

1. Burov L. I.— Univ. Helsinki, preprint № HU-TFT-82-21, 1982.
2. Wieman C., Hänsch T. W.— Phys. Rev. Lett., 1976, v. 36, p. 1170.
3. Румянцева Н. К., Смирнов В. С., Тумайкин А. М.— Опт. и спектр., 1979, т. 46, с. 139.

Поступила в редакцию
30 05 83.

Кафедра общей физики

УДК 512.8

А. А. ШАРОМЕТ

ОБ АБСТРАКТНЫХ ИЗОМОРФИЗМАХ РАЗРЕШИМЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП

В работе изучается природа абстрактного изоморфизма групп k -точек связанных разрешимых алгебраических групп, при условии, что его ограничение на унипотентную часть группы индуцировано бирациональным отображением. Доказываются два результата, анонсированные автором в [1]. Мы используем обозначения, принятые в [2].

Теорема 1. Пусть G и H — разрешимые связанные k -группы, центры которых конечны и не содержат унипотентных элементов и $\overline{G(k)} = G$. Пусть $\varphi: G(k) \rightarrow H(k)$ изоморфизм такой, что $\varphi|_{G_u(k)}$ — бирациональное отображение.

Тогда найдутся группа F и изогении $\pi_1: F \rightarrow G$ и $\pi_2: F \rightarrow H$, определенные над k , такие, что $\varphi(\pi_1(f)) = \pi_2(f)\Theta(f)$ для всех $f \in F(k)$, где $\Theta: F(k) \rightarrow Z(H(k))$ — подходящий гомоморфизм.

Доказательство. Группа H действует на своей унипотентной части H_u внутренними автоморфизмами, обозначим $\gamma: H \times H_u \rightarrow H_u: (h, u) \rightarrow h^{-1}uh$. Таким образом, каждому $h \in H$ ставится в соответствие автоморфизм группы H_u , коморфизм которого мы обозначим γ_h . Если $f \in \Omega[H_u]$, то $\gamma_h(f) = f \text{Int } h$. В алгебре регулярных на H_u функций найдется конечномерное пространство V , определенное над k , которое содержит образующие алгебры $k[H_u]$ и инвариантно относительно действия группы H [2]. Отображение $h \rightarrow \gamma_h$ индуцирует линейное представление группы H в пространстве V , которое мы обозначим через ψ' . Нетрудно видеть, что ψ' определено над k .

Функции из $\Omega[H_u]$ разделяют элементы H_u , и их значения на элементах из H_u определяются значениями на них элементов k -базиса пространства $V = v_1, \dots, v_n$, ибо $\Omega[H_u] = \Omega[v_1, \dots, v_n]$. Значит, ядром ψ' является $Z_H(H_u)$.

Пусть $\varphi: G_u \rightarrow H_u$ такой бирациональный изоморфизм, что $\varphi(u) = \varphi(u) \forall u \in G_u(k)$, а φ_0 — его коморфизм. Из условия теоремы следует, что $\overline{G_u(k)} = G_u$, значит, φ определен над k и элементы $\varphi_0(v_1), \dots, \varphi_0(v_n)$ порождают алгебру $k[G_u]$. Определим действие группы G на $\Omega[G_u]$, как выше мы это сделали для H и H_u , а именно: для $g \in G$ $\delta_g: f \rightarrow f \text{Int } g$, где $f \in \Omega[G_u]$. Нетрудно видеть, что пространство $\varphi_0(V)$ инвариантно относительно G и определено над k . Как и в случае группы H , имеем линейное представление, определенное над k группы G в векторном пространстве $\varphi_0(V)$, которое обозначим буквой ψ . Изоморфизм $\varphi_0: V \rightarrow \varphi_0(V)$ векторных пространств индуцирует бирациональный k -изоморфизм $\varphi^*: \text{GL}(\varphi_0(V)) \rightarrow \text{GL}(V)$. Очевидно, что $\psi'(\varphi(s)) = \varphi^*(\psi(s)) \forall s \in S(k)$.

