

1. Burov L. I.— Univ. Helsinki, preprint № HU-TFT-82-21, 1982.
2. Wieman C., Hänsch T. W.— Phys. Rev. Lett., 1976, v. 36, p. 1170.
3. Румянцева Н. К., Смирнов В. С., Тумайкин А. М.— Опт. и спектр., 1979, т. 46, с. 139.

Поступила в редакцию  
30.05.83.

Кафедра общей физики

УДК 512.8

А. А. ШАРОМЕТ

## ОБ АБСТРАКТНЫХ ИЗОМОРФИЗМАХ РАЗРЕШИМЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП

В работе изучается природа абстрактного изоморфизма групп  $k$ -точек связанных разрешимых алгебраических групп, при условии, что его ограничение на унипотентную часть группы индуцировано бирациональным отображением. Доказываются два результата, анонсированные автором в [1]. Мы используем обозначения, принятые в [2].

**Теорема 1.** Пусть  $G$  и  $H$  — разрешимые связанные  $k$ -группы, центры которых конечны и не содержат унипотентных элементов и  $\overline{G}(k) = G$ . Пусть  $\varphi: G(k) \rightarrow H(k)$  изоморфизм такой, что  $\varphi|_{G_u(k)}$  — бирациональное отображение.

Тогда найдутся группа  $F$  и изогении  $\pi_1: F \rightarrow G$  и  $\pi_2: F \rightarrow H$ , определенные над  $k$ , такие, что  $\varphi(\pi_1(f)) = \pi_2(f)\Theta(f)$  для всех  $f \in F(k)$ , где  $\Theta: F(k) \rightarrow Z(H(k))$  — подходящий гомоморфизм.

**Доказательство.** Группа  $H$  действует на своей унипотентной части  $H_u$  внутренними автоморфизмами, обозначим  $\gamma: H \times H_u \rightarrow H_u: (h, u) \rightarrow h^{-1}uh$ . Таким образом, каждому  $h \in H$  ставится в соответствие автоморфизм группы  $H_u$ , коморфизм которого мы обозначим  $\gamma_h$ . Если  $f \in \Omega[H_u]$ , то  $\gamma_h(f) = f \text{Int } h$ . В алгебре регулярных на  $H_u$  функций найдется конечномерное пространство  $V$ , определенное над  $k$ , которое содержит образующие алгебры  $k[H_u]$  и инвариантно относительно действия группы  $H$  [2]. Отображение  $h \rightarrow \gamma_h$  индуцирует линейное представление группы  $H$  в пространстве  $V$ , которое мы обозначим через  $\psi'$ . Нетрудно видеть, что  $\psi'$  определено над  $k$ .

Функции из  $\Omega[H_u]$  разделяют элементы  $H_u$ , и их значения на элементах из  $H_u$  определяются значениями на них элементов  $k$ -базиса пространства  $V = v_1, \dots, v_n$ , ибо  $\Omega[H_u] = \Omega[v_1, \dots, v_n]$ . Значит, ядром  $\psi'$  является  $Z_H(H_u)$ .

Пусть  $\varphi: G_u \rightarrow H_u$  такой бирациональный изоморфизм, что  $\varphi(u) = \varphi(u) \forall u \in G_u(k)$ , а  $\varphi_0$  — его коморфизм. Из условия теоремы следует, что  $\overline{G_u}(k) = G_u$ , значит,  $\varphi$  определен над  $k$  и элементы  $\varphi_0(v_1), \dots, \varphi_0(v_n)$  порождают алгебру  $k[G_u]$ . Определим действие группы  $G$  на  $\Omega[G_u]$ , как выше мы это сделали для  $H$  и  $H_u$ , а именно: для  $g \in G$   $\delta_g: f \rightarrow f \text{Int } g$ , где  $f \in \Omega[G_u]$ . Нетрудно видеть, что пространство  $\varphi_0(V)$  инвариантно относительно  $G$  и определено над  $k$ . Как и в случае группы  $H$ , имеем линейное представление, определенное над  $k$  группы  $G$  в векторном пространстве  $\varphi_0(V)$ , которое обозначим буквой  $\psi$ . Изоморфизм  $\varphi_0: V \rightarrow \varphi_0(V)$  векторных пространств индуцирует бирациональный  $k$ -изоморфизм  $\varphi^*: \text{GL}(\varphi_0(V)) \rightarrow \text{GL}(V)$ . Очевидно, что  $\psi'(\varphi(s)) = \varphi^*(\psi(s)) \forall s \in S(k)$ .

Покажем, что для максимального  $k$ -подтора  $S$  группы  $G$   $\varphi(S(k))$  является группой  $k$ -точек некоторого максимального тора группы  $H$ , определенного над  $k$ . Пусть для  $s \in S(k)$   $\varphi(s) = t, u_s$  — разложение Жордана. Тогда  $u_s \in Z_H(H_u)$ , ибо  $\psi'(\varphi(s)) = \varphi^*(\psi(s))$  и  $\varphi^*(\psi(s))$  — полупростой элемент. Кроме того,  $u_s$  централизует  $\varphi(S(k))$ , поскольку  $\varphi(s)$  центра-

лизует  $\varphi(S(k))$ . Значит,  $u_s \in Z(H)$ , ибо  $H = \overline{\varphi(S(k))H_u}$ . Теперь из условия теоремы следует, что  $u_s = e$ , и  $\varphi(S(k))$  состоит из полупростых элементов. Отсюда легко следует, что  $\varphi(S(k)) = S'(k)$ , где  $S' \subset H$  — максимальный подтор, определенный над  $k$ .

Представления  $\psi$  и  $\psi'$  индуцируют изогении  $\psi: S \rightarrow T$  и  $\psi': S' \rightarrow T$ , где через  $T$  обозначен  $k$ -тор  $\varphi(S)$ . Тогда из результатов [3] следует, что найдутся такие изогении  $\pi_1: T \rightarrow S$  и  $\pi_2: T \rightarrow S'$ , что  $\psi\pi_1 = \psi'\pi_2 = \lambda_d$ , где  $d$  — наименьшее общее кратное степеней изогений  $\psi$  и  $\psi'$ , а  $\lambda_d: x \rightarrow x^d$ . Поскольку  $t \in T(k)$ ,  $\psi'(\varphi(\pi_1(t))) = \psi(\pi_1(t)) = \psi'(\pi_2(t))$ , то  $\varphi(\pi_1(t))\pi_2(t)^{-1} \in Z(H(k))$ . Отождествим  $G_u$  и  $H_u$  с помощью  $\varphi$  и обозначим через  $U$ , а буквой  $F$  обозначим полупрямое произведение  $TU$ , где действие  $T$  на  $U$  определено с помощью изогении  $\pi_1$  (или, что то же самое, с помощью  $\pi_2$ ). Нетрудно видеть, что группа  $F$ , изогении  $\pi_1: F \rightarrow G: (t, u) \rightarrow \pi_1(t)u$ ,  $\pi_2: F \rightarrow H: (t, u) \rightarrow \pi_2(t)u$  и гомоморфизм  $\Theta: F(k) \rightarrow Z(H(k)): (t, u) \rightarrow \varphi(\pi_1(t))\pi_2(t)$  являются искомыми.

Замечание. В случае, когда характеристика поля  $k$  равна нулю вместо алгебры Хопфа  $\Omega[G_u]$  можно использовать алгебру Ли группы  $G_u$ , как это сделано в подобной ситуации в [4].

В важном случае, когда поле  $k$  конечнопорождено, теорему 1 можно усилить следующим образом.

**Теорема 2.** Пусть в условиях теоремы 1 поле  $k$  конечнопорождено.

Тогда существует  $k$ -изоморфизм  $\tilde{\varphi}: G \rightarrow H$  такой, что  $\tilde{\varphi}(g) = \varphi(g)\Theta(g) \forall g \in G(k)$ , где  $\Theta: G(k) \rightarrow Z(H(k))$  — подходящий гомоморфизм.

Доказательство теоремы 2 разобьем на две леммы.

**Лемма 1.** Пусть  $T$  — расщепимый  $k$ -тор, где  $k$  — такое поле, что, если для  $m, n \in \mathbb{Z}$   $k^m = k^n$ , то  $m = \pm n$ . Пусть  $\pi: T \rightarrow T$  — такая изогения, что  $\pi(T(k)) = T(k)^d$ . Тогда найдется единственный  $k$ -автоморфизм  $\varphi$  тора  $T$  такой, что  $\pi\varphi = \lambda_d$ .

**Доказательство.** Тор  $T$  можно считать диагональным. Воспользуемся тем, что категория торов, расщепимых над  $k$ , контравариантно эквивалентна категории свободных конечнопорожденных  $Z$ -модулей, причем эквивалентность эта устанавливается отображением  $T \rightarrow X^*(T)$ .

Изогения  $\pi$  индуцирует морфизм  $\pi_0: X^*(T) \rightarrow X^*(T)$ , который в фиксированном базисе  $X^*(T)$  задается целочисленной невырожденной матрицей  $A$ . Нам достаточно найти такую матрицу  $B \in GL(n, Z)$ , что  $AB = dE$ , где  $E$  — единичная матрица. Из того, что  $\pi(T(k)) = T(k)^d$  нетрудно вывести, что все коэффициенты матрицы  $A$  делятся на  $d$ .

Покажем, что  $\det A = \pm d^n$ . Поскольку все коэффициенты  $A$  делятся на  $d$ , то  $A = (dE)A'$ . Если  $\det A' \neq \pm 1$ , то соответствующий морфизм  $\pi'$  тора является собственной изогенией. Значит, найдется такой одномерный подтор  $S$  тора  $T$ , что  $\pi'$  индуцирует собственную изогению  $S$  на  $\pi'(S)$ . В силу разложимости тора  $S$ , из условия леммы следует, что  $\pi'(S(k)) = (\pi'(S)(k))^m$  для некоторого целого  $m > 1$ . Отсюда следует, что  $\pi(T(k)) \cap \pi'(S) = (\pi'(S)(k))^{md}$ . Значит,  $\pi(T(k)) \neq T(k)^d$ . Для матрицы  $A$ , удовлетворяющей этим условиям, искомая матрица, как хорошо известно, существует, что доказывает лемму.

**Лемма 2.** Пусть  $k$ -конечнопорожденное поле  $T$ ,  $T_1$  и  $T_2$  —  $k$ -торы. Пусть  $\pi_1: T \rightarrow T_2$  и  $\pi_2: T_1 \rightarrow T_2$  — такие  $k$ -изогении, что  $\pi_1(T(k)) = \pi_2(T_1(k))$ . Тогда существует единственный  $k$ -изоморфизм  $\varphi: T \rightarrow T_1$  такой, что  $\pi_1 = \pi_2\varphi$ .

**Доказательство.** Существует (см. [3]) единственная  $k$ -изогения  $\gamma: T_2 \rightarrow T$  такая, что  $\gamma\pi_1 = \lambda_d$ . Если мы найдем такой изоморфизм  $\varphi$ , что  $\gamma\pi_1 = \gamma\pi_2\varphi$ , то  $\pi_1 = \pi_2\varphi$ . Действительно, в противном случае отображение  $g \rightarrow \pi_1(g)\pi_2(\varphi(g))^{-1}$  было бы нетривиальным морфизмом связной группы в конечную — Кег  $\gamma$ . Таким образом, лемму достаточно доказывать для  $T_2 = T$  и  $\pi_1 = \lambda_d$ .

Найдется локально-компактное пополнение  $k_v$  поля  $k$ , над которым  $T$  разложим. Тогда для  $T$  и  $k_v$  верна теорема о слабой аппроксимации [5],

т. е.  $T(k_v) = \overline{T(k)}^v$ , где  $\overline{T(k)}^v$  — замыкание  $T(k)$  в топологии, индуцированной на  $T(k_v)$  топологией поля  $k_v$ . Отсюда следует, что  $\pi_2(T_1(k_v)) = T(k_v)^d$  и по лемме 1 найдется единственный  $k_v$ -изоморфизм  $\varphi$  такой, что  $\pi_2\varphi = \lambda_d$ . Нетрудно видеть, что  $\varphi$  определен над  $k$ , что завершает доказательство леммы.

Для доказательства теоремы 2 достаточно применить лемму 2 к подгруппам  $S$ ,  $S'$  и  $T$  групп  $G$  и  $H$ , и к изогениям, индуцированным на  $S$  и  $S'$  гомоморфизмами  $\varphi$  и  $\varphi'$ , которые фигурировали в доказательстве теоремы 1.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шаромет А. А.— Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 1, с. 53.
2. Борель А. Линейные алгебраические группы.— М., 1972.
3. Vogel A., Tits J.— Ann. of Math., 1973, v. 97, N 3, p. 499.
4. Платонов В. П., Милованов М. В.— Докл. АН СССР, 1973, т. 209, № 1, с. 43.
5. Harder G.— Arch. Math., 1969, v. 19, N 5, p. 465.

Поступила в редакцию  
01.11.82.

Кафедра высшей алгебры

В издательстве «Университетское»

в 1984 году выходят:

Горбачевич А. К. Квантовая механика в общей теории относительности: основные принципы и элементарные приложения.— 9 л.— Рус. яз.— 1 р. 40 к. (ориентировочно)

Излагаются основы квантовой механики в неинерциальных системах отсчета и во внешних гравитационных полях, а также ее наиболее перспективные приложения. Анализируются трудности, возникающие при квантово-механической интерпретации общековариантного уравнения Дирака и связанные с неэрмитовостью и нековариантностью оператора Гамильтона, а также указан путь их устранения. Большое внимание уделяется различным физическим приложениям и анализу конкретных квантово-механических эффектов. В частности, детально исследовано влияние релятивистских ускорений ядра и внешнего гравитационного поля на атомные спектры.

Книга рассчитана на научных работников, аспирантов, студентов, специализирующихся в области теоретической физики.

Кумахов М. А., Комаров Ф. Ф. Излучение заряженных частиц в твердых телах.— 20 л.— Рус. яз.— 3 р. 30 к. (ориентировочно)

Анализируются полученные за последнее десятилетие теоретические и экспериментальные результаты по спонтанному и вынужденному излучению каналированных в кристаллах легких релятивистских частиц, выход характеристического рентгеновского излучения, возбуждаемого ионами. Рассматривается область приложений этих излучений в промышленном производстве и научных исследованиях.

Книга рассчитана на специалистов в области радиационной физики твердого тела, ядерной и атомной физики, оптики, ионной имплантации. Может быть полезна аспирантам и студентам соответствующих специальностей вузов.

Выходит в улучшенном оформлении.

Предварительный заказ на книги можно оформить в магазине № 29 «Центральный» — опорном пункте издательства — по адресу: 220050, г. Минск, Ленинский пр., 19.