

Рассмотрим случай, когда кристалл установлен вдали от точного выполнения условий дифракции, т. е.  $|\alpha/g(\tau)| \gg 1$ . Здесь имеется только проходящая нейтронная волна, волновая функция которой имеет следующий вид:

$$\psi_s = c_s \left\{ \Theta(\alpha) \exp\left(ik_0 \int_0^L \varepsilon_1^s dz/\gamma_0\right) + \Theta(-\alpha) \exp\left(ik_0 \int_0^L \varepsilon_2^s dz/\gamma_0\right) \right\} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}}, \quad (16)$$

$$\text{где } \Theta(\alpha) = \begin{cases} 1 & \alpha > 0, \\ 0 & \alpha < 0. \end{cases}$$

Запишем выражение для вектора поляризации  $P_x$  и  $P_y$  проходящей волны

$$P_x = \Theta(\alpha) \cos\left(k_0 \operatorname{Re} \int_0^L (\varepsilon_2^- - \varepsilon_1^+) dz/\gamma_0\right) \exp\left(-k_0 \operatorname{Im} \int_0^L (\varepsilon_1^- + \varepsilon_1^+) dz/\gamma_0\right) + \\ + \Theta(-\alpha) \cos\left(k_0 \operatorname{Re} \int_0^L (\varepsilon_2^- - \varepsilon_2^+) dz/\gamma_0\right) \exp\left(-k_0 \operatorname{Im} \int_0^L (\varepsilon_2^- + \varepsilon_2^+) dz/\gamma_0\right). \quad (17)$$

Компонента  $P_y$  получается из  $P_x$  заменой  $\cos$  на  $-\sin$ .

Оценим вклад добавки  $\Delta v_{\text{срав.}}$ , обусловленной взаимодействием с гравитационным полем Земли, в полный угол поворота спина нейтрона. Пренебрегая членами, меньшими чем  $|g(\tau)/\alpha|^2$ , получаем следующее выражение для величины разности  $\varepsilon_{1(2)}^+ - \varepsilon_{1(2)}^-$ , зависящей от гравитационного потенциала:

$$\varepsilon_{1(2)}^+ - \varepsilon_{1(2)}^- |_{\text{грав.}} = \frac{+}{(-)} \frac{(1-\beta)^2}{4} \cdot \frac{\mu H}{E_0} \cdot \frac{mgz}{E_0} \{ [(\beta\alpha + (1-\beta)(g(0) + \\ + \mu H/E_0))^2 + 4\beta g(\tau)g(-\tau)]^{-1/2} + [(\beta\alpha + (1-\beta)(g(0) - \\ - \mu H/E_0))^2 + 4\beta g(\tau)g(-\tau)]^{-1/2} \}. \quad (18)$$

Тогда, как следует из (17) и (18), гравитационная добавка в полный угол поворота спина нейтронов, дифрагирующих на семействе кристаллографических плоскостей (220) монокристалла кремния толщиной  $L = 1$  см, равна 0,5 рад при следующих значениях входящих в (19) параметров:  $k_0 = 3,14 \cdot 10^8 \text{ см}^{-1}$ ,  $H = 10^4 \text{ Гс}$ ,  $\alpha = 10g(0)$ ,  $\beta = 0,5$ .

Таким образом, в условиях динамической дифракции в немагнитном кристалле влияние гравитационного поля Земли на прецессию спина нейтрона усиливается на несколько порядков, и появляется возможность его обнаружить.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Барышевский В. Г.—Письма в ЖЭТФ, 1981, т. 33, № 1, с. 78.
2. Baryshevskii V. G., Cherepitzia S. V.—Phys. Lett., 1982, vol. A90, № 5, p. 267.
3. Wegner S. A.—Phys. Rev., 1980, vol. 21B, № 5, p. 1774.

Поступила в редакцию  
04.07.83.

Кафедра ядерной физики и мирного  
использования атомной энергии

УДК 621.372.412

М. ПАТЕК, А. П. ХАПАЛЮК

### МЕТОД РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ ОСНОВНОЙ МОДЫ РЕЗОНАТОРА С ЛИНЗОЙ

В настоящее время часто приходится рассчитывать в параксиальном приближении открытые оптические резонаторы, усложненные внутренними элементами типа оптических линз, гауссовых диафрагм и т. д. При этом широко используются матричные методы [1], отличающиеся уни-

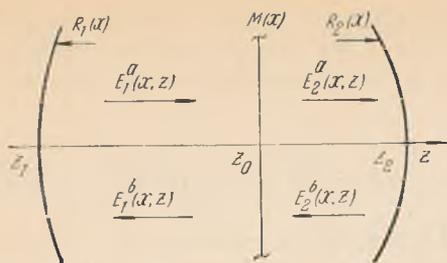


Рис. 1. Схема исходного резонатора. Стрелки и индексы  $a$  и  $b$  определяют направления распространения собственных гауссовых мод

В данной работе этот вопрос рассматривается по-новому, исходя из строгих (в паракиальном приближении) формул. С целью максимального упрощения изложения рассматривается резонатор, усложненный одной линзой. Ему сопоставляются два простых ЭР, которые затем позволяют стандартным образом определить все параметры собственных мод исходного резонатора. Параметры ЭР можно определить как аналитически, так и графически в соответствии с простыми законами геометрической оптики Гаусса.

Рассмотрим резонатор типа Фабри — Перо (рис. 1) с коэффициентами отражения зеркал  $R_j(x)$  ( $j=1,2$ ) и функцией передачи линзы  $M(x)$ :

$$R_j(x) = R_{0j} \exp\left(\frac{ikNx^2}{\rho_j}\right), \quad M(x) = \exp\left(\frac{ikNx^2}{2f}\right), \quad (1)$$

где  $R_{0j}$  — постоянные числа,  $\rho_j$  — радиусы кривизны зеркал,  $f$  — фокусное расстояние линзы и  $N$  — показатель преломления среды ( $N=n+ix$ ). Ограничиваясь основной (гауссовой) модой, будем искать ее в виде суммы гауссовых пучков:

$$E(x, z) = \frac{A_0 e^{\pm ikNz}}{\sqrt{kn\omega^2 \pm i(z-l)}} \exp\left[-\frac{kN}{2} \frac{x^2}{kn\omega^2 \pm i(z-l)}\right], \quad (2)$$

где  $A_0$  — постоянная амплитуда,  $\omega$  — радиус пучка в локусе (перетяжке),  $l$  — положение локуса на оси;  $z$  — неизвестные параметры, которые находим из граничных условий на зеркалах и линзе:

$$\begin{aligned} E_1^a(x, z_1) &= R_1(x) E_1^b(x, z_1), \quad E_2^a(x, z_2) R_2(x) = E_2^b(x, z_2), \\ E_2^a(x, z_0) &= M(x) E_1^a(x, z_0), \quad E_2^b(x, z_0) M(x) = E_1^b(x, z_0). \end{aligned} \quad (3)$$

Смысл индексов ясен из рис. 1.

Подставляя (1), (2) в (3) и приравнявая в экспонентах коэффициенты при  $x^2$ , получаем систему относительно комплексных параметров  $u_{ja} = l_{ja} - ikn\omega_{ja}^2$ ,  $u_{jb} = -l_{jb} - ikn\omega_{jb}^2$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_{1a} - z_1} - \frac{1}{u_{1b} + z_1} &= \frac{2}{\rho_1}, \quad \frac{1}{u_{2a} - z_2} - \frac{1}{u_{2b} + z_2} = -\frac{2}{\rho_2}, \\ \frac{1}{u_{1a} - z_0} - \frac{1}{u_{2a} - z_0} &= \frac{1}{u_{2b} + z_0} - \frac{1}{u_{1b} + z_0} = -\frac{1}{f}. \end{aligned} \quad (4)$$

Система (4) равносильна в матричном представлении обходу волной резонатора. Она содержит две пары неизвестных параметров пучков, распространяющихся соответственно между первым зеркалом и линзой и линзой и вторым зеркалом. В соответствии с такими представлениями удобно выбрать метод решения задачи. Из (4) можно исключить параметры пучков, распространяющихся между линзой и вторым зеркалом ( $j=2$ ), а уравнения для параметров пучков, распространяющихся между первым зеркалом и линзой ( $j=1$ ), записать в виде

$$\frac{1}{u_{1a} - z_1} - \frac{1}{u_{1b} + z_1} = \frac{2}{\rho_1}, \quad \frac{1}{u_{1a} - z_{2eq}} - \frac{1}{u_{1b} + z_{2eq}} = -\frac{2}{\rho_{2eq}}, \quad (5)$$

версальностью и простотой. К недостаткам этих методов следует отнести малую наглядность. В работе [2], исходя из простых физических соображений и известных формул геометрической оптики Гаусса, введено понятие эквивалентного резонатора (ЭР). Хотя в принципе любому сложному резонатору можно сопоставить простой ЭР, обладающий такой же матрицей обхода [3, 4], однако предложенный в [2] метод не дает возможности определить все параметры поля собственных мод [5, 6].

где  $z_{2eq}$  и  $\rho_{2eq}$  определяются из уравнений

$$\frac{1}{z_2 - z_0} - \frac{1}{z_{2eq} - z_0} = \frac{1}{f}, \quad \frac{1}{z_2 - z_0 - \rho_2} - \frac{1}{z_{2eq} - z_0 - \rho_{2eq}} = \frac{1}{f}. \quad (6)$$

Аналогично исключим из (4) параметры с индексами  $j=1$  и найдем уравнения для определения параметров с индексами  $j=2$ :

$$\frac{1}{u_{2a} - z_{1eq}} - \frac{1}{u_{2b} + z_{1eq}} = \frac{2}{\rho_{1eq}}, \quad \frac{1}{u_{2a} - z_2} - \frac{1}{u_{2b} + z_2} = -\frac{2}{\rho_2}, \quad (7)$$

где  $z_{1eq}$  и  $\rho_{1eq}$  находятся из уравнений

$$\frac{1}{z_{1eq} - z_0} - \frac{1}{z_1 - z_0} = \frac{1}{f}, \quad \frac{1}{z_{1eq} - z_0 + \rho_{1eq}} - \frac{1}{z_1 - z_0 + \rho_1} = \frac{1}{f}. \quad (8)$$

По отдельности обе системы (5) и (7) допускают простую физическую интерпретацию. Они имеют одинаковый вид и полностью совпадают с соответствующими уравнениями для некоторого простого (без линзы) ЭР. Эквивалентные резонаторы образованы одним зеркалом исходного резонатора, а параметры второго (эквивалентного) зеркала определяются соответственно уравнениями (6) и (8), которые можно интерпретировать как формулы геометрической оптики Гаусса, описывающие преломление лучей в линзе [7]. Это открывает дополнительные возможности использования простых и наглядных геометрических методов определения параметров ЭР.

Первые формулы в (6) и (8) определяют положение эквивалентных зеркал  $z_{jeq}$ . Вершина эквивалентного зеркала оказывается изображением в линзе вершины зеркала прообраза (рис. 2). Аналогично вторые формулы в (6) и (7) определяют положение центров кривизны эквивалентных зеркал:  $c_{1eq} = z_{1eq} + \rho_{1eq}$  и  $c_{2eq} = z_{2eq} - \rho_{2eq}$ , если известны центры кривизны зеркал-прообразов:  $c_1 = z_1 + \rho_1$ ,  $c_2 = z_2 - \rho_2$ . Точки  $c_{jeq}$  являются изображениями в линзе точек  $c_j$  (см. рис. 2).

Однако при использовании геометрического метода определения параметров эффективного резонатора следует строго придерживаться из-

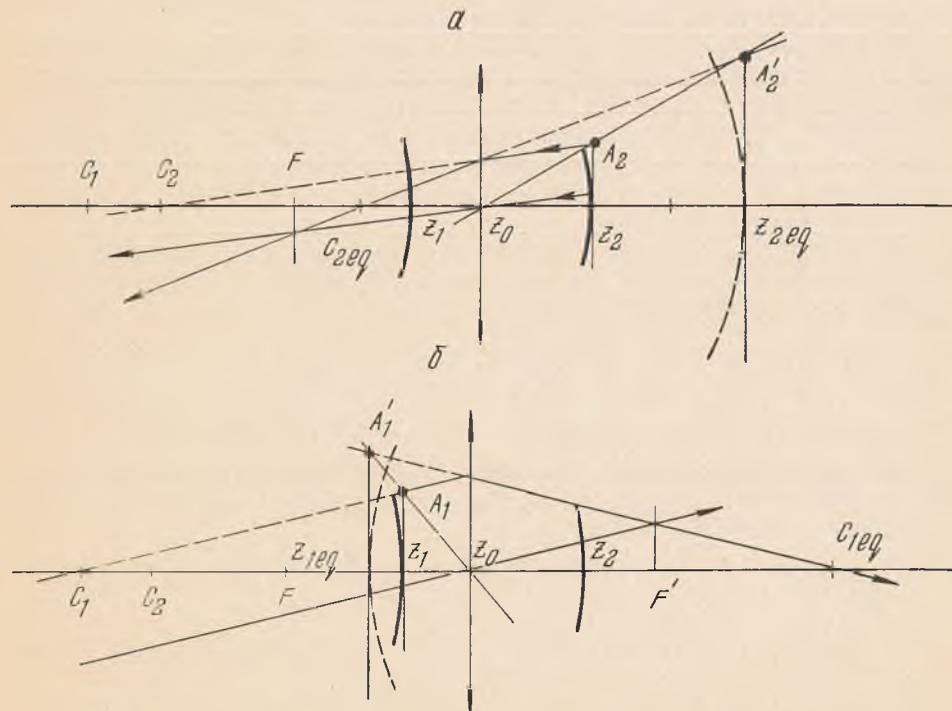


Рис. 2. Схема построения эквивалентного резонатора:

$a$  — первый ЭР;  $b$  — второй ЭР. Сплошными линиями обозначены реальные зеркала, штриховыми — эквивалентные

вестных правил знаков [7]. Все расстояния отсчитываются от линзы, а положительное направление удобно выбирать по направлению к известной точке (прообразу), изображение (образ) которой нужно найти. Поэтому член в формулах (6) и (8) с расстоянием до прообраза всегда нужно брать положительным, если он окажется отрицательным, равенство необходимо умножить на  $-1$ . Затем следует определить знак правой части, в которую входит фокусное расстояние линзы. Если правая часть после этого окажется положительной, образ точки предлагается искать по правилам построения изображения в собирающей линзе, в противном случае — в рассеивающей линзе. Это правило не зависит от того, будет реальная линза рассеивающей или собирающей.

В реальном резонаторе линза находится между зеркалами, поэтому слагаемые в первых равенствах системы (6) и (8) всегда положительны ( $z_2 - z_0, z_0 - z_1 > 0$ ), и искомые точки  $z_{1eq}$  и  $z_{2eq}$  можно определить по правилам построения в той линзе, которая реально находится в резонаторе.

Более сложная ситуация складывается при нахождении центров кривизны эффективных зеркал  $c_{1eq}$  и  $c_{2eq}$ . Связано это с тем, что расстояние от линзы до центра кривизны реальных зеркал ( $c_1$  и  $c_2$ ) может иметь разный знак. Если  $c_2 - z_0 > 0, c_1 - z_1 < 0$  (см. рис. 2, в), то изображения  $c_1$  и  $c_2$  находятся так же, как и изображения точек  $z_1$  и  $z_2$ . В противном случае, когда центр первого зеркала находится справа от линзы ( $z_0 - c_1 < 0$ ) или центр второго зеркала — слева от линзы ( $z_0 - c_2 > 0$ ) (см. рис. 2, а), для определения точек  $c_{1eq}$  и  $c_{2eq}$  при построении следует поменять знак фокусного расстояния линзы. Если реальная линза собирающая, соответствующие проекции следует строить для рассеивающей линзы и наоборот. На рис. 2 линза предполагается собирающей, и точка  $c_{1eq}$  является образом точки  $c_1$  в собирающей линзе, а точка  $c_{2eq}$  — образом точки  $c_2$  в рассеивающей линзе. Формально это осложнение связано с тем, что (6) и (8) не всегда совпадают с формулами Гаусса геометрической оптики линз; в формулах Гаусса и в формулах (6) или (8) знаки фокусных расстояний могут оказаться противоположными. Отсюда, в частности, следует, что эквивалентные зеркала строго не являются изображениями реальных зеркал в линзе.

Физический смысл этих построений довольно очевиден в геометрическом лучевом представлении: лучи (или их продолжения), нормальные к поверхности реального зеркала, после прохождения линзы меняют направления распространения, сходятся уже в центре эквивалентного зеркала и оказываются нормальными к его поверхности. До линзы они нормальны к поверхности реального зеркала, после линзы — к поверхности эквивалентного зеркала.

Длины ЭР  $d_{jeq}$  и радиусы кривизны их эквивалентных зеркал  $\rho_{jeq}$  находятся по формулам (их можно также определить из очевидных геометрических построений):

$$d_{1eq} = z_{2eq} - z_1 = z_2 - z_1 + \frac{(z_2 - z_0)^2}{f - z_2 + z_0}, \quad d_{2eq} = z_2 - z_{1eq} = z_2 - z_1 + \frac{(z_1 - z_0)^2}{f + z_1 - z_0},$$

$$\rho_{1eq} = \frac{f^2 \rho_1}{(f + z_1 - z_0)(f + \rho_1 + z_1 - z_0)}, \quad \rho_{2eq} = \frac{f^2 \rho_2}{(f - z_2 + z_0)(f + \rho_2 - z_2 + z_0)}. \quad (9)$$

Зная расстояния между зеркалами ЭР и их радиусы кривизны, параметры собственных пучков резонатора определяются уже стандартным образом по известным формулам [1]

$$\omega_{ja}^4 = \omega_{jb}^4 = \left(\frac{1}{kn}\right)^2 \frac{d_{jeq}(\rho_j - d_{jeq})(\rho_{meq} - d_{jeq})(\rho_j + \rho_{meq} - d_{jeq})}{(\rho_j + \rho_{meq} - 2d_{jeq})^2},$$

$$l_{ja} = l_{jb} = z_j - (-1)^j \frac{d_{jeq}(\rho_{meq} - d_{jeq})}{\rho_j + \rho_{meq} - 2d_{jeq}}, \quad j, m = 1, 2, j \neq m. \quad (10)$$

Параметры ЭР изменяются в широких пределах в зависимости от значения фокусного расстояния и положения линзы. С изменением параметров линзы радиусы кривизны зеркал ЭР и его длина могут менять знак. Изменение знака радиуса кривизны зеркал означает, что в ЭР

они становятся выпуклыми, если в исходном были вогнутыми или наоборот. Длина резонатора здесь определена как разность координат положений зеркал, и ее знак зависит от порядка нумерации зеркал; поэтому отрицательная длина резонатора означает, что первое зеркало расположено правее второго. Отметим, что формулы (10), определяющие параметры собственных пучков, остаются справедливыми во всех случаях, в том числе и при отрицательной длине ЭР.

Условие устойчивости обоих резонаторов требует, чтобы радиусы собственных пучков в локусах были положительными, т. е. должен быть положительным числитель в правой части первого равенства (10). Это условие оказывается одинаковым для обоих ЭР, поэтому условие устойчивости одного из двух ЭР одновременно означает устойчивость второго и, следовательно, устойчивость исходного резонатора с линзой. Спектр собственных частот и порог генерации также одинаковы для обоих ЭР. Имеются другие возможности введения ЭР. Например, в работе [2] вводится один ЭР, параметры которого подбираются таким образом, чтобы дать правильные размеры поперечного сечения генерирующих пучков на выходящих зеркалах резонатора.

Представленный метод эквивалентных резонаторов может быть использован наряду с известным матричным методом АВСД [1]. При сравнительной простоте и универсальности метод ЭР обладает заметно большей наглядностью и позволяет применять простые графические приемы в исследовании оптических резонаторов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Kogelnik H., Li T.— Appl. Opt., 1966, vol. 5, № 10, p. 1550.
2. Kogelnik H.— Bell. Sys. Tech. J., 1965, vol. 44, № 3, p. 455.
3. Кушнер В. Р.— Квант. электроника, 1978, т. 5, № 6, с. 1248.
4. А н а н ь е в Ю. А. Оптические резонаторы и проблема расходимости лазерного излучения.— М., 1979.
5. Korz H. P., Iffländer R., Weber H.— Appl. Opt., 1981, vol. 20, № 23, p. 4124.
6. Muys P., Vankerzeele H.— Appl. Opt., 1982, vol. 21, № 22, p. 3983.
7. Б о р н М., В о л ь ф Э. Основы оптики.— М., 1970.