Покажем, что для максимального k -подтора S группы G $\varphi(S(k))$ является группой k -точек некоторого максимального тора группы H , определенного над k . Пусть для $s \in S(k)$ $\varphi(s) = t, u_s$ — разложение Жордана. Тогда $u_s \in Z_H(H_u)$, ибо $\psi'(\varphi(s)) = \varphi^*(\psi(s))$ и $\varphi^*(\psi(s))$ — полупростой элемент. Кроме того, u_s централизует $\varphi(S(k))$, поскольку $\varphi(s)$ центра-

лизует $\varphi(S(k))$. Значит, $u_s \in Z(H)$, ибо $H = \overline{\varphi(S(k))H_u}$. Теперь из условия теоремы следует, что $u_s = e$, и $\varphi(S(k))$ состоит из полупростых элементов. Отсюда легко следует, что $\varphi(S(k)) = S'(k)$, где $S' \subset H$ — максимальный подтор, определенный над k .

Представления ψ и ψ' индуцируют изогении $\psi: S \rightarrow T$ и $\psi': S' \rightarrow T$, где через T обозначен k -тор $\varphi(S)$. Тогда из результатов [3] следует, что найдутся такие изогении $\pi_1: T \rightarrow S$ и $\pi_2: T \rightarrow S'$, что $\psi\pi_1 = \psi'\pi_2 = \lambda_d$, где d — наименьшее общее кратное степеней изогений ψ и ψ' , а $\lambda_d: x \rightarrow x^d$. Поскольку $t \in T(k)$, $\psi'(\varphi(\pi_1(t))) = \psi(\pi_1(t)) = \psi'(\pi_2(t))$, то $\varphi(\pi_1(t))\pi_2(t)^{-1} \in Z(H(k))$. Отождествим G_u и H_u с помощью φ и обозначим через U , а буквой F обозначим полупрямое произведение TU , где действие T на U определено с помощью изогении π_1 (или, что то же самое, с помощью π_2). Нетрудно видеть, что группа F , изогении $\pi_1: F \rightarrow G: (t, u) \rightarrow \pi_1(t)u$, $\pi_2: F \rightarrow H: (t, u) \rightarrow \pi_2(t)u$ и гомоморфизм $\Theta: F(k) \rightarrow Z(H(k)): (t, u) \rightarrow \varphi(\pi_1(t))\pi_2(t)$ являются искомыми.

З а м е ч а н и е. В случае, когда характеристика поля k равна нулю вместо алгебры Хопфа $\Omega[G_u]$ можно использовать алгебру Ли группы G_u , как это сделано в подобной ситуации в [4].

В важном случае, когда поле k конечнопорождено, теорему 1 можно усилить следующим образом.

Теорема 2. Пусть в условиях теоремы 1 поле k конечнопорождено.

Тогда существует k -изоморфизм $\tilde{\varphi}: G \rightarrow H$ такой, что $\tilde{\varphi}(g) = \varphi(g)\Theta(g) \forall g \in G(k)$, где $\Theta: G(k) \rightarrow Z(H(k))$ — подходящий гомоморфизм.

Доказательство теоремы 2 разобьем на две леммы.

Лемма 1. Пусть T — расщепимый k -тор, где k — такое поле, что, если для $m, n \in \mathbb{Z}$ $k^m = k^n$, то $m = \pm n$. Пусть $\pi: T \rightarrow T$ — такая изогения, что $\pi(T(k)) = T(k)^d$. Тогда найдется единственный k -автоморфизм φ тора T такой, что $\pi\varphi = \lambda_d$.

Доказательство. Тор T можно считать диагональным. Воспользуемся тем, что категория торов, расщепимых над k , контравариантно эквивалентна категории свободных конечнопорожденных Z -модулей, причем эквивалентность эта устанавливается отображением $T \rightarrow X^*(T)$.

Изогения π индуцирует морфизм $\pi_0: X^*(T) \rightarrow X^*(T)$, который в фиксированном базисе $X^*(T)$ задается целочисленной невырожденной матрицей A . Нам достаточно найти такую матрицу $B \in GL(n, Z)$, что $AB = dE$, где E — единичная матрица. Из того, что $\pi(T(k)) = T(k)^d$ нетрудно вывести, что все коэффициенты матрицы A делятся на d .

Покажем, что $\det A = \pm d^n$. Поскольку все коэффициенты A делятся на d , то $A = (dE)A'$. Если $\det A' \neq \pm 1$, то соответствующий морфизм π' тора является собственной изогенией. Значит, найдется такой одномерный подтор S тора T , что π' индуцирует собственную изогению S на $\pi'(S)$. В силу разложимости тора S , из условия леммы следует, что $\pi'(S(k)) = (\pi'(S)(k))^m$ для некоторого целого $m > 1$. Отсюда следует, что $\pi(T(k)) \cap \pi'(S) = (\pi'(S)(k))^{md}$. Значит, $\pi(T(k)) \neq T(k)^d$. Для матрицы A , удовлетворяющей этим условиям, искомая матрица, как хорошо известно, существует, что доказывает лемму.

