4. а) $(j,\ p)+(m,\ p)=2$ и $(i,\ p)+(s,\ p)=0$ или $(j,\ p)+(m,\ p)=0$ и $(i,\ p)+(s,\ p)=2$.

Вместо каждой тройки типа (0, 0, 0) появляется тройка типа (1, 1, 1).

б) $(m,\ p)+(i,\ p)=2$ и $(j,\ p)+(s,\ p)=0$ или $(m,\ p)+(i,\ p)=0$ и $(j,\ p)+(s,\ p)=2$ (см. 1.б).

Все возможности исчерпаны и мы показали, что общее число троек типов (0, 0, 0) и (1, 1, 1), а следовательно, 3-циклов в графах G_1 и $\bar{G}_1$, не меняется в результате переключения в графе G_1.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fulkerson P. R., Hoffman A. J., McAndrew M. H.— Canad. J. Math., 1965, v. 17, p. 166.

Поступила в редакцию 10.11.82.

Кафедра математического обеспечения АСУ

УДК 517.926.45

Т. Л. СУРИН

СКАЛЯРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИСТЕМ ЛАППО—ДАНИЛЕВСКОГО

Рассмотрим системы линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=P(t)x, \tag{1}$$

$$\dot{y}=\varphi(t)\ \ P(t)y, \tag{2}$$

где $\varphi(t)$ — непрерывная функция; $P(t)$ — матрица, элементами которой являются непрерывные функции; $\|P(t)\|\leqslant K$; x и y — векторы. Пусть (1) является системой Лаппо — Данилевского [1], т. е.

$$P(t)\cdot\int_0^t P(\tau)\,d(\tau)=\int_0^t P(\tau)\,d(\tau)\cdot P(t). \tag{3}$$

Для выполнения (3) достаточно, чтобы матрица $P(t)$ была функционально-коммутативной, т. е. чтобы ее значения при любых значениях аргумента из области определения матрицы коммутировали между собой:

$$P(t_1)\cdot P(t_2)=P(t_2)\cdot P(t_1). \tag{4}$$

В работе [2] показано, что для функциональной коммутативности матрицы $P(t)$ необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в форме

$$P(t)=\sum_{i=1}^{m} A_i\psi_i(t), \tag{5}$$

где $\psi_i(t)$ $(i=1,\ \ldots,\ m)$ — линейно-независимые функции, а A_1, A_2, ..., A_m — линейно-независимые, попарно-коммутативные постоянные матрицы.

Целью настоящей работы является изучение систем (2) при выполнении (3).

Пусть $P(t)$ — функционально-коммутативная матрица; $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, ..., $\xi_k(t)$ — собственные значения матрицы $P(t)$; n_1, n_2, ..., n_k — кратности собственных значений. В этом случае $P(t)$ можно постоянным преобразованием привести к блочно-треугольной форме [3]:

$$P_1(t)=\begin{pmatrix} C_1(t) & & \\ & \ddots & \\ & & C_k(t) \end{pmatrix} \tag{6}$$

и каждый блок имеет единственное собственное значение $\xi_j(t)$. Пусть $l=\sum\limits_{p=1}^{j-1} n_p+1$, $\xi_r=\xi_j$ при $r=l,\ \ldots,\ l+n_j-1$, тогда $\xi_r(t)=\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_{i_r}\psi_i(t)$, где $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_m}$ — собственные значения постоянной матрицы A_i. Пусть $\lambda_r^{(1)}$ $(r = 1, \ldots, n)$ — показатели Ляпунова системы (1), а $\lambda_r^{(2)}$ $(r = 1, \ldots, n)$ — показатели Ляпунова системы (2), $P(t)$ — функционально-коммутативная матрица.

Теорема 1. Если $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = k$, то $\lambda_r^{(2)} = \lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t)\cdot\lambda_r^{(1)}$.

Доказательство. Приведем системы (1) и (2) с помощью постоянной матрицы к блочно-треугольной форме. Тогда характеристический показатель r-го решения системы (1) можно представить в виде

$$\lambda_r^{(1)} = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \operatorname{Re} \int_0^t \xi_j(\tau)\, d\tau.$$

Аналогично для системы (2) имеем: $\lambda_r^{(2)} = \overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \operatorname{Re} \int_0^t \varphi(\tau)\, \xi_j(\tau)\, d\tau$.

Выразив $\lambda_r^{(2)}$ через $\lambda_r^{(1)}$ и используя условие теоремы, получим

$$\lambda_r^{(2)} = \lim_{t\to\infty} \varphi(t)\cdot\lambda_r^{(1)}. \tag{7}$$

Замечание. Зная показатели Ляпунова систем (1) и (2), легко решить вопрос о правильности системы (2), если правильна система (1). Очевидно, что, если система (1) правильна и выполнено условие теоремы, то система (2) тоже правильна.

Пусть выполнено (3), но $P(t)$ не функционально-коммутативна. Тогда система (2), в общем случае, не будет системой Лаппо — Данилевского. Следовательно, выразить характеристические показатели системы (2) через характеристические показатели системы (1) в таком простом виде, как (7), не удается.

Можно показать, что для старшего характеристического показателя системы (2) справедлива оценка

$$\lambda_n^{(2)} \leqslant \lim_{t\to\infty} \varphi(t)\, \lambda_n^{(1)}. \tag{8}$$

Теорема 2. Пусть: 1) даны системы (1) и (2) и выполнено условие (3); 2) $\lim \varphi(t) = k$, тогда $\lambda_n^{(2)} \leqslant \lim \varphi(t)\, \lambda_n^{(1)}$.

Доказательство. Записав (2) в виде $\dot y(t) = kP(t)y + (\varphi(t)-k)P(t)y$, решение $y(t)$ можем представить $y(t) = \exp\left(k\int_{t_0}^t P(\tau)d(\tau)\right)y_0 + \int_{t_0}^t \exp\left(k\int_\tau^t P(\tau)\, d(\tau)\right)(\varphi(\tau)-k)\, P(\tau)\, y(\tau)\, d(\tau)$. Оценив $\|y(t)\|$, пользуясь леммой Гроиуолла — Беллмана, и найдя характеристические показатели, убеждаемся, что верно (8).

Пусть $X(\tau) = \exp\int_0^t P(\tau)\, d(\tau)$ — фундаментальная матрица решений системы (1), $Y(t)$ фундаментальная матрица решений системы (2). Докажем, что $Y(t)$ можно выразить через $X(t)$ и обобщенную матрицу Ляпунова.

Теорема 3. Если $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = 1$, то $Y(t) = X(t)\, S(t)$, где $S(t)$ — обобщенная матрица Ляпунова.

Доказательство. Найдем решение системы (2) в матричном виде $Y(t) = X(t)\, Y_0 + X(t)\int_0^t X^{-1}(\tau)\,(\varphi(\tau)-1)\, P(\tau)\, Y(\tau)\, d(\tau)$. Обозначим $X^{-1}(t)\, Y(t) = S(t)$, тогда $S(t) = Y_0 + \int_0^t (\varphi(\tau)-1)\, P(\tau)\, S(\tau)\, d(\tau)$. Легко показать, что $S(t)$ — обобщенная матрица Ляпунова. Следовательно, $Y(t) = X(t)\, S(t)$.

Следствие. Старшие характеристические показатели систем (1) и (2) совпадают.

Доказательство следует из соотношения $Y(t)=X(t)S(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богданов Ю. С., Чеботарев Г. Н.— Изв. вузов СССР. Математика, 1959, № 4, с. 27.
2. Морозов В. В.— Уч. зап. Казан. ун-та, 1952, вып. 112, кн. 9, с. 17.
3. Чеботарев Г. Н.— Уч. зап. Казан. ун-та, 1956, вып. 116, кн. 4, с. 31.

Поступила в редакцию 15.12.82.

Кафедра высшей математики

УДК 517.926

ТАГБИНО ТАМБА

О ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С ЧАСТИЧНОЙ ИЗОМЕТРИЕЙ

Пусть заданы две n-мерные системы

$$\frac{dy}{dt}=Q(t)\,y, \tag{1}$$

$$\frac{dx}{dt}=P(t)\,x \tag{2}$$

с непрерывными на $[a;\ b]$ матрицами $Q(t)=[q_{ij}(t)]=Q$ и $P(t)=[p_{ij}(t)]=P$. Матрица $P(t)$ предполагается верхней треугольной. Обозначим L_n подпространство решений системы (2) вида $x(t)=(x_1(t),\ \ldots,\ x_m(t),\ 0,\ \ldots,\ 0)^T$ и $\|x\|$ — евклидова норма x; T — символ транспонирования.

Определение. Линейные системы (1) и (2) назовем системами с частичной изометрией, если существует невырожденное непрерывно-дифференцируемое преобразование

$$y=S(t)x, \tag{3}$$

переводящее систему (1) в (2) такое, что $\|x(t)\|=\|S(t)x(t)\|$ для всех $x(t)$, принадлежащих некоторому подпространству L_m, $(0<m<n)$.

Теорема 1. Системы (1) и (2) являются дифференциальными системами с частичной изометрией тогда и только тогда, когда существует непрерывно-дифференцируемая на $[a;\ b]$ $n\times n$-матрица $S(t)$, $\det S(t)\neq 0$, удовлетворяющая соотношениям:

$$P=S^{-1}(QS-\dot S), \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} s_{ij}^2(t)=1,\quad \sum_{i=1}^{n} s_{ij}(t)\,s_{ik}(t)=0, \tag{5}$$

$(j\neq k)$, $j,\ k=1,$ ----, $m,\ 1<m<n$.

Доказательство. Продифференцируем (3) по t: $\frac{dy}{dt}=\dot Sx+S\frac{dx}{dt}$. Учитывая (1) и (2), получаем $Qy=\dot Sx+SPx$ или $QSx=\dot Sx+SPx$. Отсюда следует равенство (4).

Запишем преобразование (3) в координатном виде:

$$y_1(t)=s_{11}(t)x_1(t)+\ldots+s_{1m}(t)x_m(t)+s_{1m+1}(t)x_{m+1}(t)+\ldots+s_{1n}(t)x_n(t),$$
$$y_2(t)=s_{21}(t)x_1(t)+\ldots+s_{2m}(t)x_m(t)+s_{2m+1}(t)x_{m+1}(t)+\ldots+s_{2n}(t)x_n(t),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n(t)=s_{n1}(t)x_1(t)+\ldots+s_{nm}(t)x_m(t)+s_{nm+1}(t)x_{m+1}(t)+\ldots+s_{nn}(t)x_n(t).$$

Так как $x_{m+1}(t)=x_{m+2}(t)=\ldots=x_n(t)=0$, то

$$\|y(t)\|^2=\sum_{i=1}^{n}(s_{i1}(t)x_1(t)+s_{i2}(t)x_2(t)+\ \ldots\ +s_{im}(t)x_m(t))^2,$$

$$\|y(t)\|^2=\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{m}s_{ij}^2(t)\,x_j^2(t)\Big)+\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{\substack{j,k=1\\(j\neq k)}}^{m}s_{ij}(t)\,s_{ik}(t)\,x_j(t)\,x_k(t)\Big)=$$