УДК 517.942 : 531.44

Г. А. ГЛАДКОВА, В. И. МАТАТОВ, К. А. СОЛОНСКАЯ

О НАГРУЖЕННОСТИ ФРИКЦИОННОЙ МУФТЫ ПРИ КВАДРАТИЧНОМ ЗАКОНЕ ВКЛЮЧЕНИЯ

Будем рассматривать переходные процессы однозвенной двухмассовой динамической системы с приводным асинхронным электродвигателем переменного тока, имеющим жесткую характеристику (угловая скорость ведущего диска $\omega_g = \text{const}$) [1, 2].

На основании принципа Даламбера [3] имеем систему дифференциальных уравнений, описывающую эти процессы:

$$\begin{cases} I_{\text{м}}\ddot{\varphi}_{\text{м}} = M_{\text{м}}(t,\ a) - c_{\text{к}}(\varphi_{\text{м}} - \varphi_{\text{с}}), \\ I_{\text{с}}\ddot{\varphi}_{\text{с}} = c_{\text{к}}(\varphi_{\text{м}} - \varphi_{\text{с}}) - M_{\text{с}}, \end{cases} \tag{1}$$

где $I_{\text{м}}$, $I_{\text{с}}$ — моменты инерции ведомого диска муфты и разгоняемой массы; $\varphi_{\text{м}}$, $\varphi_{\text{с}}$ — углы поворота масс с моментами инерции соответственно $I_{\text{м}}$ и $I_{\text{с}}$; $c_{\text{к}}$ — приведенная крутильная жесткость; $M_{\text{с}}$ — момент сопротивления; $M_{\text{м}}(t,\ a)$ — момент трения муфты (т. е. активный крутящий момент, передающийся на систему при помощи фрикционной муфты). Изучаемый процесс рассматривается на двух временных промежутках $I_1 = [0;\ 1]$ и $I_2 = [1;\ \tau]$, $\tau > 1$. На I_1 удельное давление возрастает, буксование между дисками муфты имеет место. При $1 \leqslant t \leqslant \tau$ удельное давление постоянно, но буксование продолжается. В момент времени τ буксование заканчивается, и диски муфты (ведущий и ведомый) вращаются как одно целое.

В настоящей статье находится тот закон включения муфты (из класса квадратичных полиномов), при котором работа буксования за одно включение наименьшая, а также определяются динамические нагрузки, которые испытывают при этом элементы муфты. Эти нагрузки характеризуются моментом упругих сил.

В новых переменных $\varphi_{\text{м}} = \varphi_1$, $\varphi_{\text{с}} = \varphi_2$, $\dot{\varphi}_{\text{м}} = \varphi_3$, $\dot{\varphi}_{\text{с}} = \varphi_4$ и с учетом того, что $M_{\text{м}}(t,\ a) = at^2 + (\overline{M} - a)t$, (1) запишется в виде

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \varphi_3, \\ \dot{\varphi}_2 = \varphi_4, \\ \dot{\varphi}_3 = [at^2 + (\overline{M} - a)t - c_k(\varphi_1 - \varphi_2)]/I_{\text{м}}, \\ \dot{\varphi}_4 = [c_k(\varphi_1 - \varphi_2) - M_{\text{с}}]/I_{\text{с}}, \end{cases} \tag{2}$$

где $-\overline{M} \leqslant a \leqslant \overline{M}$, $\overline{M} = \text{const}$ (постоянный момент трения полностью включенной муфты, т. е. когда $1 \leqslant t \leqslant \tau$). Система (2) решается при нулевых начальных условиях (ведомый диск муфты и разгоняемая масса в начальный момент покоятся) $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_3(0) = \varphi_4(0) = 0$. Качество переходного процесса будем оценивать [1, 2] работой буксования за одно включение

$$L = L_1 + L_2 = \int_0^1 M_{\text{м}}(t,\ a)[\omega_g - \dot{\varphi}_1(t,\ a)]\,dt + \int_1^{\tau(a)} \overline{M}\,[\omega_g - \dot{\tilde{\varphi}}_1(t,\ a)]\,dt, \tag{3}$$

где $\tau(a)$ (момент окончания буксования) удовлетворяет трансцендентному уравнению $\omega_g - \dot{\tilde{\varphi}}_1(\tau,\ a) = 0$. Момент упругих сил вычисляется по формулам:

$$M_g(t,\ a^*) = \begin{cases} c_{\text{к}}[\varphi_1(t,\ a^*) - \varphi_2(t,\ a^*)] = c_k\varphi(t,\ a^*), & t \in I_1, \\ c_{\text{к}}[\tilde{\varphi}_1(t,\ a^*) - \tilde{\varphi}_2(t,\ a^*)] = c_{\text{к}}\tilde{\varphi}(t,\ a^*), & t \in I_2, \end{cases}$$

где a^* — значение параметра a, при котором $L(a)$ принимает наименьшее значение на отрезке $[0;\ \tau]$, $\tilde{\varphi}_1$, $\tilde{\varphi}_2$ — компоненты решения системы (2) на промежутке $[1;\ \tau]$. Максимальный момент упругих сил определяется путем нахождения наибольшего значения функции $M_g(t, a^*)$ на отрезке $[0; \tau]$.

