

УДК 519.1

Н. Н. БУСНЮК

О ЧИСЛЕ 3-ЦИКЛОВ В ГРАФАХ С ДАННЫМИ СТЕПЕНЯМИ ВЕРШИН

На практике часто возникают экстремальные задачи, связанные с циклами фиксированной длины k в некотором графе. В частности, в биохимии в связи с синтезом молекулы белка возникла задача отыскания графов с данными степенями вершин и максимальным числом 3-циклов (циклов длины 3).

В заметке доказывается следующая

Теорема. Пусть $D(d_1, d_2, \dots, d_n)$ есть класс графов со степенями вершин $d_1, d_2, \dots, d_n$; T_G — число 3-циклов в графе G . Тогда для любых двух графов $G_1, G_2 \in D(d_1, d_2, \dots, d_n)$ справедливо равенство $T_{G_1} + T_{\bar{G}_1} = T_{G_2} + T_{\bar{G}_2}$, где $\bar{G}_1, \bar{G}_2$ — графы, дополнительные к графам G_1, G_2 соответственно.

Доказательство. Пусть $G_1(V_1, E_1), G_2(V_2, E_2) \in D(d_1, d_2, \dots, d_n)$; E_1, E_2 — множества ребер графов G_1, G_2 ; V_1, V_2 — множества вершин графов G_1, G_2 ; $V_1 = V_2$. Всюду в дальнейшем будем считать, что вершины графа пронумерованы числами от 1 до n , и неодинаковые буквенные обозначения вершин в одном выражении соответствуют различным вершинам. Поставим в соответствие каждому ребру $(i, j) \in E_1$ число 1, каждому ребру $(i, j) \notin E_1$ число 0 и в соответствии с этим каждому 3-циклу $(i, j), (j, k), (k, i)$ — тройку из чисел 0 и 1. Тройки могут быть четырех типов: $(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)$. Каждая тройка типа $(1, 1, 1)$ соответствует 3-циклу в графе G_1 , а каждая тройка типа $(0, 0, 0)$ соответствует 3-циклу в графе $\bar{G}_1$.

Назовем переключением в графе G_1 замену пары ребер $(j, m), (i, s) \in E_1$ на пару ребер $(j, s), (i, m) \notin E_1$. Известно [1], что из графа G_1 можно получить граф G_2 применением конечного числа переключений. Покажем, что переключение в графе G_1 не изменяет величины $T_{G_1} + T_{\bar{G}_1}$.

В результате переключения в графе G_1 тройки $((j, m), (m, s), (s, j)), ((j, m), (m, i), (i, j)), ((i, s), (s, j), (j, i)), ((i, s), (s, m), (m, i))$ типов $(0, 1, 1)$ и $(0, 0, 1)$ не преобразуются к двум другим типам. В тройках вида $((i, s), (s, p), (p, i)), ((j, m), (m, p), (p, j)), ((i, m), (m, p), (p, i)), ((j, s), (s, p), (p, j))$, где $p \neq i, j, m, s$, 1 заменяется на 0, и в таком же числе троек 0 заменяется на 1. Рассмотрим всевозможные типы троек в зависимости от вершины p .

1. а) $(i, p) + (j, p) + (m, p) + (s, p) = 0$. Каждая тройка типа $(0, 0, 0)$ преобразуется в тройку типа $(0, 0, 1)$ и наоборот. Общее количество троек типа $(0, 0, 0)$ не меняется, а тройки типа $(1, 1, 1)$ не участвуют в преобразовании.

б) $(i, p) + (j, p) + (m, p) + (s, p) = 4$. Здесь как и далее во всех случаях б) происходит то же, что и в соответствующих случаях а) с точностью до переобозначений нуля единицей и наоборот.

2. а) $(i, p) + (j, p) + (m, p) + (s, p) = 1$. Осуществляются следующие преобразования троек: $(0, 0, 1) \rightleftharpoons (0, 1, 1), (0, 0, 0) \rightleftharpoons (0, 0, 1)$. Количество троек типа $(0, 0, 0)$ сохраняется, а тройки типа $(1, 1, 1)$ не участвуют в преобразовании.

б) $(j, p) + (i, p) + (m, p) + (s, p) = 3$ (см. 1.6)

3. $(j, p) + (m, p) = 1, (m, p) + (i, p) = 1, (i, p) + (s, p) = 1, (s, p) + (j, p) = 1$. Тройки типа $(0, 0, 1)$ и $(0, 1, 1)$ преобразуются друг в друга.

4. а) $(j, p) + (m, p) = 2$ и $(i, p) + (s, p) = 0$ или $(j, p) + (m, p) = 0$ и $(i, p) + (s, p) = 2$.

Вместо каждой тройки типа $(0, 0, 0)$ появляется тройка типа $(1, 1, 1)$.

б) $(m, p) + (i, p) = 2$ и $(j, p) + (s, p) = 0$ или $(m, p) + (i, p) = 0$ и $(j, p) + (s, p) = 2$ (см. 1.6).

Все возможности исчерпаны и мы показали, что общее число троек типов $(0, 0, 0)$ и $(1, 1, 1)$, а следовательно, 3-циклов в графах G_1 и G_1 , не меняется в результате переключения в графе G_1 .

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fulkerson P. R., Hoffman A. J., McAndrew M. H. — Canad. J. Math., 1965, v. 17, p. 166.

Поступила в редакцию
10.11.82.

Кафедра математического обеспечения АСУ

УДК 517.926.45

Т. Л. СУРИН

СКАЛЯРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИСТЕМ ЛАППО—ДАНИЛЕВСКОГО

Рассмотрим системы линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = P(t)x, \quad (1)$$

$$\dot{y} = \varphi(t) \cdot P(t)y, \quad (2)$$

где $\varphi(t)$ — непрерывная функция; $P(t)$ — матрица, элементами которой являются непрерывные функции; $\|P(t)\| \leq K$; x и y — векторы. Пусть (1) является системой Лаппо — Данилевского [1], т. е.

$$P(t) \cdot \int_0^t P(\tau) d\tau = \int_0^t P(\tau) d\tau \cdot P(t). \quad (3)$$

Для выполнения (3) достаточно, чтобы матрица $P(t)$ была функционально-коммутативной, т. е. чтобы ее значения при любых значениях аргумента из области определения матрицы коммутировали между собой:

$$P(t_1) \cdot P(t_2) = P(t_2) \cdot P(t_1). \quad (4)$$

В работе [2] показано, что для функциональной коммутативности матрицы $P(t)$ необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в форме

$$P(t) = \sum_{i=1}^m A_i \psi_i(t), \quad (5)$$

где $\psi_i(t)$ ($i=1, \dots, m$) — линейно-независимые функции, а $A_1, A_2, \dots, A_m$ — линейно-независимые, попарно-коммутативные постоянные матрицы.

Целью настоящей работы является изучение систем (2) при выполнении (3).

Пусть $P(t)$ — функционально-коммутативная матрица; $\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_k(t)$ — собственные значения матрицы $P(t)$; $n_1, n_2, \dots, n_k$ — кратности собственных значений. В этом случае $P(t)$ можно постоянным преобразованием привести к блочно-треугольной форме [3]:

$$P_1(t) = \begin{pmatrix} C_1(t) & & \\ & \ddots & \\ & & C_k(t) \end{pmatrix} \quad (6)$$

и каждый блок имеет единственное собственное значение $\xi_j(t)$. Пусть $l = \sum_{p=1}^{j-1} n_p + 1$, $\xi_r = \xi_j$ при $r = l, \dots, l + n_j - 1$, тогда $\xi_r(t) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ri} \psi_i(t)$,