УДК 517.512

Э. ДЖ. ИБРАГИМОВ, Я. В. РАДЫНО

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ НА СФЕРЕ В МЕТРИКАХ $L_{p,\lambda}(S)$ ИНТЕГРАЛАМИ ТИПА ДЖЕКСОНА

Обозначения. $L_{p,\lambda}(S)$ — пространство функций, в котором суммируемо произведение $|f(\Theta',\ \varphi')|^p[\sin^2\Theta'\sin^2(\varphi-\varphi')]^{\lambda-\frac{1}{2}}$ на единичной сфере S для всех $1\leqslant p<\infty$.

$\|f\|_{p,\lambda}\equiv\left(\iint\limits_S|f(\Theta',\varphi')|^p[\sin^2\Theta'\sin^2(\varphi-\varphi')]^{\lambda-\frac{1}{2}}d\sigma'\right)^{\frac{1}{p}}$, $\lambda>0$ — норма элемента $f\in L_{p,\lambda}(S)$; $d\sigma'=\sin\Theta'd\Theta'd\varphi'$ — элемент сферической поверхности. Обобщенное среднее значение функции f в точке $P(\Theta,\ \varphi)\in S$ определяется формулой

$$f_\gamma(\Theta,\ \varphi)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{2\pi\,\Gamma(\lambda)\sin^{2\lambda}\gamma}\int\limits_{C(p;\ \gamma)}\frac{f(\Theta',\ \varphi')\,ds'}{[\sin^2\Theta'\sin^2(\varphi-\varphi')]^{\frac{1}{2}-\lambda}},\qquad(1)$$

где $C(p;\ \gamma)$ — окружность с центром в точке $P(\Theta,\ \varphi)$ и со сферическим радиусом γ, а $ds'=\sin\Theta'd\varphi$ — элемент дуги окружности.

$$\omega_f(\delta)_{L_{p,\lambda}(S)}=\sup_{0<\gamma<\delta}\|f_\gamma-f\|_{L_{p,\lambda}(S)}\qquad(2)$$

— интегральный сферический модуль непрерывности, а

$$\Omega_f(\delta)_{L_{p,\lambda}(S)}=\sup_{0<\varkappa<\frac{\pi}{\delta}}(1+\varkappa)^{-2}\,\omega_f(\varkappa\delta)_{L_{p,\lambda}(S)}\qquad(3)$$

— обобщенный сферический интегральный модуль непрерывности. Обобщенным оператором Джексона на сфере назовем оператор

$$D_n^{[m]}(f,\ \Theta,\ \varphi)=\frac{1}{2\pi J_n^{[m]}}\iint\limits_S\frac{f(\Theta',\ \varphi')\,d_n^{[m]}(\cos\gamma)\,d\sigma'}{[\sin^2\Theta'\sin^2(\varphi-\varphi')]^{\frac{1}{2}-\lambda}},\ \lambda>0,\qquad(4)$$

$$[\cos\gamma=\cos\Theta\cos\Theta'+\sin\Theta\sin\Theta'\cos(\varphi-\varphi'),$$

где $d_n^{[m]}(\cos\gamma)\doteq\left(\sin\frac{n\gamma}{2}\right)^{2m}\left(n\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{-2m}$, а

$$J_n^{[m]}=\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^\pi d_n^{[m]}(\cos\gamma)\sin^{2\lambda}\gamma\,d\gamma,$$

m — натуральное число $\geqslant 2$.

Вопросы поточечной и равномерной сходимости операторов (4), а также порядок сходимости изучены нами в [1].

В настоящей заметке доказывается следующая

Теорема. Пусть $f\in L_{p,\lambda}(S)$, $p\geqslant 1$. Тогда для любого натурального $n\geqslant 1$ справедливо неравенство

$$\|f-D_{(f)}^{[m]}(f)\|_{L_{p,\lambda}(S)}\leqslant\frac{C_{m,\lambda,p}}{n^{2m-2\lambda-1}}\left(\sum_{\nu=1}^n\nu^{2(mp-\lambda-1)}\Omega_f^p\left(\frac{\pi}{\nu}\right)_{L_{p,\lambda}(S)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

где $C_{m,\lambda,p}=\frac{1}{\lambda}2^{3-2\lambda}\pi^{\frac{2mp+p+2\lambda+1}{2p}}\left(\frac{m}{3}\right)^{\lambda+\frac{1}{2}}\left(\frac{(1+mp2^{2mp-2\lambda-1})\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}\right)^{\frac{1}{p}}.$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $1<p<\infty$. Учитывая, что $D_n^{[m]}(1;\ \Theta,\ \varphi)\equiv 1$, получаем

$$\|f-D_n^{[m]}(f)\|_{L_{p,\lambda}(S)}=\left(\iint\limits_S\left|\frac{1}{2\pi J_n^{[m]}}\iint\limits_S\frac{f(\Theta',\ \varphi')\,d_n^{[m]}(\cos\gamma)\,d\sigma'}{[\sin^2\Theta'\sin^2(\varphi-\varphi')]^{\frac{1}{2}-\lambda}}\right)-\right.$$

$$-f(\Theta,\ \varphi)\Big|^{p}[\sin^2\Theta\sin^2(\varphi-\varphi')]^{\lambda-\frac{1}{2}}d\sigma.$$

