[3]), в дальнейшем планируется разработка второго варианта системы СПЕРКС-1 для обработки таких входных документов, в поле j^* которых задана неформализованная естественно-языковая информация.

ЛИТЕРАТУРА

1. Король И. А., Совпель И. В.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 1, с. 30.
2. Кристофидес Н. Теория графов.— М., 1978.
3. Гончаренко В. В., Король И. А., Котельникова Н. М., Музалевская В. М., Совпель И. В.— Тез. докл. Всесоюз. конф.: Переработка текста методами инженерной лингвистики. Минск, 1982, с. 109.

Поступила в редакцию 24.05.82.

Кафедра МО АСУ

УДК 519.926

А. А. ЛЕВАКОВ

РЕГУЛИРУЕМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В работе [1] введено понятие управляемости системы динамическим регулятором и показано, что линейная стационарная система управляема стационарным линейным регулятором тогда и только тогда, когда система управляема, а регулятор наблюдаем [2]. Исследование управляемости различных линейных систем с помощью регулятора проведено в [1, 3]. В предлагаемой заметке эти результаты распространены на нелинейные системы.

Рассмотрим объект, описываемый уравнениями:

$\dot{x}=f(t, x, y, u)$, $x(t_0)=x_0$ (1), $u=g(t, x, y)$, (2), $\dot{y}=\omega(t, x, y)$, $y(t_0)=y_0$, (3)

где $x\in R^n$, $y\in R^k$, $t\in R_+=[t_0, +\infty[$, $u\in R^m$, $f: R_+\times R^n\times R^k\times R^m\to R^n$, $g: R_+\times R^n\times R^k\to R^m$, $\omega: R_+\times R^n\times R^k\to R^k$ — j-кратно непрерывно дифференцируемые функции. Обозначим через

$$\begin{cases} x=x(t,\ t_0,\ x_0,\ y_0) \\ y=y(t,\ t_0,\ x_0,\ y_0)' \end{cases}$$

решение системы (1)—(3) и через $\Gamma(\beta, t, x_0)$, $\Gamma(t, x_0)$ — множества

$$\Gamma(\beta,\ t,\ x_0)=\{x\in R^n\,|\,x=x(t,\ t_0,\ x_0,\ y_0'),\ \|y_0'-y_0\|\leqslant\beta\},$$

$$\Gamma(t, x_0)=\{x\in R^n\,|\,x=x(t, t_0, x_0, y_0),\ y_0\in R^k\}.$$

Определения: 1. Систему (1)—(3) назовем локально регулируемой вдоль $x(t, t_0, x_0, y_0)$, если для всех $\beta>0$ и для всех t из некоторого промежутка $]t_0, t_1]$ точка $x(t, t_0, x_0, y_0)$ является внутренней для $\Gamma(\beta, t, x_0)$.

2. Систему (1)—(3) будем называть регулируемой, если $\Gamma(t, x_0)=R^n$ при всех t из некоторого промежутка $]t_0, t_1]$ и при всех $x_0\in R^n$.

Введем оператор U, действующий на функции $(t_0, x_0, y_0)\to\xi(t_0, x_0, y_0)\in R^n$ по правилу $U(\xi)=\frac{\partial\xi}{\partial t_0}+\frac{\partial\xi}{\partial y_0}\omega(t_0, x_0, y_0)+\frac{\partial\xi}{\partial x_0}f(t_0, x_0, y_0, g(t_0, x_0, y_0))$. Степени оператора U определим равенствами $U^0(\xi)=\xi$, $U^n(\xi)=U(U^{n-1}(\xi))$, $n\geqslant 1$. Обозначим через R_j, W_j следующие матрицы:

$$R_j=\left(\frac{\partial U^1(x_0)}{\partial y_0},\ \ldots,\ \frac{\partial U^j(x_0)}{\partial y_0}\right),\quad W_j=\left(\left(\frac{\partial U^1(x_0)}{\partial y_0}\right)^{\mathrm{T}},\ \ldots,\ \left(\frac{\partial U^j(x_0)}{\partial y_0}\right)^{\mathrm{T}}\right)$$

(т — знак транспонирования).

Отметим, что матрицы R_j, W_j строятся непосредственно по параметрам системы (1)—(3).

Теорема 1. Если существует натуральное число j такое, что

$$\operatorname{rank} R_j=n,\ \operatorname{rank} W_j\geqslant n, \tag{4}$$

то система (1)—(3) является локально регулируемой вдоль $x(t, t_0, x_0, y_0)$.

Доказательство легко вытекает из теоремы о неявной функции, так как ранг матрицы Якоби отображения $z(t, y_0')=x(t, t_0, x_0, y_0')-x(t, t_0, x_0, y_0)$ при $y_0'=y_0$ и всех t из некоторого промежутка $]t_0, t_1]$ равен n.