Из (2) с учетом нулевых начальных условий получим [4]:

$$\varphi(t, a) = \varphi_1(t, a) - \varphi_2(t, a) = A(a)\sin[Bt + \alpha(a)] + C(a)t^2 + D(a)t + E(a), \quad (4)$$

где $A(a) = \sqrt{(2a/(B^2 I_{\text{м}}) - M_{\text{с}}/I_{\text{с}})^2 + (a - \overline{M})^2/(BI_{\text{м}})^2}/B^2$,

$$B^2 = c_{\text{к}}/(1/I_{\text{м}} + 1/I_{\text{с}}),\ \operatorname{tg}\alpha(a) = BI_{\text{м}}(2a/(B^2 I_{\text{м}}) - M_{\text{с}}/I_{\text{с}})/(a - \overline{M}), \quad (5)$$

$$C(a) = a/(B^2 I_{\text{м}}),\ D(a) = (\overline{M} - a)/(B^2 I_{\text{м}}),\ E(a) = [M_{\text{с}}/I_{\text{с}} - 2a/(B^2 I_{\text{м}})]/B^2.$$

Используя (4) и третье уравнение системы (2), имеем

$$\dot{\varphi}_1(t, a) = \varphi_3(t, a) = \frac{1}{I_{\text{м}}}\left\{\frac{a - c_{\text{к}}C}{3}t^3 + \frac{\overline{M} - a - c_{\text{к}}D}{2}t^2 - c_{\text{к}}Et + \right.$$
$$\left. + \frac{Ac_{\text{к}}}{B}[\cos(Bt + \alpha) - \cos\alpha]\right\}. \quad (6)$$

Подставляя выражения $M_{\text{м}}(t, a) = at^2 + (\overline{M} - a)t$ и $\dot{\varphi}_1(t, a)$ на основании (6) в формулу (3), после интегрирования от 0 до 1 работа буксования на первом отрезке

$$L_1(a) = \frac{\omega_g}{2}\left(\overline{M} - \frac{a}{3}\right) - \frac{1}{I_{\text{м}}}\left\{\frac{a^2}{72} + \frac{1}{2}\left[c_{\text{к}}\left(\frac{1}{45}C + \frac{1}{20}D + \frac{1}{6}E\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{6}\overline{M}\right]a + \overline{M}\left[\frac{1}{8}\overline{M} - c_k\left(\frac{1}{15}C + \frac{1}{8}D + \frac{1}{3}E\right)\right] + \frac{Ac_k K(a)}{B}\right\}, \quad (7)$$

где $K(a) = \frac{1}{B^2}\left\{\frac{\overline{M}B^2 - 2a}{B}\sin(B + \alpha) + (\overline{M} + a)\cos(B + \alpha) + 2a\sin\alpha - \right.$ $\left. - \left[\overline{M}\left(1 + \frac{B^2}{2}\right) - a\left(1 + \frac{B^2}{6}\right)\right]\cos\alpha\right\}$; C, D, E, A, α выражаются через a по формулам (5).

На отрезке $[1; \tau]$ из (2) при начальных условиях $\tilde{\varphi}_k(1) = \varphi_k(1)$, $k = \overline{1, 4}$ (т. е. условиях «склеивания решений» при $t = 1$ и $\forall\, a \in [-\overline{M}; \overline{M}]$)

$$\tilde{\varphi}(t, a) = \tilde{\varphi}_1(t, a) - \tilde{\varphi}_2(t, a) = A_1(a)\sin[Bt + \alpha_1(a)] + F/B^2, \quad (8)$$

где $A_1(a) = \sqrt{(B^2\Phi(a) - F)^2/B^2 + \Omega^2(a)}/B$,

$$\operatorname{tg}[B + \alpha_1(a)] = (B^2\Phi(a) - F)/(B\Omega(a)),\quad F = \overline{M}/I_{\text{м}} + M_{\text{с}}/I_{\text{с}}, \quad (9)$$
$$\Phi(a) = \varphi(1, a),\ \Omega(a) = \dot{\varphi}(1, a).$$

Система (2) на промежутке $[1; \tau]$ с учетом формулы (8) дает

$$\dot{\tilde{\varphi}}_1(t, a) = \tilde{\varphi}_3(t, a) = \frac{1}{I_{\text{м}}}\left\{\left(\overline{M} - \frac{c_{\text{к}}E}{B^2}\right)(t - 1) + \right.$$
$$\left. + \frac{c_{\text{к}}A_1}{B}\left[\cos(Bt + \alpha_1) - \cos(B + \alpha_1)\right]\right\} + \varphi_3(1, a), \quad (10)$$