Перенося во внутреннем интеграле полюс сферы в точку $P(\Theta,\ \varphi)$, получаем в новых сферических координатах γ и ψ

$$\|f-D_n^{[m]}(f)\|_{L_{p,\lambda}(S)}\leqslant\frac{2\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)I_n^{[m]}}\left(\iint\limits_S\frac{(A_n+B_n)\,d\sigma}{[\sin^2\Theta\sin^2(\varphi'-\varphi)]^{\frac{1}{2}-\lambda}}\right), \tag{5}$$

где $A_n=\Big|\int\limits_0^{\frac{\pi}{n+1}}(f_1(\Theta,\ \varphi)-f(\Theta,\ \varphi))d_n^{[m]}(\cos\gamma)\sin^{2\lambda}\gamma d\gamma\Big|^p$, $B_n=\Big|\int\limits_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}(f_1(\Theta,\ \varphi)-$ $-f(\Theta,\ \varphi))\,d_n^{[m]}(\cos\gamma)\sin^{2\lambda}\gamma\,d\gamma\Big|^p$. Оценим интеграл A_n. Применяя неравенство Гёльдера, получим

$$A_n\leqslant\int\limits_0^{\frac{\pi}{n+1}}|f_1(\Theta,\ \varphi)-f(\Theta,\ \varphi)|^p|d_n^{[m]}(\cos\gamma)|^p\sin^{2\lambda}\gamma\,d\gamma\cdot\Big(\int\limits_0^{\frac{\pi}{n+1}}\sin^{2\lambda}\gamma d\gamma\Big)^{p-1}\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^{\frac{\pi}{n+1}}|f_1(\Theta,\ \varphi)-f(\Theta,\ \varphi)|^p|d_n^{[m]}(\cos\gamma)|^p\sin^{2\lambda}\gamma d\gamma\cdot\Big(\int\limits_0^{\pi}\sin^{2\lambda}\gamma d\gamma\Big)^{p-1}=$$

$$=\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda+1)}\right)^{p-1}\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{n+1}}|f_1(\Theta,\ \varphi)-f(\Theta,\ \varphi)|^p|d_n^{[m]}(\cos\gamma)|^p\sin^{2\lambda}\gamma d\gamma. \tag{6}$$

Обозначим $F(t)=\int\limits_0^t|f_1(\Theta,\ \varphi)-f(\Theta,\ \varphi)|^p\sin^{2\lambda}\gamma\,d\gamma$. В силу неравенства $|\sin n\gamma|\leqslant n|\sin\gamma|$ получим

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{n+1}}|f_1(\Theta,\ \varphi)-f(\Theta,\ \varphi)|^p\cdot\left(\frac{\sin\frac{n\gamma}{2}}{n\sin\frac{\gamma}{2}}\right)^{2pm}\sin^{2\lambda}\gamma d\gamma\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^{\frac{\pi}{n+1}}|f_1(\Theta,\ \varphi)-f(\Theta,\ \varphi)|^p\sin^{2\lambda}\gamma d\gamma=F\left(\frac{\pi}{n+1}\right). \tag{7}$$

Учитывая (7) в 6), получаем

$$A_n=\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda+1)}\right)^{p-1}\cdot F\left(\frac{\pi}{n+1}\right). \tag{8}$$

Поступая аналогично, получаем оценку для B_n

$$B_n\leqslant\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda+1)}\right)^{p-1}\cdot\left(\frac{\pi}{n+1}\right)^{2mp}\cdot\left(\frac{F(\pi)}{\pi^{2mp}}-\left(\frac{n+1}{\pi}\right)^{2mp}\cdot F\left(\frac{\pi}{n+1}\right)+\right.$$

$$\left.+2mp\int\limits_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\frac{F(\gamma)\,d\gamma}{\gamma^{2mp+1}}\right). \tag{9}$$

Из (8) и (9) получаем

$$A_n+B_n\leqslant\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda+1)}\right)^{p-1}\cdot\left(\frac{\pi}{n+1}\right)^{2mp}\left(\frac{F(\pi)}{\pi^{2mp}}+2mp\int\limits_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\frac{F(\gamma)\,d\gamma}{\gamma^{2mp+1}}\right). \tag{10}$$

Положим $W[f;\,\Theta,\,\varphi](\delta)=\sup\limits_{0<t<\delta}\frac{1}{t}\int\limits_0^t|f_\gamma(\Theta,\,\varphi)-f(\Theta,\,\varphi)|^p\,d\gamma$. Учитывая, что $F(\delta)\leqslant\delta^{2\lambda+1}W[f;\,\Theta,\,\varphi](\delta)$, получим из (10) и (5)

$$\|D_n^{[m]}(f)-f\|_{L_{p,\lambda}(S)}\leqslant C_{p,\lambda,n,m}\left(\iint\limits_S\left(\pi^{2\lambda+1-2mp}W[f;\,\Theta,\,\varphi](\pi)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2mp\int\limits_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}W[f;\,\Theta,\,\varphi](\gamma)\cdot\gamma^{2(\lambda-mp)}d\gamma\right)[\sin^2\Theta\sin^2(\varphi'-\varphi)]^{\lambda-\frac{1}{2}}d\sigma\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{11}$$

где $C_{p,\lambda,n,m}=\dfrac{2\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)J_n^{[m]}}\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)^{2m}\left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda+1)}\right)^{\frac{p-1}{p}}$.

