

данного шестиугольника круга $|z| \leq \rho$, $(0 < \rho < \frac{\sqrt{3}}{2})$. Обозначим $D^* = \{z = re^{i\varphi} \in D \mid 0 < \varphi < \frac{\pi}{3}\}$. Требуется построить функцию $F(z)$, реализующую конформное отображение D^* на угол $0 < \arg \xi < \frac{2\pi}{3}$, причем $F\left(\exp \frac{\pi i}{6}\right) = \infty$, $F(\rho) = 0$. Тогда функция $\sqrt{F^3(z)}$ будет отображать D^* на верхнюю полуплоскость. Продолжая функцию $F(z)$ по принципу симметрии через прямолинейные участки границы, получим «тройкопериодическую» функцию $F(z)$, имеющую простые полюсы в вершинах шестиугольника, фундаментальной областью которой является D . Кроме того, на окружности $|z| = \rho$ выполняется условие: $F(\bar{t}) = F(t)$. Отображающую функцию будем искать в виде $F(z) = \Phi(z) + W(z)$, где $\Phi(z)$ H -непрерывно продолжима на ∂D , а $W(z)$ -функция, построенная в работе [2]. Тогда имеем краевое условие задачи Карлемана для «тройкопериодических» функций: $\Phi(\bar{t}) - \Phi(t) = W(t) - W(\bar{t})$. Эта задача с помощью интегрального представления $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=\rho} \varphi(\tau) \zeta(\tau-z) d\tau + C$, $\varphi(\bar{t}) + \varphi(t) \equiv 0$, $\int_{|t|=\rho} \varphi(t) dt = 0$ (ζ — функция соответствует периодам $\omega = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\sqrt{3}$, $\omega' = \bar{\omega}$) сводится к интегральному уравнению:

$$\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=\rho} \varphi(\tau) \left[\zeta(\bar{\tau} - \bar{t}) \cdot \left(-\frac{\rho^2}{\tau^2} \right) - \zeta(\tau - t) \right] d\tau = W(t) - W(\bar{t}). \quad (12)$$

Применяя к его решению тот же метод, что и в пункте 1, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\varphi_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} C_{2k-1}^{2m} \frac{a_k}{2k-1} \rho^{2k} \varphi_{k-m} + d_{2m} \rho^{2m}, \quad (13)$$

где d_{2m} — коэффициенты разложения функции $W(z)$ в окрестности нуля. Полная регулярность системы (13) доказывается абсолютно аналогично, как и в пункте 1. Отображающая функция через решение системы (φ_j) записывается:

$$F(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j \frac{\rho^{2j}}{(2j-1)!} \zeta^{(2j-1)}(z) + W(z) - \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j \frac{\rho^{2j}}{(2j-1)!} \zeta^{(2j-1)}(\rho) - W(\rho).$$

Предложенный метод построения отображающих функций применим для весьма специальных видов круговых многоугольников, однако он имеет то преимущество, что нет необходимости в вычислении акцессорных параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. — М., 1948.
2. Жукова Н. И., Зверович Э. И. — Сиб. мат. ж., 1976, т. 17, № 5.
3. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. — М., 1962.

Поступила в редакцию
10.12.82.

Кафедра теории функций

УДК 519.10

М. К. КРАВЦОВ

К ОЦЕНКЕ СВЕРХУ РАДИУСА ТРАНСПОРТНОГО МНОГОГРАННИКА

Под радиусом $r(M)$ многогранника M , как обычно, понимаем радиус графа $G(M)$ многогранника M , т. е. наименьший из эксцентриситетов

вершин в графе $G(M)$ [1]: $r(M) = \min_x \max_y r(x, y)$, где $r(x, y)$ — кратчайшее расстояние по числу ребер между вершинами x и y графа $G(M)$.

В настоящей работе получена достижимая верхняя оценка радиуса невырожденного транспортного многогранника с любым заданным числом граней (максимальной размерности). Построен также невырожденный транспортный многогранник порядка 3×4 радиуса 4 и указана линейная функция. Для этого многогранника найдена такая начальная (стартовая) вершина, из которой нельзя перейти к оптимальной вершине с помощью метода потенциалов за число итераций, не превосходящее 4, в том случае, если выбор переменной, которая вводится в базисное множество, на каждой итерации осуществляется согласно следующему правилу Φ : переменной, подлежащей включению в базис, соответствует наибольшая по абсолютной величине отрицательная характеристика.

1. Максимальный радиус. Справедлива следующая

Теорема. Пусть $2 \leq m \leq n$, $n \geq 3$, $0 \leq k \leq n-1$. Максимальный радиус в классе невырожденных транспортных многогранников порядка $m \times n$ с $(m-1)n+k$ гранями равен числу $m+k-1$, если $0 \leq k \leq n-2$, и не превосходит числа $m+n-2$, если $k=n-1$.

Доказательство. Согласно теореме [2], невырожденный транспортный многогранник $M(a, b) = \{x = \|x_{ij}\|_{m \times n} \mid \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = \overline{1, n}, \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = \overline{1, m}, x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}\}$ порядка $m \times n$, $2 \leq m \leq n$, $n \geq 3$, определенный векторами $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ и $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ с действительными положительными компонентами $(\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j)$, имеет $(m-1)n+k$ граней ($0 \leq k \leq n$) тогда и только тогда, когда выполняются неравенства:

i) при $k=n-1$

$$b_2 < \sum_{i=2}^m a_i < b_1, a_2 < \sum_{j=2}^n b_j < a_1; \quad (1)$$

ii) при $0 \leq k < n-m$

$$b_{n-k+1} < \sum_{i=2}^m a_i < b_{n-k}; \quad (2)$$

iii) при $n-m \leq k \leq n$, $k \neq n-1$ либо (2), либо

$$a_{n-k+1} < \sum_{j=2}^n b_j < a_{n-k}, \quad (3)$$

где $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_m$, $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$, $a_0 = b_0 = +\infty$, $a_{m+1} = b_{n+1} = 0$. Будем предполагать, что при $k \neq n-1$ для многогранника $M(a, b)$ выполняются условия (2), так как случай, когда для многогранника $M(a, b)$ выполняются условия (3), сводится к первому, если перейти от многогранника $M(a, b)$ к многограннику $M(b, a)$.

Пусть $0 \leq k \leq n-1$. Тогда для любой вершины $x = \|x_{ij}\|_{m \times n}$ многогранника $M(a, b)$ из условий (1) и (2) следуют неравенства $x_{1j} > 0$, $j = \overline{1, n-k}$. Поэтому существует вершина $z = \|z_{ij}\|_{m \times n} \in M(a, b)$ с компо-

нентами $z_{1j} = b_j$, $j = \overline{1, n}$, $j \neq n-k$, $z_{1n-k} = b_{n-k} - \sum_{i=2}^m a_i$, $z_{in-k} = a_i$, $i = \overline{2, m}$, $z_{ij} = 0$ для остальных индексов.

Докажем, что любая вершина x многогранника $M(a, b)$ находится от z на расстоянии не более, чем $m+k-1$. С этой целью для вершины x многогранника $M(a, b)$ определим множество $T(x) = \{(i, j) \mid (i, j) \in \{2, m\} \times \{1, n-k-1\}, x_{ij} > 0\}$, если $0 \leq k \leq n-2$ и множества $R(x) = \{i \mid i \in \{2, m\}, \exists j \in \{1, n-k\}, x_{ij} > 0\}$, $S(x) = \{(i, j) \mid (i, j) \in R(x) \times$

$\times \{\overline{n-k+1}, n\}, x_{ij} > 0\}$, $H(x) = \{(i, j) \mid (i, j) \in (\overline{\{2, m\}} \setminus R(x)) \times \times \{n-k+1, n\}, x_{ij} > 0\}$, если $0 \leq k \leq n-1$.

Сначала покажем, что расстояние $r(x, y)$ между вершинами x и y многогранника $M(a, b)$ удовлетворяет неравенству

$$r(x, y) \leq |T(x)|^*, \quad (4)$$

где вершина $y = \|y_{ij}\|_{m \times n} \in M(a, b)$ имеет вид: $y_{ij} = b_j, j = \overline{1, n-k-1}$, $y_{1n-k} = x_{1n-k} - \sum_{(s, t) \in T(x)} x_{st}, y_{in-k} = \sum_{i=1}^{n-k} x_{it}, i = \overline{2, m}, y_{ij} = 0 \forall (i, j) \in T(x), y_{ij} = x_{ij}$ для остальных индексов.

Действительно, если $T(x) = \emptyset$, то $r(x, y) = 0$, так как $x = y$. Пусть $(i_1, j_1) \in T(x) \neq \emptyset$. Отсюда, учитывая, что в строке с любым номером $i, i = \overline{2, m}$, среди элементов $x_{ij}, j = \overline{1, n-k}$, только один может оказаться положительным, получаем $x_{i_1 n-k} = 0$. Следовательно, найдется вершина $x' \in M(a, b)$ с компонентами

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} - x_{i_1 j_1}, & \text{если } (i, j) \in \{(i_1, j_1), (1, n-k)\}, \\ x_{ij} + x_{i_1 j_1}, & \text{если } (i, j) \in \{(1, j_1), (i_1, n-k)\}, \\ x_{ij} & \text{для остальных индексов.} \end{cases}$$

Ясно, что $r(x, x') = 1$ и $T(x') = T(x) \setminus \{(i_1, j_1)\}$. Поэтому за $|T(x)|$ подобных преобразований мы переходим от вершины x к вершине y , и, значит, выполняется неравенство (4).

Аналогичным образом доказываем, что

$$r(y, p) \leq |S(x)|, \quad (5)$$

где вершина $p = \|p_{ij}\|_{m \times n} \in M(a, b)$ имеет вид: $p_{1n-k} = y_{1n-k} - \sum_{(s, t) \in S(x)} y_{st}, p_{1j} = y_{1j} + \sum_{i \in R(x)} y_{ij}, j = \overline{n-k+1, n}, p_{in-k} = a_i \forall i \in R(x), p_{ij} = 0 \forall (i, j) \in \in S(x), p_{ij} = y_{ij}$ для остальных индексов.

Покажем теперь, что

$$r(p, z) \leq |H(x)|. \quad (6)$$

В самом деле, если $H(x) = \emptyset$, то $r(p, z) = 0$, поскольку $p = z$. Пусть $H(x) \neq \emptyset$. Тогда $\{2, m\} \setminus R(x) \neq \emptyset$. Возьмем произвольный индекс $i_1 \in \{2, m\} \setminus R(x)$. Нетрудно убедиться, что пара $(i_1, n-k)$ образует с некоторыми парами из множества $\{(i, j) \mid i \in \{1, m\} \setminus R(x), j \in \{n-k, n\}, p_{ij} > 0\}$ цикл: $(i_1, n-k), (1, n-k), (1, j_1), (i_2, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_s, j_s), (i_1, j_s)$. Построим вершину $p' \in M(a, b)$, компоненты которой определяют следующим образом:

$$p'_{ij} = \begin{cases} p_{ij} - \delta, & \text{если } (i, j) \in \{(1, n-k), (i_2, j_1), (i_3, j_2), \dots, (i_s, j_{s-1}), (i_1, j_s)\}, \\ p_{ij} + \delta, & \text{если } (i, j) \in \{(i_1, n-k), (1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_s, j_s)\}, \\ p_{ij} & \text{для остальных индексов,} \end{cases}$$

где $\delta = \min(x_{1n-k}, x_{i_2 j_1}, x_{i_3 j_2}, \dots, x_{i_s j_{s-1}}, x_{i_1 j_s})$. Понятно, что $r(p, p') = 1$ и $p'_{i_1 n-k} > 0$, причем $|H(p')| = |H(x)| - 1$. Поэтому, повторяя рассуждения, приведенные выше, заключаем, что неравенство (6) верно.

Из неравенств (4)–(6) следует, что $r(x, z) \leq |T(x)| + |S(x)| + |H(x)|$. Отсюда, принимая во внимание очевидное равенство $|T(x)| + |S(x)| + |H(x)| = m + k - 1$, находим, что $r(x, z) \leq m + k - 1$.

Для завершения доказательства этой теоремы достаточно показать, что радиус невырожденного транспортного многогранника $M(a_k, b_k)$ порядка $m \times n, 2 \leq m \leq n, n \geq 3$ с $(m-1)n + k$ гранями ($0 \leq k \leq n-2$), определенного векторами

$$a_k = ((n-k-1)((m-1)n+1) + k + 1, \underbrace{n, n, \dots, n}_{m-1}),$$

* Напомним, что через $|T|$ обозначается число элементов конечного множества T .

$$b_k = ((m-1)n+1, \dots, (m-1)n+1, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_k),$$

не меньше числа $m+k-1$. Действительно, в силу целочисленности многогранника $M(a_k, b_k)$ и в связи с тем, что $b_j = 1, j = n-k+1, n$, заключаем, что всякий j -й столбец ($n-k+1 \leq j \leq n$) любой матрицы x , представляющей вершину многогранника $M(a_k, b_k)$, содержит только одну положительную компоненту и она, как нетрудно видеть, может находиться на любом месте. Отсюда, учитывая, что для каждого $i, 2 \leq i \leq m$, в позициях $(i, 1), (i, 2), \dots, (i, n-k)$ может находиться только одна положительная компонента вершины x , причем на любом месте, получаем, что для всякой вершины x многогранника $M(a_k, b_k)$ существует такая вершина $y(x) \in M(a_k, b_k)$, число общих положительных компонент которых равно $n-k$. Следовательно, $r(M(a_k, b_k)) \leq m+k-1$. Теорема доказана.

Воспользовавшись теоремой 3 [3], можно получить следующие результаты: 1) максимальный радиус транспортного многогранника порядка $m \times n$, $\min(m, n) \geq 3$, $\max(m, n) \geq 4$, равен числу $m+n-1$; 2) у всякого невырожденного транспортного многогранника порядка $m \times n$, $\min(m, n) \geq 3$, $\max(m, n) \geq 5$, имеется по меньшей мере $\binom{mn-2m-2n+2}{t+1} (mn-m-n-t)$ -граней, где $0 \leq t \leq mn-2m-2n+1$, радиус каждой из которых совпадает с радиусом самого многогранника.

Из последнего утверждения на основании следствия 7.5 гл. VI [4] следует, что при взаимно простых m и n радиус всякой грани транспортного многогранника порядка $m \times n$, $\min(m, n) \geq 3$, $\max(m, n) \geq 5$, с максимальным числом вершин совпадает с радиусом самого многогранника и равен числу $m+n-1$.

2. К оценке сложности метода потенциалов. Число итераций, необходимых для решения транспортной задачи линейного программирования методом потенциалов [5], существенно зависит от выбора как стартовой (начальной) вершины, так и переменной, которая вводится в базисное множество. Удачный их выбор может значительно сократить количество итераций и тем самым ускорить решение задачи.

В большинстве случаев выбор переменной, которая вводится в базисное множество, осуществляется согласно правилу ф (см., например, [6, 7]). В связи с этим возникает вопрос: верно ли, что количество итераций метода потенциалов нахождения минимума линейной функции $F(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$ на классе невырожденных транспортных многогранников порядка $m \times n$, $2 \leq m \leq n$, $n \geq 3$, с $(m-1)n+k$ гранями ($1 \leq k \leq n-1$) не превосходит максимального радиуса рассматриваемых многогранников, если в качестве начальной (стартовой) вершины взять вершину z , построенную при доказательстве теоремы, а выбор переменной, которая вводится в базисное множество, на каждой итерации осуществлять по правилу ф? Отрицательный ответ на этот вопрос для $m=3, n=4, k=2$ дает следующий

Пример 1. Найти минимум функции $F_1(x) = 7x_{11} + 7x_{12} + 7x_{13} + 7x_{14} + 6x_{21} + 7x_{22} + 5x_{23} + 2x_{24} + 4x_{31} + 7x_{32} + 3x_{33} + x_{34}$ на транспортном многограннике $M(a^1, b^1)$ порядка 3×4 , определенного векторами $a^1 = (26, 4, 4)$ и $b^1 = (18, 10, 5, 1)$.

Легко видеть, что многогранник $M(a^1, b^1)$ является невырожденным, а число его граней равно 10. Непосредственной проверкой убеждаемся, что радиус многогранника $M(a^1, b^1)$ максимален и равен числу 4. В качестве стартовой вершины многогранника $M(a^1, b^1)$ принимается вершина

$$z = \begin{vmatrix} 18 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

В то же время метод потенциалов, базирующийся на правиле φ , за 5 итераций строит вершину многогранника $M(a^1, b^1)$, в которой достигается минимум функции $F_1(x)$.

Однако следует заметить, что метод потенциалов позволяет, отправляясь от вершины z , построить решение данной задачи за 4 итерации, если выбор переменной, которая вводится в базисное множество, на каждой итерации осуществлять согласно следующему правилу ψ : переменная, подлежащая включению в базис обеспечивает наибольшее уменьшение целевой функции.

В заключение приведем пример транспортной задачи, в которой использование правила φ дает лучший результат по сравнению с правилом ψ .

Пример 2. Найти минимум функции $F_2(x) = 8x_{11} + 8x_{12} + 8x_{13} + 8x_{14} + 4x_{21} + 8x_{22} + 3x_{23} + 2x_{24} + 4x_{31} + 8x_{32} + 5x_{33} + 3x_{34}$ на невырожденном транспортном многограннике $M(a^2, b^2)$ порядка 3×4 с 10 гранями, определенных векторами $a^2 = (35, 9, 6)$ и $b^2 = (20, 20, 7, 3)$.

В самом деле, отправляясь от вершины

$$z = \begin{vmatrix} 20 & 5 & 7 & 3 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

метод потенциалов, основываясь на правиле $\psi(\varphi)$, за 5 (в лучшем случае за 3, а в худшем — за 4) итераций строит вершину многогранника $M(a^2, b^2)$, в которой достигается минимум функции $F_2(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов.— М., 1977.
2. Кравцов М. К., Емеличев В. А.— Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. наук, 1976, № 5, с. 97.
3. Кравцов М. К.— Докл. АН СССР, 1983, т. 270, № 2, с. 278.
4. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К. Многогранники, графы, оптимизация.— М., 1981.
5. Канторович Л. В., Гавурин М. К.— В сб.: Проблемы повышения эффективности работы транспорта. М., 1949, с. 110.
6. Данциг Дж. Линейное программирование, его применения и обобщения. М., 1966.
7. Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б. Задачи линейного программирования транспортного типа.— М., 1969.

Поступила в редакцию
27.10.80.

НИИАСПУ Госплана БССР