где $\varphi_3(1, a) = \dot{\varphi}_1(1, a)$ берется из равенства (6). Из формулы (3) с использованием выражения (10) работа трения муфты на отрезке $[1; \tau]$

$$L_2(a) = \overline{M}\left\{\left[\omega_g - \varphi_3(1, a) - \frac{c_{\text{к}}A_1}{BI_{\text{м}}}\cos(B + \alpha_1)\right](\tau - 1) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{I_{\text{м}}}\left[\left(\overline{M} - \frac{c_{\text{к}}F}{B^2}\right)\frac{(\tau - 1)^2}{2} + \frac{c_{\text{к}}A_1}{B^2}\left(\sin(B\tau + \alpha_1) - \sin(B + \alpha_1)\right)\right]\right\}, \quad (11)$$

где A_1, α_1, F вычисляются по формулам (9), τ удовлетворяет трансцендентному уравнению $\omega_g - \frac{1}{I_{\text{м}}}\left\{\left(\overline{M} - \frac{c_{\text{к}}F}{B^2}\right)(\tau - 1) + \frac{c_{\text{к}}A_1}{B}[\cos(B\tau + \alpha_1) - \right.$ $\left. - \cos(B + \alpha_1)]\right\} - \varphi_3(1, a) = 0$. Это уравнение при каждом фиксированном $a \in [-\overline{M}; \overline{M}]$ решается с определенной точностью методом половинного деления на отрезке $[0; 10]$.

Выражения (7) и (11) позволяют определить при каждом a из указанного промежутка суммарную работу буксования $L(a) = L_1(a) + L_2(a)$ на всем временном отрезке $[0; \tau]$.

Программирование велось на языке Фортран с использованием следующих исходных данных $I_м = 0{,}1$ кгс·м·с^2; $I_c = 0{,}5$ кгс·м·с^2; $c_k = 5$ кгс·м/рад; $\omega_g = 230$ с$^{-1}$; $\bar{M} = 60$ кгс·м; $M_c = 20$ кгс·м.
Результаты расчетов отражает следующая таблица

a	L_1	τ	L_2	L
—60	8553,20	4,110	15601,98	24155,18
...	...	...	...	...
0	6622,71	4,152	16087,16	22709,87
...	...	...	...	...
60	4514,68	4,198	16510,81	21025,49

Из изложенного получается, что наименьшая работа буксования муфты за одно включение $L_{\min} \approx L|_{a^*=60} = 21025{,}49$, а соответствующий максимальный динамический крутящий момент $M_{g\max} \approx 92{,}144$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Солонский А. С.— В сб.: Повышение эффективности использования техники в сельском хозяйстве. Горки, 1970, т. 63, с. 143.
2. Мататов В. И., Солонская Г. А., Солонская К. А.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 1, с. 72.
3. Яблонский А. А. Курс теоретической механики, ч. 2.— М., 1971.
4. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.— М., 1967.

Поступила в редакцию
01.12.82.

Кафедра дифференциальных уравнений

УДК 517.544.8.545

Э. И. ЗВЕРОВИЧ, Г. Г. ЧАЕВСКИЙ

КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ КРУГОВЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

1. В плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ рассмотрим область D, полученную выбрасыванием круга $|z| \leqslant \rho$ из прямоугольника $|\mathrm{Re}\, z| < \omega$, $|\mathrm{Im}\, z| < \omega'$, где $0 < \rho < \min\{\omega, \omega'\}$. Обозначим $D^* = \{z \in D \,|\, \mathrm{Re}\, z > 0,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$. Рассматривается задача конформного отображения кругового пятиугольника D^* на верхнюю полуплоскость. Задается соответствие граничных точек: $F(\omega + i\omega') = \infty$, $F(i\rho) = 0$. При такой нормировке отображающая функция $F(z)$ существует и определяется с точностью до положительного множителя. Продолжая ее через прямолинейные участки границ, получаем двоякопериодическую функцию с основными периодами 2ω, $2i\omega'$, фундаментальной областью которой является область D, причем на окружности $|t| = \rho$ выполняется условие $F(\bar{t}) = F(t)$. Отображающую функцию будем искать в виде $F(z) = \Phi(z) - P(z - \omega - i\omega')$, где $P(u)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса с основными периодами 2ω, $2i\omega'$; $\Phi(z)$ — аналитическая, двоякопериодическая, H-непрерывно продолжимая на ∂D. Условие $F(\bar{t}) = F(t)$, $|t| = \rho$ переписывается тогда в виде краевой задачи Карлемана для двоякопериодических функций:

$$\Phi(\bar{t}) - \Phi(t) = P(\bar{t} - \omega - i\omega') - P(t - \omega - i\omega'). \qquad (1)$$

Для функции $\Phi(z)$ справедливо интегральное представление:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau| = \rho} \varphi(\tau)\, \zeta(\tau - z)\, d\tau + C, \quad \varphi(\bar{t}) + \varphi(t) \equiv 0, \quad \int\limits_{|t| = \rho} \varphi(t)\, dt = 0, \qquad (2)$$

где ζ — дзета-функция Вейерштрасса, соответствующая примитивным периодам 2ω, $2i\omega'$. Воспользовавшись формулами Сохоцкого для интеграла (2), сводим задачу (1) к квазифредгольмову интегральному уравнению: