

Следствие. Старшие характеристические показатели систем (1) и (2) совпадают.

Доказательство следует из соотношения $Y(t) = X(t)S(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богданов Ю. С., Чеботарев Г. Н.— Изв. вузов СССР. Математика, 1959, № 4, с. 27.
2. Морозов В. В.— Уч. зап. Казан. ун-та, 1952, вып. 112, кн. 9, с. 17.
3. Чеботарев Г. Н.— Уч. зап. Казан. ун-та, 1956, вып. 116, кн. 1, с. 31.

Поступила в редакцию
15.12.82.

Кафедра высшей математики

УДК 517.926

ТАГБИНО ТАМБА

О ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С ЧАСТИЧНОЙ ИЗОМЕТРИЕЙ

Пусть заданы две n -мерные системы

$$\frac{dy}{dt} = Q(t)y, \quad (1)$$

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x \quad (2)$$

с непрерывными на $[a; b]$ матрицами $Q(t) = [q_{ij}(t)] = Q$ и $P(t) = [p_{ij}(t)] = P$. Матрица $P(t)$ предполагается верхней треугольной. Обозначим L_n подпространство решений системы (2) вида $x(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t), 0, \dots, 0)^T$ и $\|x\|$ — евклидова норма x ; T — символ транспонирования.

Определение. Линейные системы (1) и (2) назовем системами с частичной изометрией, если существует невырожденное непрерывно-дифференцируемое преобразование

$$y = S(t)x, \quad (3)$$

переводящее систему (1) в (2) такое, что $\|x(t)\| = \|S(t)x(t)\|$ для всех $x(t)$, принадлежащих некоторому подпространству L_m , ($0 < m < n$).

Теорема 1. Системы (1) и (2) являются дифференциальными системами с частичной изометрией тогда и только тогда, когда существует непрерывно-дифференцируемая на $[a; b]$ $n \times n$ -матрица $S(t)$, $\det S(t) \neq 0$, удовлетворяющая соотношениям:

$$P = S^{-1}(QS - \dot{S}), \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n s_{ij}^2(t) = 1, \quad \sum_{i=1}^n s_{ij}(t) s_{ik}(t) = 0, \quad (5)$$

($j \neq k$), $j, k = 1, \dots, m$, $1 < m < n$.

Доказательство. Продифференцируем (3) по t : $\frac{dy}{dt} = \dot{S}x + S \frac{dx}{dt}$.

Учитывая (1) и (2), получаем $Qy = \dot{S}x + SPx$ или $QSx = \dot{S}x + SPx$. Отсюда следует равенство (4).

Запишем преобразование (3) в координатном виде:

$$y_1(t) = s_{11}(t)x_1(t) + \dots + s_{1m}(t)x_m(t) + s_{1m+1}(t)x_{m+1}(t) + \dots + s_{1n}(t)x_n(t),$$

$$y_2(t) = s_{21}(t)x_1(t) + \dots + s_{2m}(t)x_m(t) + s_{2m+1}(t)x_{m+1}(t) + \dots + s_{2n}(t)x_n(t),$$

$$y_n(t) = s_{n1}(t)x_1(t) + \dots + s_{nm}(t)x_m(t) + s_{nm+1}(t)x_{m+1}(t) + \dots + s_{nn}(t)x_n(t).$$

Так как $x_{m+1}(t) = x_{m+2}(t) = \dots = x_n(t) = 0$, то

$$\|y(t)\|^2 = \sum_{i=1}^n (s_{i1}(t)x_1(t) + s_{i2}(t)x_2(t) + \dots + s_{im}(t)x_m(t))^2,$$

$$\|y(t)\|^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m s_{ij}^2(t)x_j^2(t) \right) + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j,k=1}^m s_{ij}(t)s_{ik}(t)x_j(t)x_k(t) \right) =$$

($j \neq k$)

$$= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n s_{ij}^2(t) \right) x_j^2(t) + \sum_{j,k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n s_{ij}(t) s_{ik}(t) \right) x_j(t) x_k(t).$$