Из теоремы 1 следует, что если условие (4) выполняется при всех $y_0 \in Q$, где Q — некоторое подмножество из R^k, то система (1)—(3) является локально регулируемой вдоль $x(t, t_0, x_0, y_0)$ при каждом $y_0 \in Q$. Для голоморфных систем верно почти обратное утверждение.

Теорема 2. Пусть функции ω и g голоморфны около каждой точки (t_0, x_0, y_0), $y_0 \in Q$, а функция f голоморфна около каждой точки $(t, x_0, y_0, g(t_0, x_0, y_0))$, $y_0 \in Q$. Если система (1)—(3) локально регулируема вдоль $x(t, t_0, x_0, y_0)$ при каждом $y_0 \in Q$, то условие (4) имеет место для всех y_0 из некоторого открытого плотного подмножества множества Q.

Доказательство. Предположим, что система (1)—(3) не удовлетворяет условию (4) при всех y_0 из некоторого открытого подмножества N множества Q, хотя система локально регулируема вдоль $x(t, t_0, x_0, y_0)$ при каждом $y_0 \in Q$. Для любой точки $y_0 \in N$ существует окрестность $A \subset N$ этой точки и отрезок $[t_0, t^*]$, $t^* > t_0$ такие, что функции $t \to x(t, t_0, x_0, y_0')$ при всех $y_0' \in A$ представимы в виде обобщенных рядов Ли

$$x(t, t_0, x_0, y_0') = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^s}{s!} U^s(x_0), \tag{5}$$

сходящихся равномерно на $[t_0, t^*]$. Из предложения 1.6 [4, с. 55] следует, что система (1)—(3) может быть локально регулируемой вдоль $x(t, t_0, x_0, y_0)$ лишь, когда $k \geqslant n$. Отсюда и из (5) вытекает, что каждая точка $y_0' \in A$ является критической [4, с. 58] для отображения $y_0' \to z(t, y_0') = x(t, t_0, x_0, y_0') - x(t, t_0, x_0, y_0)$ при каждом t из некоторого промежутка $[t_0, t^{**}]$, $t_0 < t^{**} \leqslant t^*$. Согласно теореме Сарда [4], множество $z(t, A)$ при каждом $t \in [t_0, t^{**}]$ имеет меру нуль в R^n [4], что противоречит локальной регулируемости системы (1)—(3) вдоль $x(t, t_0, x_0, y_0)$.

Рассмотрим теперь линейную систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + K(t)y, \ x(t_0) = x_0 \quad (6), \quad u = C(t)y + F(t)x, \tag{7}$$

$$\dot{y} = D(t)y + L(t)x, \ y(t_0) = y_0, \tag{8}$$

где $x \in R^n$, $u \in R^m$, $y \in R^k$, A, B, C, K, F, D, L — матрицы соответствующих размерностей, голоморфные около точки t_0. Матрицы R_j и W_j для системы (6)—(8) не зависят от y_0 и x_0. Аналогично теоремам 1 и 2 можно доказать следующее утверждение.

Теорема 3. Система (6)—(8) является регулируемой тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank} R_j = n$, $\operatorname{rank} W_j \geqslant n$ для некоторого натурального числа j.

Следствие. Для регулируемости линейной стационарной системы $\dot{x} = Ax + Bu$, $x(0) = x_0$, $u = Cy$, $\dot{y} = Dy$, $y(0) = y_0$, где A, B, C, D — постоянные матрицы соответствующих размерностей, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{rank} R_n = n$, $\operatorname{rank} W_n \geqslant n$.

Пусть $P \subset Q$ множество точек y_0, для которых не выполняется условие (4). Из теоремы 1 следует, что система (1)—(3) локально регулируема вдоль $x(t, t_0, x_0, y_0)$, если $y_0 \in Q \setminus P$. Если y_0 внутренняя точка для P и функции f, g, ω удовлетворяют условиям гладкости теоремы 2, то система (1)—(3) не является локально регулируемой. Если же y_0 принадлежит ∂P, где ∂P — граница множества P, то система может быть локально регулируемой вдоль $x(t, t_0, x_0, y_0)$, но может и не обладать этим свойством (примеры 2 и 3).

Примеры.

1. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u, & x_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2 = \sin(tx_1), & x_2(0) = 1, \ u = y_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{y}_1 = x_2^3, & y_1(0) = 0, \\ \dot{y}_2 = y_1^2, & y_2(0) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Для системы (9) $R_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $W_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Так как $\operatorname{rank} R_3 = 2$, $\operatorname{rank} W_3 = 2$, то система (9) является локально регулируемой вдоль $x(t;\ 0;\ 0,\ 1;\ 0,\ 0)$.

