$$
\begin{cases}
\alpha_1+\alpha_2=-\dfrac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\right)\mu, \\
\alpha_1\alpha_2=\varepsilon\sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_5 & b_5 \end{vmatrix}\mu}, \\
\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_5 & b_5 \end{vmatrix}=\dfrac{1}{4}\left(\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\right)^2\mu+2\varepsilon\sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_5 & b_5 \end{vmatrix}\mu^{-1}} \\
\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_5 & b_5 \end{vmatrix}=\varepsilon\left(\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_5 \end{vmatrix}\right)\cdot\mu\sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_5 & b_5 \end{vmatrix}\cdot\mu}\,.
\end{cases}
\tag{27}
$$

Здесь $B=\varepsilon\sqrt{A}$.

Уравнения (19)—(21) исследовались Брио и Буке, их решения не содержат п. к. т. [3].

Замечание. В случае $B_2=0$, $B_4=0$ уравнение (5) примет вид $w'^4=0$, т. е. не содержит п. к. т.

Итак, получаем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть выполнено одно из условий (25)—(27), (16) и (22), (16″). Тогда уравнение (5) не имеет п. к. т.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— Харьков, 1939.
2. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений.— М.— Л., 1950.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, изд. 5-е.— М., 1976.

Поступила в редакцию
27.10.82.

Кафедра дифференциальных уравнений

УДК 519.1

М. М. КОВАЛЕВ, Н. Н. ПИСАРУК

НЕЗАВИСИМЫЕ ПОТОКИ И ПОЛИМАТРОИДЫ

Метод построения матроидов, индуцированных путями в графах, является центральным для проблем теории трансверсалей (см. [1]). В настоящей заметке этот метод обобщается на полиматроиды и применяется для решения задачи Фуджишэж [2] о максимальных независимых потоках. Отсутствующие здесь определения из теории полиматроидов можно найти в [3].

Пусть V_1, $V_2 \subseteq V$ — множества источников и стоков орграфа $G=(V, E)$. Независимым потоком называется вектор $x \in Z^E$, удовлетворяющий ограничениям

$$0 \leqslant x \leqslant d, \quad (1), \qquad x(E_i^+)-x(E_i^-)=0, \quad i \in V \setminus (V_1 \cup V_2), \tag{2}$$

$$0 \leqslant u(S) \leqslant R_1(S), \quad S \in 2^{V_1}, \quad (3), \qquad 0 \leqslant v(S) \leqslant R_2(S), \quad S \in 2^{V_2}, \tag{4}$$

где d — вектор пропускных способностей, $u_i=x(E_i^+)-x(E_i^-)$, $v_i=x(E_i^-)-x(E_i^+)$, R_k — субмодулярные неубывающие неотрицательные функции на 2^{V_k}, символ 2^V означает семейство всех подмножеств множества V. Известно, что ограничения (3) и (4) задают полиматроиды, обозначаем их соответственно P_1 и P_2. Предполагаем, что функции R_k принимают целые значения и термин полиматроид употребляем также для обозначения множества, образованного пересечением P_k и решеткой целочисленных векторов.

1. Индуцированные полиматроиды. Дополним орграф источником s, стоком t и множеством дуг (s, i), $i \in V_1$; (j, t), $j \in V_2$. Новый орграф обозначим G^*. Пропускные способности новых дуг равны ∞, а старых не изменяются. Задача о максимальном независимом потоке свелась к задаче о максимальном потоке в орграфе G^* при дополнительном условии: $u \in P_1$, $v \in P_2$. Теперь u, v — дуговые потоки по новым дугам. Поток (u, x, v) в орграфе G^* назовем t-независимым, если $v \in P_2$. Обозначим через Q_1 множество таких векторов $z \in Z^{V_1}$, что существует t-независимый поток (u, x, v) со свойством $u = z$.

Теорема 1.1. Q_1 — полиматроид.

