и оператор дивергенции

$$\operatorname{div} u = \frac{\partial a^{i_1 \dots i_m}(x)}{\partial x_{i_m}} dx_{i_1} \otimes \dots \otimes dx_{i_{m-1}}, \quad (3)$$

преобразующий S_n^m в S_n^{m-1} .

Установим взаимно однозначное соответствие между симметричными тензорами (1) и однородными полиномами по переменным $y_1, \dots, y_n$ [3]

$$u \leftrightarrow \hat{u} = a^{i_1 \dots i_m}(x) y_{i_1} \dots y_{i_m}, \quad du \leftrightarrow d\hat{u} = \frac{\partial a^{i_1 \dots i_m}(x)}{\partial x_{i_{m+1}}} y_{i_1} \dots y_{i_m} y_{i_{m+1}}. \quad (4)$$

$$\operatorname{div} u \leftrightarrow \operatorname{div} \hat{u} = \frac{\partial a^{i_1 \dots i_m}(x)}{\partial x_{i_m}} y_{i_1} \dots y_{i_{m-1}}.$$

Введем оператор ∂ , преобразующий S_n^m в S_n^{m+1} $\partial u = S_{m+1}(Y \otimes \operatorname{div} u)$, $du \leftrightarrow \partial \hat{u} = \hat{Y} \operatorname{div} \hat{u}$, где $Y = \sum_{i=1}^n dx_i \otimes dx_i$, $Y \leftrightarrow \hat{Y} = \sum_{i=1}^n y_i^2$.

Разложим пространство S_n^m на подпространства $H_i^m = P_i^{(m)}(S_n^m)$, инвариантные относительно группы $SO(n, R)$ [4], $i = 0, 1, \dots, N_m$, $N_m = \left[\frac{m}{2} \right]$,

$$P_i^{(m)} P_j^{(m)} = \delta_{ij} P_i^{(m)}, \quad \sum_{i=0}^{N_m} P_i^{(m)} = E. \quad (5)$$

Для операторов проектирования $P_i^{(m)}$ имеем [4]

$$P_k^{(m)}(\hat{u}) = \sum_{p=k}^{N_m} a_{km}^p B_p(\hat{u}), \quad B_p(\hat{u}) = \sum_{k=p}^{N_m} b_{pm}^k P_k^{(m)}(\hat{u}), \quad (6)$$