Следовательно, $\|y(t)\| = \sqrt{\sum_{j=1}^m x_j^2(t)}$ при $\forall x_j \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n s_{ij}^2(t) = 1$ и

$$\sum_{i=1}^n s_{ij}(t) s_{ik}(t) = 0, \quad j \neq k, \quad j, k = 1, \dots, m, \quad 1 < m < n.$$

Обратно, если $P = S^{-1}(QS - S)$ и выполняются соотношения (5), то существует преобразование $y = S(t)x$, приводящее систему (1) к системе (2), такое, что $\|y(t)\| = \|x(t)\| = \sqrt{x_1^2(t) + \dots + x_m^2(t)}$, а $x_{m+1}(t) = \dots = x_n(t) = 0$.

З а м е ч а н и е. Если $m=1$, то легко установить, что преобразование $y = S(t)x$, приводящее систему (1) к системе (2), такое, что $\|y(t)\| = \|x(t)\| = |x_1(t)|$ при $x_2(t) = \dots = x_n(t) = 0$ характеризуется соотношением $\sum_{i=1}^n s_{i1}^2(t) = 1$.

Допустим теперь, что $n=2$ и $m=1$, тогда в силу теоремы 1 в качестве матрицы $S(t)$ можно взять, например, матрицу вида $S(t) = \begin{pmatrix} \sin \omega(t) & \alpha(t) \\ -\cos \omega(t) & \beta(t) \end{pmatrix}$, где $\omega(t)$, $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ — непрерывно-дифференцируемые функции; $\Delta = \det S(t) = \beta(t) \sin \omega(t) + \alpha(t) \cos \omega(t) \neq 0$ на $[a; b]$. Легко установить справедливость следующих теорем.

Теорема 2. Преобразование $y = S(t)x$ приводит систему (1) к системе вида (2), если: $q_{11}(t) = q_{22}(t)$, $q_{21}(t) = -q_{12}(t) = \dot{\omega}(t)$, где $\dot{\omega}(t) = \frac{d\omega(t)}{dt}$.

Теорема доказывается по методу, указанному в [1], (см. также [2]).

Теорема 3. Преобразование $y = S(t)x$ приводит систему (1) к системе (2) тогда и только тогда, когда $p_{11}(t) = q_{11}(t) = q_{22}(t)$, $q_{21}(t) = -q_{12}(t) = \dot{\omega}(t)$, $p_{22}(t) = p_{11}(t) - \frac{\dot{\Delta}}{\Delta}$, $p_{12}(t) = \frac{\alpha(t)\beta(t) - \beta(t)\alpha(t) + (\alpha^2(t) + \beta^2(t))q_{12}(t)}{\Delta}$, где $\dot{\omega}(t) = \frac{d\omega(t)}{dt}$, $\dot{\alpha}(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt}$, $\dot{\Delta} = \frac{d\Delta}{dt}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю а б о в М. Р. Треугольные преобразования. — Труды Ташкентского с.-х. ин-та, 1964, вып. 16, с. 377.
2. Сы р о н д Ю. Б. — Дифференц. уравнения, 1974, т. 10, № 2, с. 265.

Поступила в редакцию
29.12.82.

Кафедра высшей математики ФПМ

УДК 535.5 : 539.194

Л. И. БУРОВ, И. Н. ГОНЧЕРЕНОК

ЭФФЕКТЫ НАВЕДЕННОЙ ГИРОТРОПИИ В РАСТВОРАХ СЛОЖНЫХ МОЛЕКУЛ

Эффекты наведенной сильным световым полем гиротропии пробного потока широко исследуются теоретически и обнаружены экспериментально практически для всех классов объектов, за исключением сложных молекул. Возможно, это связано с тем обстоятельством, что, согласно расчетам [1], в рамках наиболее распространенной схемы эксперимента (циркулярная поляризация сильного поля [2]) анизотропия в таких средах вообще не создается. Однако расчеты [1] строились на основе обобщенной двух-уровневой схемы, которая широко применяется в молекулярной спектроскопии. В то же время именно учет пространственного