Доказательство. Пусть $y^0 \leqslant y$ и $y \in Q_1$. Покажем, что $y^0 \in Q_1$. Пусть (u, x, v) такой t-независимый поток в G^*, что $u = y$. Пусть $y_e > y^0_e$, где $e = (s, i)$, $i \in V_1$. Из соотношений баланса для вершины i вытекает существование дуги $e_1 = (i, i_1)$ со свойством $x_{e_1} > 0$. Продолжая этот процесс, достигнем вершины t и построим некоторый путь L. Уменьшим поток x вдоль пути L на величину $\varepsilon_1 = \min \{(y_e - y^0_e), \min\limits_{j \in L} x_j\}$. Новый поток (u^1, x^1, v^1) является также t-независимым, так как по определению полиматроида $v^1 \in P_2$. Кроме того, $y^0 \leqslant u^1 < y$. Аналогичным образом уменьшаем поток u^1. В конце концов получим t-независимый поток $(\bar{u}, \bar{x}, \bar{v})$ со свойством $y^0 = \bar{u}$, а это означает, что $y^0 \in Q_1$.

Пусть $y, y^0 \in Q_1$, $y(V_1) = y^0(V_1) + 1$ и пусть $\varphi = (u, x, v)$, $\varphi^0 = (u^0, x^0, v^0)$ — t-независимые потоки в G^*, со свойствами $u = y$ и $u^0 = y^0$. Пусть G^*_φ-граф остаточных пропускных способностей [4]. Тогда $\Delta\varphi = \varphi \ominus \varphi^0$ поток в G^*_φ. По теореме о разложении $\Delta\varphi = \sum\limits_C \varphi_C + \sum\limits_L \varphi_L$, где φ_C, φ_L — элементарные потоки вдоль соответственного цикла C и простого пути L из s в t. В силу того, что P_2-полиматроид существует индекс j, что $v^0_j > v_j$ и $v + \delta_j \in P_2$, δ_j — j-й единичный орт. Рассмотрим два случая. В первом в разложении $\Delta\varphi$ существует элементарный поток вдоль пути L' из s в t, который оканчивается дугой (j, t). Пусть $\varphi' = \varphi^0 \oplus \varphi_{L'}(1)$, где $\varphi_{L'}(1)$ — элементарный единичный поток вдоль пути L'. Ясно, что $\varphi' = (u', x', v')$ — t-независимый поток в G^* и $u' \geqslant u^0$, $u(V_1) = u'(V_1)$. Поэтому $y' = u'$, и $y' \in Q_1$, это и доказывает, что Q_1 — полиматроид. Во втором случае в разложении $\Delta\varphi$ нет пути L из s в t, содержащего дугу (j, t). Снова рассмотрим два случая: а) в разложении $\Delta\varphi$ существует цикл C', содержащий дугу (j, t) и проходящий через s; б) такого цикла не существует. В случае а) пусть L' есть часть цикла C', ведущая из s в t. Дальше доказательство такое же, как и в случае 1. В случае б) для произвольного цикла C', входящего в разложение $\Delta\varphi$ и содержащего дугу (j, t), положим $\varphi' = \varphi^0 \oplus \varphi_{C'}(1)$. Ясно, что $\varphi' = (u', x', v')$ — t-независимый поток и $u' = u^0$. Теперь, рассматривая вместо потока φ^0 поток φ', повторим все рассуждения снова. Продолжая таким образом, мы придем к случаю 1 или подслучаю а) случая 2. Тем самым теорема полностью доказана.

Следствие 1.1. Ранговая функция R_{Q_1} полиматроида Q_1 в точке $A \subseteq V_1$ равна максимальному t-независимому потоку в орграфе G^* с пропускными способностями: $\bar{d}_e = \infty$ для e из $s \times A$ и из $V_2 \times t$; $\bar{d}_e = 0$ для $e \in s \times (V_1 \setminus A)$; $\bar{d}_e = d_e$ для $e \in E$.

Следствие 1.2. Задача о максимальном независимом потоке эквивалентна задаче

$$\max_{y \in P_1 \cap Q_1} y(V_1). \tag{5}$$

Задача (5) известна как задача о максимальном полиматроидном пересечении, для решения последней существуют алгоритмы с полиномиальным числом обращений к оракулам, проверяющим принадлежность вектора y соответственно полиматроидам P_1 и Q_1. Полиматроид Q_1 явно не задан. Укажем, как проверять принадлежность: $y \in Q_1$. Определим множество $Q_2(y) = \{z \in Z^{V_2}_+ :$ существует поток (u, x, v) в G^*, что $v = z$ и $u \leqslant y\}$.

Теорема 1.2. $Q_2(y)$ — полиматроид.