2. $\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \ x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2 = x_1^2, \ x_2(0) = 0, \ u = y_1, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \ y_1(0) = 0 \\ \dot{y}_2 = 0, \ y_2(0) = 0, \ Q = R^2 \end{cases}$ (10)

Так как $\dot{x}_2 \geqslant 0$, то система (10) не является локально регулируемой вдоль $x(t;\ 0;\ 0,\ 0;\ 0,\ 0)$.

3. $\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \ x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2 = x_1^3, \ x_2(0) = 0, \ u = y_1, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \ y_1(0) = 0 \\ \dot{y}_2 = 0, \ y_2(0) = 0, \ Q = R^2. \end{cases}$ (11)

Осуществляя построение множества $\Gamma(\beta, t, 0, 0)$ для системы (11), убеждаемся, что эта система локально регулируема вдоль $x(t;\ 0;\ 0,\ 0;\ 0,\ 0)$. Легко проверить, что для систем (10), (11) точка $y_0 = (0,\ 0)$ принадлежит ∂P.

ЛИТЕРАТУРА

1. Игнатенко В. В.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, 1976, № 2, с. 56.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Качественная теория оптимальных процессов.— М., 1971.
3. Игнатенко В. В.— Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1976, № 3, с. 26.
4. Голубицкий М., Гийемин В. Устойчивые отображения и их особенности.— М., 1977.

Поступила в редакцию
22.10.82.

Кафедра высшей математики

УДК 517.925

В. А. ПРОКАШЕВА

ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА БЕЗ ПОДВИЖНЫХ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК (случай $A_0 \neq 0$)

В работе рассматривается система:

$$\begin{cases} a_0 u'^2 + a_1 u'v' + a_2 v'^2 + a_3 u^2 + a_4 uv + a_5 v^2 = 0 \\ b_0 u'^2 + b_1 u'v' + b_2 v'^2 + b_3 u^2 + b_4 uv + b_5 v^2 = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $a_k = a_k(z),\ b_k = b_k(z),\ k = \overline{0,5}$

Введением подстановки $u = w \cdot v$ рассмотрение системы (1) сведется к рассмотрению решений уравнения:

$$A_0(z,\ w)\,w'^6 + A_1(z,\ w)\,w'^4 + A_2(z,\ w)\,w'^2 + A_3(z,\ w) = 0, \tag{2}$$

где $A_0(z,\ w) = P\left(\frac{\partial P}{\partial w} b_0 - \frac{\partial P_1}{\partial w} a_0\right)^2 - \frac{\partial P}{\partial w}\left(\frac{\partial P}{\partial w} b_0 - \frac{\partial P_1}{\partial w} a_0\right)(Pb_0 - P_1 a_0) + a_0 (Pb_0 - P_1 a_0)^2$,

$A_1(z,\ w) = 2P\left(\frac{\partial P}{\partial w} b_0 - \frac{\partial P_1}{\partial w} a_0\right)\left(\frac{\partial P}{\partial w} Q_{11} - \frac{\partial P_1}{\partial w} Q_{01}\right) - \frac{\partial P}{\partial w}\left(\frac{\partial P}{\partial w} b_0 - \frac{\partial P_1}{\partial w} a_0\right)(PQ_{11} - P_1 Q_{01}) - \frac{\partial P}{\partial w}\left(\frac{\partial P}{\partial w} Q_{11} - \frac{\partial P_1}{\partial w} Q_{01}\right)(Pb_0 - P_1 a_0) + Q_{01}(Pb_0 - P_1 a_0)^2 + 2a_0 (Pb_0 - P_1 a_0)(PQ_{11} - P_1 Q_{01})$,

$A_2(z,\ w) = P\left(\frac{\partial P}{\partial w} Q_{11} - \frac{\partial P_1}{\partial w} Q_{01}\right)^2 - \frac{\partial P}{\partial w}\left(\frac{\partial P}{\partial w} Q_{11} - \frac{\partial P_1}{\partial w} Q_{01}\right)(PQ_{11} - P_1 Q_{01}) + a_0 (PQ_{11} - P_1 Q_{01})^2 + 2Q_{01}(Pb_0 - P_1 a_0)(PQ_{11} - P_1 Q_{01})$,

$A_3(z,\ w) = Q_{01}(PQ_{11} - P_1 Q_{01})^2$, причем $P = P(z,\ w) = a_0 w^2 + a_1 w + a_2$, $P_1 = P_1(z_1 w) = b_0 w^2 + b_1 w + b_2$, $Q_{01} = Q_{01}(z,\ w) = a_3 w^2 + a_4 w + a_5$, $Q_{11} = Q_{11}(z,\ w) = b_3 w^2 + b_4 w + b_5$.

Можно доказать, что уравнение (2) в случае $A_0 \neq 0$ представимо в виде: