ЛИТЕРАТУРА

1. Burov L. I.— Univ. Helsinki, preprint № HU-TFT-82-21, 1982.
2. Wieman C., Hänsch T. W.— Phys. Rev. Lett., 1976, v. 36, p. 1170.
3. Румянцева Н. К., Смирнов В. С., Тумайкин А. М.— Опт. и спектр., 1979, т. 46, с. 139.

Поступила в редакцию
30.05.83.

Кафедра общей физики

УДК 512.8

А. А. ШАРОМЕТ

ОБ АБСТРАКТНЫХ ИЗОМОРФИЗМАХ РАЗРЕШИМЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП

В работе изучается природа абстрактного изоморфизма групп k-точек связных разрешимых алгебраических групп, при условии, что его ограничение на унипотентную часть группы индуцировано бирациональным отображением. Доказываются два результата, анонсированные автором в [1]. Мы используем обозначения, принятые в [2].

Теорема 1. Пусть G и H — разрешимые связные k-группы, центры которых конечны и не содержат унипотентных элементов и $\overline{G(k)}=G$. Пусть $\varphi: G(k)\to H(k)$ изоморфизм такой, что $\varphi|_{G_u(k)}$ — бирациональное отображение.

Тогда найдутся группа F и изогении $\pi_1: F\to G$ и $\pi_2: F\to H$, определенные над k, такие, что $\varphi(\pi_1(f))=\pi_2(f)\Theta(f)$ для всех $f\in F(k)$, где $\Theta: F(k)\to \to Z(H(k))$ — подходящий гомоморфизм.

Доказательство. Группа H действует на своей унипотентной части H_u внутренними автоморфизмами, обозначим $\gamma: H\times H_u\to \to H_u: (h,\ u)\to h^{-1}uh$. Таким образом, каждому $h\in H$ ставится в соответствие автоморфизм группы H_u, коморфизм которого мы обозначим γ_h. Если $f\in\Omega[H_u]$, то $\gamma_h(f)=f\operatorname{Int}h$. В алгебре регулярных на H_u функций найдется конечномерное пространство V, определенное над k, которое содержит образующие алгебры $k[H_u]$ и инвариантно относительно действия группы H [2]. Отображение $h\to\gamma_h$ индуцирует линейное представление группы H в пространстве V, которое мы обозначим через ψ'. Нетрудно видеть, что ψ' определено над k.

Функции из $\Omega[H_u]$ разделяют элементы H_u, и их значения на элементах из H_u определяются значениями на них элементов k-базиса пространства $V - v_1,\ \ldots,\ v_n$, ибо $\Omega[H_u]=\Omega[v_1,\ \ldots,\ v_n]$. Значит, ядром ψ' является $Z_H(H_u)$.

Пусть $\tilde\varphi: G_u\to H_u$ такой бирациональный изоморфизм, что $\tilde\varphi(u)= =\varphi(u)\ \forall\, u\in G_u(k)$, а $\tilde\varphi_0$ — его коморфизм. Из условия теоремы следует, что $\overline{G_u(k)}=G_u$, значит, $\tilde\varphi$ определен над k и элементы $\tilde\varphi_0(v_1),\ \ldots,\ \tilde\varphi_0(v_n)$ порождают алгебру $k[G_u]$. Определим действие группы G на $\Omega[G_u]$, как выше мы это сделали для H и H_u, а именно: для $g\in G$ $\delta_g: f\to f\operatorname{Int}g$, где $f\in\Omega[G_u]$. Нетрудно видеть, что пространство $\tilde\varphi_0(V)$ инвариантно относительно G и определено над k. Как и в случае группы H, имеем линейное представление, определенное над k группы G в векторном пространстве $\tilde\varphi_0(V)$, которое обозначим буквой ψ. Изоморфизм $\tilde\varphi_0: V\to\tilde\varphi_0(V)$ векторных пространств индуцирует бирациональный k-изоморфизм $\varphi^*: \mathrm{GL}(\tilde\varphi_0(V))\to \to\mathrm{GL}(V)$. Очевидно, что $\psi'(\varphi(s))=\varphi^*(\psi(s))\ \forall\, s\in S(k)$.

Покажем, что для максимального k-подтора S группы G $\varphi(S(k))$ является группой k-точек некоторого максимального тора группы H, определенного над k. Пусть для $s\in S(k)$ $\varphi(s)=t_s u_s$ — разложение Жордана. Тогда $u_s\in Z_H(H_u)$, ибо $\psi'(\varphi(s))=\varphi^*(\psi(s))$ и $\varphi^*(\psi(s))$ — полупростой элемент. Кроме того, u_s централизует $\varphi(S(k))$, поскольку $\varphi(s)$ централизует $\varphi(S(k))$. Значит, $u_s \in Z(H)$, ибо $H=\overline{\varphi(S(k))H_u}$. Теперь из условия теоремы следует, что $u_s=e$, и $\varphi(S(k))$ состоит из полупростых элементов. Отсюда легко следует, что $\varphi(S(k))=S'(k)$, где $S'\subset H$ — максимальный подтор, определенный над k.

Представления ψ и ψ' индуцируют изогении $\psi:S\to T$ и $\psi':S'\to T$, где через T обозначен k-тор $\varphi(S)$. Тогда из результатов [3] следует, что найдутся такие изогении $\pi_1:T\to S$ и $\pi_2:T\to S'$, что $\psi\pi_1=\psi'\pi_2=\lambda_d$, где d — наименьшее общее кратное степеней изогений ψ и ψ', а $\lambda_d:x\to x^d$. Поскольку $t\in T(k)$, $\psi'(\varphi(\pi_1(t)))=\psi(\pi_1(t))=\psi'(\pi_2(t))$, то $\varphi(\pi_1(t))\pi_2(t)^{-1}\in$

$\in Z(H(k))$. Отождествим G_u и H_u с помощью $\tilde{\varphi}$ и обозначим через U, а буквой F обозначим полупрямое произведение TU, где действие T на U определено с помощью изогении π_1 (или, что то же самое, с помощью π_2). Нетрудно видеть, что группа F, изогении $\pi_1:F\to G:(t,\ u)\to\pi_1(t)u$, $\pi_2:F\to H:(t,\ u)\to\pi_2(t)u$ и гомоморфизм $\Theta:F(k)\to Z(H(k)):(t,\ u)\to$ $\to\varphi(\pi_1(t))\pi_2(t)$ являются искомыми.

Замечание. В случае, когда характеристика поля k равна нулю вместо алгебры Хопфа $\Omega[G_u]$ можно использовать алгебру Ли группы G_u, как это сделано в подобной ситуации в [4].

В важном случае, когда поле k конечнопорождено, теорему 1 можно усилить следующим образом.

Теорема 2. Пусть в условиях теоремы 1 поле k конечнопорождено. Тогда существует k-изоморфизм $\tilde{\varphi}:G\to H$ такой, что $\tilde{\varphi}(g)=\varphi(g)\Theta(g)$ $\forall\, g\in G(k)$, где $\Theta:G(k)\to Z(H(k))$ — подходящий гомоморфизм.

Доказательство теоремы 2 разобьем на две леммы.

Лемма 1. Пусть T — расщепимый k-тор, где k — такое поле, что, если для $m,\ n\in Z$ $k^m=k^n$, то $m=\pm n$. Пусть $\pi:T\to T$ — такая изогения, что $\pi(T(k))=T(k)^d$. Тогда найдется единственный k-автоморфизм φ тора T такой, что $\pi\varphi=\lambda_d$.

Доказательство. Тор T можно считать диагональным. Воспользуемся тем, что категория торов, расщепимых над k, контравариантно эквивалентна категории свободных конечнопорожденных Z-модулей, причем эквивалентность эта устанавливается отображением $T\to X^*(T)$.

Изогения π индуцирует морфизм $\pi_0:X^*(T)\to X^*(T)$, который в фиксированном базисе $X^*(T)$ задается целочисленной невырожденной матрицей A. Нам достаточно найти такую матрицу $B\in \mathrm{GL}(n,\ Z)$, что $AB=dE$, где E — единичная матрица. Из того, что $\pi(T(k))=T(k)^d$ нетрудно вывести, что все коэффициенты матрицы A делятся на d.

Покажем, что $\det A=\pm d^n$. Поскольку все коэффициенты A делятся на d, то $A=(dE)A'$. Если $\det A'\neq\pm 1$, то соответствующий морфизм π' тора является собственной изогенией. Значит, найдется такой одномерный подтор S тора T, что π' индуцирует собственную изогению S на $\pi'(S)$. В силу разложимости тора S, из условия леммы следует, что $\pi'(S(k))=(\pi'(S)(k))^m$ для некоторого целого $m>1$. Отсюда следует, что $\pi(T(k))\cap\pi'(S)=(\pi'(S)(k))^{md}$. Значит, $\pi(T(k))\neq T(k)^d$. Для матрицы A, удовлетворяющей этим условиям, искомая матрица, как хорошо известно, существует, что доказывает лемму.

Лемма 2. Пусть k-конечнопорожденное поле T, T_1 и T_2 — k-торы. Пусть $\pi_1:T\to T_2$ и $\pi_2:T_1\to T_2$ — такие k-изогении, что $\pi_1(T(k))=\pi_2(T_1(k))$. Тогда существует единственный k-изоморфизм $\varphi:T\to T_1$ такой, что $\pi_1=$ $=\pi_2\varphi$.

Доказательство. Существует (см. [3]) единственная k-изогения $\gamma:T_2\to T$ такая, что $\gamma\pi_1=\lambda_d$. Если мы найдем такой изоморфизм φ, что $\gamma\pi_1=\gamma\pi_2\varphi$, то $\pi_1=\pi_2\varphi$. Действительно, в противном случае отображение $g\to\pi_1(g)\pi_2(\varphi(g))^{-1}$ было бы нетривиальным морфизмом связной группы в конечную — $\mathrm{Ker}\,\gamma$. Таким образом, лемму достаточно доказывать для $T_2=T$ и $\pi_1=\lambda_d$.

Найдется локально-компактное пополнение k_v поля k, над которым T разложим. Тогда для T и k_v верна теорема о слабой аппроксимации [5], т. е. $T(k_v)=\overline{T(k)}^v$, где $\overline{T(k)}^v$ — замыкание $T(k)$ в топологии, индуцированной на $T(k_v)$ топологией поля k_v. Отсюда следует, что $\pi_2(T_1(k_v))=T(k_v)^d$ и по лемме 1 найдется единственный k_v-изоморфизм φ такой, что $\pi_2\varphi=\lambda_d$. Нетрудно видеть, что φ определен над k, что завершает доказательство леммы.

Для доказательства теоремы 2 достаточно применить лемму 2 к подторам S, S' и T групп G и H, и к изогениям, индуцированным на S и S' гомоморфизмами ψ и ψ', которые фигурировали в доказательстве теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шаромет А. А.— Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 1, с. 53.
2. Борель А. Линейные алгебраические группы.— М., 1972.
3. Borel A., Tits J.— Ann. of Math., 1973, v. 97, N 3, p. 499.
4. Платонов В. П., Милованов М. В.— Докл. АН СССР, 1973, т. 209, № 1, с. 43.
5. Harder G.— Arch. Math., 1969, v. 19, N 5, p. 465.

Поступила в редакцию
01.11.82.

Кафедра высшей алгебры