Следствие 1.3. Вектор $z \in Q_2(y)$ тогда и только тогда, когда величина максимального потока в орграфе G^* со следующими пропускными способностями: y для дуг из $s\times V_1$, d для дуг из E; z для дуг из $V_2\times t$ равна $z(V_2)$.

Следствие 1.4. Вектор $y\in Q_1$ тогда и только тогда, когда $y(V_1)=\max\{z(V_2):z\in Q_2(y)\cap P_2\}$.

Замечание 1. Из теоремы 1.2 вытекает алгоритм решения задачи о максимальном независимом потоке с помощью ее сведения к полиматроидному пересечению.

Замечание 2. Теоремы 1.1, 1.2 справедливы и в том случае, когда вместо кольца целых чисел Z взять поле R — действительных чисел.

2. Существование независимых потоков. В [5] получен следующий критерий непустоты полиматроидного пересечения с заданной гиперплоскостью.

Теорема 2.1. Пусть $N=\{1, 2, \ldots, n\}$ и пусть P_1 и P_2 — два полиматроида в R^N_+ с ранговыми функциями R_1 и R_2 соответственно. Тогда $P(\alpha)=\{x\in P_1\cap P_2:x(N)=\alpha\}\neq\varnothing$, если и только если $R_1(A)+R_2(N\setminus A)\geqslant\alpha$ для всех $A\subseteq N$.

Докажем аналогичную теорему для независимых потоков. Пусть $S, T\subseteq V$. Пара (S, T) называется (S, T)-разрезом множества V, если $S\cup T=V$, $S\cap T=\varnothing$.

Теорема 2.2. Независимый поток величины α существует в орграфе G тогда и только тогда, когда $R_1(V_1\cap T)+d(E\cap(S\times T))+R_2(V_2\cap S)\geqslant\alpha$ для всех (S, T)-разрезов.

Доказательство. В силу теоремы 2.1 и следствий 1.1, 1.2 независимый поток величины α существует тогда и только тогда, когда $R_1(A)+R_{Q_1}(V_1\setminus A)\geqslant\alpha$ для любых $A\subseteq V_1$. Неравенство $R_{Q_1}(V_1\setminus A)\geqslant\alpha-R_1(A)$ в силу теоремы 1.2 и следствия 1.4 справедливо тогда и только тогда, когда для любых $B\subseteq V_2$ имеет место неравенство

$$R_2(B)+R_{Q_2}(\bar{d})(V_2\setminus B)\geqslant\alpha-R_1(A). \tag{6}$$

Пропускные способности d^* дуг графа G^* определим правилом $d^*_e=0$ для $e\in B\times t$ и $d^*_e=\bar{d}_e$ для остальных дуг. Из следствия 1.3 вытекает, что $R_{Q_2(d)}(V_2\setminus B)=\min d^*(E^*\cap(S^*\times T^*))$, где минимум берется по всем разрезам (S^*, T^*) орграфа G^*, но для минимального разреза (S°, T°)

$$d^*(E^*\cap(S^0\times T^0))=d^*(E\cap(S^0\times T^0))+d^*(s\times A)+d^*(B\times t)=d(E\cap(S^0\times T^0)), \tag{7}$$

т. е. неравенство (6) эквивалентно следующему неравенству:

$$R_2(B)+d(E\cap(S^0\times T^0))\geqslant\alpha-R_1(A) \tag{8}$$

для любых $A\subseteq V_1$, $B\subseteq V_2$. Так как неравенство (8) справедливо для минимального разреза, оно тем более верно для любого (S, T)-разреза, обладающего свойством $V_1\cap T\subseteq A$, $V_2\cap S\subseteq B$. Уменьшая число независимых параметров в (8) по правилу $B=V_2\cap S$, $A=V_1\cap T$, получаем утверждение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мейсон Дж. Проблемы комбинаторного анализа.— М., 1980, с. 7.
2. Fujishige S.— J. Operations Res. Soc. Japan, 1978, vol. 21, p. 189.
3. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К. Многогранники, графы, оптимизация.— М., 1981.
4. Адельсон-Вельский Г. М., Диниц Е. А., Карзанов А. В. Потоковые алгоритмы.— М., 1975.
5. Edmonds J.— Proceedings of the Calgary International Conference on Combinatorial Structures and their Applications, Gordon and Breach, New York, 1970, p. 66.

Поступила в редакцию
10.11.82.

Кафедра математического обеспечения АСУ