Лемма 2. Пусть k -конечнопорожденное поле T , T_1 и T_2 — k -торы. Пусть $\pi_1: T \rightarrow T_2$ и $\pi_2: T_1 \rightarrow T_2$ — такие k -изогении, что $\pi_1(T(k)) = \pi_2(T_1(k))$. Тогда существует единственный k -изоморфизм $\varphi: T \rightarrow T_1$ такой, что $\pi_1 = \pi_2\varphi$.

Доказательство. Существует (см. [3]) единственная k -изогения $\gamma: T_2 \rightarrow T$ такая, что $\gamma\pi_1 = \lambda_d$. Если мы найдем такой изоморфизм φ , что $\gamma\pi_1 = \gamma\pi_2\varphi$, то $\pi_1 = \pi_2\varphi$. Действительно, в противном случае отображение $g \rightarrow \pi_1(g)\pi_2(\varphi(g))^{-1}$ было бы нетривиальным морфизмом связной группы в конечную — Кег γ . Таким образом, лемму достаточно доказывать для $T_2 = T$ и $\pi_1 = \lambda_d$.

Найдется локально-компактное пополнение k_v поля k , над которым T разложим. Тогда для T и k_v верна теорема о слабой аппроксимации [5],

т. е. $T(k_v) = \overline{T(k)}^v$, где $\overline{T(k)}^v$ — замыкание $T(k)$ в топологии, индуцированной на $T(k_v)$ топологией поля k_v . Отсюда следует, что $\pi_2(T_1(k_v)) = T(k_v)^d$ и по лемме 1 найдется единственный k_v -изоморфизм φ такой, что $\pi_2\varphi = \lambda_d$. Нетрудно видеть, что φ определен над k , что завершает доказательство леммы.

Для доказательства теоремы 2 достаточно применить лемму 2 к подгруппам S , S' и T групп G и H , и к изогениям, индуцированным на S и S' гомоморфизмами φ и φ' , которые фигурировали в доказательстве теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шаромет А. А.— Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 1, с. 53.
2. Борель А. Линейные алгебраические группы.— М., 1972.
3. Vogel A., Tits J.— Ann. of Math., 1973, v. 97, N 3, p. 499.
4. Платонов В. П., Милованов М. В.— Докл. АН СССР, 1973, т. 209, № 1, с. 43.
5. Harder G.— Arch. Math., 1969, v. 19, N 5, p. 465.

Поступила в редакцию
01.11.82.

Кафедра высшей алгебры

В издательстве «Университетское»

в 1984 году выходят:

Горбачевич А. К. Квантовая механика в общей теории относительности: основные принципы и элементарные приложения.— 9 л.— Рус. яз.— 1 р. 40 к. (ориентировочно)

Излагаются основы квантовой механики в неинерциальных системах отсчета и во внешних гравитационных полях, а также ее наиболее перспективные приложения. Анализируются трудности, возникающие при квантово-механической интерпретации общековариантного уравнения Дирака и связанные с неэрмитовостью и нековариантностью оператора Гамильтона, а также указан путь их устранения. Большое внимание уделяется различным физическим приложениям и анализу конкретных квантово-механических эффектов. В частности, детально исследовано влияние релятивистских ускорений ядра и внешнего гравитационного поля на атомные спектры.

Книга рассчитана на научных работников, аспирантов, студентов, специализирующихся в области теоретической физики.

Кумахов М. А., Комаров Ф. Ф. Излучение заряженных частиц в твердых телах.— 20 л.— Рус. яз.— 3 р. 30 к. (ориентировочно)

Анализируются полученные за последнее десятилетие теоретические и экспериментальные результаты по спонтанному и вынужденному излучению каналированных в кристаллах легких релятивистских частиц, выход характеристического рентгеновского излучения, возбуждаемого ионами. Рассматривается область приложений этих излучений в промышленном производстве и научных исследованиях.

Книга рассчитана на специалистов в области радиационной физики твердого тела, ядерной и атомной физики, оптики, ионной имплантации. Может быть полезна аспирантам и студентам соответствующих специальностей вузов.

Выходит в улучшенном оформлении.

Предварительный заказ на книги можно оформить в магазине № 29 «Центральный» — опорном пункте издательства — по адресу: 220050, г. Минск, Ленинский пр., 19.