

водит к образованию при достаточно низких температурах ферромагнитных примесных кластеров (ФПК). В температурном интервале между максимумами магнитосопротивления реализуется магнитное состояние, для которого ферромагнитное взаимодействие типа «двойного обмена» сосредоточено только внутри ФПК, а основная матрица парамагнитна.

Аналогично можно объяснить наличие двух максимумов на температурной зависимости магнитосопротивления $La_{1-x}Ca_xMnO_3$ в интервале 10—20 % ионов Mn^{4+} (рис. 2, II область). Здесь примесными центрами, возле которых локализуются ионы Mn^{4+} и образуются ФПК, являются ионы Ca^{2+} .

Образцы из первой концентрационной области (0—10 % Mn^{4+}) (см. рис. 2) — антиферромагнетики с точкой Нееля 100 К. Максимум на их температурной зависимости магнитосопротивления в районе 300 К указывает на то, что ФПК образуются уже при этих концентрациях ионов Mn^{4+} . Реализуется магнитное состояние, когда при температурах ниже точки Нееля в антиферромагнитной матрице находятся ФПК. Их концентрация мала, однако они обуславливают наличие в этих образцах слабого ферромагнетизма. Второй максимум на температурной зависимости магнитосопротивления при температуре 150 К (рис. 2, II область) появляется, когда имеет место, в результате изменения кристаллической структуры и появления динамического эффекта Яна-Теллера, изотропное ферромагнитное взаимодействие между ионами Mn^{3+} [2]. В данном концентрационном интервале магнитное состояние аналогично магнитному состоянию ферромагнитного нестехиометрического манганита лантана [5]. В температурной области между максимумами в парамагнитной матрице находятся не взаимодействующие между собой ФПК. Когда их концентрация становится достаточной для того, чтобы они начали взаимодействовать (20 % Mn^{4+} , рис. 2, III область), ферромагнитное взаимодействие типа «двойного обмена» распространяется на весь кристалл в целом. Накладываясь на изотропное взаимодействие, оно образует суммарное косвенное ферромагнитное взаимодействие с температурой Кюри 300 К, что и отражает наличие одного максимума на температурной зависимости магнитосопротивления для образцов из этого концентрационного интервала.

1. Jonker G. H., Van Santen J. H.— *Physica*, 1950, v. 16, № 3, p. 337.
2. Гудинна Ф. Дж., Уолд А., Арнот Р., Менюк Н.— В кн.: Теория ферромагнетизма металлов и сплавов / Под ред. С. В. Вонсовского. М., 1963, с. 161.
3. Нагаев Э. Л. Физика магнитных полупроводников.— М., 1979.
4. Метфессель З., Маттис Д. Магнитные полупроводники.— М., 1972.
5. Павлов В. И., Богущ А. К., Лашков Е. С., Балыко Л. В.— *ФТТ*, 1982, т. 24, № 1, с. 270.

Поступила в редакцию
12 02 82.

МГПИ имени А. М. Горького

УДК 517.926.4

С. А. МАЗАНИК

О НЕКОТОРЫХ ИНВАРИАНТАХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

1. Обозначим через L группу матриц Ляпунова (см. [1]), через L_1 — группу постоянных невырожденных матриц. Рассмотрим две линейные дифференциальные системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (1), \quad \frac{dy}{dt} = B(t)y, \quad (2)$$

где $A(t)$ и $B(t)$ — матрицы размерности $n \times n$, элементами которых являются локально-интегрируемые на $[0 + \infty[$ функции.

Положим $\Delta_{AH} = \{C | C \in L_1, X_H C X_H^{-1} \in L, X_H(0) = H, H \in L_1\}$. $\Delta_{BH} = \{C | C \in L_1, Y_H C Y_H^{-1} \in L, Y_H(0) = H, H \in L_1\}$, где X_H и Y_H — фундаментальные матрицы решений систем (1) и (2) соответственно.

Множества $\Delta_A = \bigcup_{H \in L_1} \Delta_{AH}$ и $\Delta_B = \bigcup_{H \in L_1} \Delta_{BH}$ назовем характеристическими множествами систем (1) и (2) соответственно.

Теорема 1. Характеристическое множество матриц Δ_A системы (1) является асимптотическим инвариантом [2] этой системы.

Доказательство. Пусть система (1) асимптотически эквивалентна [1] системе (2), а C — любая матрица из Δ_A , тогда $C \in \Delta_{AH}$ для некоторого $H \in L_1$. Следовательно, существует такая фундаментальная матрица X решений системы (1), что $X(0) = H$ и $XCX^{-1} \in L$. Так как системы (1) и (2) асимптотически эквивалентны, существует такая матрица $S \in L$, что $Y = SX$ — фундаментальная матрица решений системы (2), поэтому $YCY^{-1} = SXCX^{-1}S^{-1}$, а поскольку $S^{-1} \in L$, то и $YCY^{-1} \in L$, т. е. $C \in \Delta_B$.

Аналогично можно показать, что и любая матрица из Δ_B принадлежит Δ_A . Таким образом, характеристические множества матриц Δ_A и Δ_B совпадают, значит, Δ_A является асимптотическим инвариантом системы (1). Теорема доказана.

2. Системы (1) и (2) назовем *ОЕ-эквивалентными*, если из соотношения $x(0) = y(0)$ следует, что $(x(t), x(t)) = (y(t), y(t))$ при всех $t \in [0, +\infty[$ (x и y — решения систем (1) и (2) соответственно, $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в пространстве R^n).

Теорема 2. Для того чтобы системы (1) и (2) были *ОЕ-эквивалентны*, необходимо и достаточно, чтобы $XY^{-1} = S$, где S — ортогональная матрица, $S \in L$, $S(0) = E$, E — единичная матрица, X и Y — нормированные в нуле фундаментальные матрицы решений систем (1) и (2) соответственно.

Доказательство теоремы следует из того факта, что если для любых $u \in R^n$ выполняется соотношение $(u, Ku) = 0$, то K — кососимметрическая матрица.

Замечание 1. Непосредственно из теоремы Перрона о триангуляции (см., например, [3, с. 178]) следует, что среди систем (2) *ОЕ-эквивалентных* системе (1) всегда существует треугольная система.

Теорема 3. Две треугольные (верхние) линейные дифференциальные системы *ОЕ-эквивалентны* тогда и только тогда, когда их матрицы коэффициентов равны почти всюду.

Доказательство. Пусть (1) и (2) — треугольные линейные дифференциальные *ОЕ-эквивалентные* системы. Тогда их нормированные в нуле фундаментальные матрицы решений X и Y также являются треугольными и, в силу теоремы 2, удовлетворяют соотношению: $XY^{-1} = S$, где S — ортогональная матрица. Очевидно, что это возможно лишь в том случае, когда $S = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, где $a_i \in \{-1, 1\}$, $i = \overline{1, n}$. Так как $S(0) = E$, то и при всех $t \in [0, +\infty[$ имеем $S(t) = E$. Следовательно, $X = Y$, т. е. матрицы систем (1) и (2) равны почти всюду. *Необходимость* доказана. *Доказательство достаточности* условия теоремы очевидно. Из теоремы 3 и замечания 1 следует

Теорема 4. Совокупность коэффициентов треугольных систем является полной независимой системой инвариантов (см. [2]) линейных дифференциальных *ОЕ-эквивалентных* систем.

Замечание 2. Утверждение, аналогичное теореме 4, имеет место и для сферически совместных систем [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Богданов Ю. С. — Дифференц. уравнения, 1965, т. 1, № 6, с. 707.
2. Богданов Ю. С. — В кн.: Труды 4-го Всесоюзного математического съезда, 1961. Л., 1964, т. 2, с. 424.

УДК 519.1

Н. Н. БУСНЮК

О ЧИСЛЕ 3-ЦИКЛОВ В ГРАФАХ С ДАННЫМИ СТЕПЕНЯМИ ВЕРШИН

На практике часто возникают экстремальные задачи, связанные с циклами фиксированной длины k в некотором графе. В частности, в биохимии в связи с синтезом молекулы белка возникла задача отыскания графов с данными степенями вершин и максимальным числом 3-циклов (циклов длины 3).

В заметке доказывается следующая

Теорема. Пусть $D(d_1, d_2, \dots, d_n)$ есть класс графов со степенями вершин $d_1, d_2, \dots, d_n$; T_G — число 3-циклов в графе G . Тогда для любых двух графов $G_1, G_2 \in D(d_1, d_2, \dots, d_n)$ справедливо равенство $T_{G_1} + T_{\bar{G}_1} = T_{G_2} + T_{\bar{G}_2}$, где $\bar{G}_1, \bar{G}_2$ — графы, дополнительные к графам G_1, G_2 соответственно.

Доказательство. Пусть $G_1(V_1, E_1), G_2(V_2, E_2) \in D(d_1, d_2, \dots, d_n)$; E_1, E_2 — множества ребер графов G_1, G_2 ; V_1, V_2 — множества вершин графов G_1, G_2 ; $V_1 = V_2$. Всюду в дальнейшем будем считать, что вершины графа пронумерованы числами от 1 до n , и неодинаковые буквенные обозначения вершин в одном выражении соответствуют различным вершинам. Поставим в соответствие каждому ребру $(i, j) \in E_1$ число 1, каждому ребру $(i, j) \notin E_1$ число 0 и в соответствии с этим каждому 3-циклу $(i, j), (j, k), (k, i)$ — тройку из чисел 0 и 1. Тройки могут быть четырех типов: $(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)$. Каждая тройка типа $(1, 1, 1)$ соответствует 3-циклу в графе G_1 , а каждая тройка типа $(0, 0, 0)$ соответствует 3-циклу в графе $\bar{G}_1$.

Назовем переключением в графе G_1 замену пары ребер $(j, m), (i, s) \in E_1$ на пару ребер $(j, s), (i, m) \notin E_1$. Известно [1], что из графа G_1 можно получить граф G_2 применением конечного числа переключений. Покажем, что переключение в графе G_1 не изменяет величины $T_{G_1} + T_{\bar{G}_1}$.

В результате переключения в графе G_1 тройки $((j, m), (m, s), (s, j)), ((j, m), (m, i), (i, j)), ((i, s), (s, j), (j, i)), ((i, s), (s, m), (m, i))$ типов $(0, 1, 1)$ и $(0, 0, 1)$ не преобразуются в другие типы. В тройках вида $((i, s), (s, p), (p, i)), ((j, m), (m, p), (p, j)), ((i, m), (m, p), (p, i)), ((j, s), (s, p), (p, j))$, где $p \neq i, j, m, s$, 1 заменяется на 0, и в таком же числе троек 0 заменяется на 1. Рассмотрим всевозможные типы троек в зависимости от вершины p .

1. а) $(i, p) + (j, p) + (m, p) + (s, p) = 0$. Каждая тройка типа $(0, 0, 0)$ преобразуется в тройку типа $(0, 0, 1)$ и наоборот. Общее количество троек типа $(0, 0, 0)$ не меняется, а тройки типа $(1, 1, 1)$ не участвуют в преобразовании.

б) $(i, p) + (j, p) + (m, p) + (s, p) = 4$. Здесь как и далее во всех случаях б) происходит то же, что и в соответствующих случаях а) с точностью до переобозначений нуля единицей и наоборот.

2. а) $(i, p) + (j, p) + (m, p) + (s, p) = 1$. Осуществляются следующие преобразования троек: $(0, 0, 1) \rightleftharpoons (0, 1, 1), (0, 0, 0) \rightleftharpoons (0, 0, 1)$. Количество троек типа $(0, 0, 0)$ сохраняется, а тройки типа $(1, 1, 1)$ не участвуют в преобразовании.

б) $(j, p) + (i, p) + (m, p) + (s, p) = 3$ (см. 1.6)

3. $(j, p) + (m, p) = 1, (m, p) + (i, p) = 1, (i, p) + (s, p) = 1, (s, p) + (j, p) = 1$. Тройки типа $(0, 0, 1)$ и $(0, 1, 1)$ преобразуются друг в друга.