Из неотрицательности и монотонности величины $W[f;\,\Theta,\varphi](\delta)$ следует, что

$$W[f;\,\Theta,\,\varphi](\pi)\leqslant\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{2(mp-\lambda-1)}W[f;\,\Theta,\,\varphi]\left(\frac{\pi}{\nu}\right), \tag{12}$$

а также

$$\int\limits_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}W[f;\,\Theta,\,\varphi](\gamma)\cdot\gamma^{2\lambda-2mp}d\gamma=\pi^{2\lambda-2mp+1}\int\limits_1^{n+1}W[f;\,\Theta,\varphi]\left(\frac{\pi}{\gamma}\right)\gamma^{2(mp-\lambda-1)}d\gamma\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\lambda+2-2mp}\cdot\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{2mp-2\lambda-2}\cdot W[f;\,\Theta,\,\varphi]\left(\frac{\pi}{\nu}\right). \tag{13}$$

Учитывая (12) и (13) в (11), получаем

$$\|f-D_n^{[m]}(f)\|_{L_{p,\lambda}(S)}\leqslant C_{p,\lambda,n,m}\left(\iint\limits_S\left(\pi^{2\lambda+1-2mp}+\frac{2mp}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\lambda+2-2mp}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{2mp-2\lambda-2}W[f;\,\Theta,\,\varphi]\left(\frac{\pi}{\nu}\right)[\sin^2\Theta\sin^2(\varphi'-\varphi)]^{\lambda-\frac{1}{2}}d\sigma\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{14}$$

Учитывая, что [2] $J_n^{[m]}\sim\dfrac{4\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\dfrac{3}{m}\right)^{\lambda+\frac{1}{2}}\dfrac{1}{n^{2\lambda+1}}$, получаем из (14)

$$\|f-D_n^{[m]}(f)\|_{L_{p,\lambda}(S)}\leqslant C_{p,\lambda,m}\cdot n^{2\lambda+1-2m}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{2(mp-\lambda-1)}\omega_f^p\left(\frac{\pi}{\nu}\right)\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{15}$$

где $C_{p,\lambda,m}=\dfrac{1}{\lambda}2^{1-2\lambda}\pi^{\frac{2mp+p-2\lambda-1}{2p}}\left(\dfrac{m}{3}\right)^{\lambda+\frac{1}{2}}\left(\dfrac{(1+mp2^{2mp-2\lambda-1})\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}\right)^{\frac{1}{p}}$.

Из (2) и (3) следует, что

$$\omega_f(\delta)_{L_{p,\lambda}(S)}\leqslant 4\Omega_f(\delta)_{L_{p,\lambda}(S)}. \tag{16}$$

Учитывая (16) в 15), получаем утверждение теоремы. Для случая $p=1$ доказательство проводится, как в [1].

Следствие 1. Если $f \in L_{p,\lambda}(S)$, $p \geqslant 1$, то

$$\| f - D_n^{[m]}(f) \|_{L_{p,\lambda}(S)} = O(1) \frac{\Omega_f\left(\frac{1}{n}\right)_{L_{p,\lambda}(S)}}{n^{2m-2\lambda-3}} \begin{cases} (\log n + 1)^{\frac{2m-2}{1+2\lambda}}, & p = \frac{1+2\lambda}{2m-2}, \\ n^{2m-2-\frac{2\lambda+1}{p}}, & p > \frac{1+2\lambda}{2m-2}, \\ 1, & 1 \leqslant p < \frac{1+2\lambda}{2m-2}. \end{cases}$$

Следствие 2. Если $f \in L_{p,\lambda}(S)$, $p \geqslant 1$ и $\| f - f_\tau \|_{L_{p,\lambda}(S)} = O\left(\sin^\alpha \frac{\nu}{2}\right)$, $\alpha > 0$, то

$$\| f - D_n^{[m]}(f) \|_{L_{p,\lambda}(S)} = O(1) \frac{1}{n^{2m-2\lambda-1}} \begin{cases} (\log n + 1)^{\frac{1}{p}}, & \alpha = \frac{2mp-2\lambda-1}{p}, \\ n^{\frac{2mp-2\lambda-1-\alpha p}{p}}, & \alpha < \frac{2mp-2\lambda-1}{p}, \\ 1, & \alpha > \frac{2mp-2\lambda-1}{p}. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ибрагимов Э. Дж.— Уч. зап. Азгосуниверситета им. С. М. Кирова, 1974, с. 17.
2. Scures F. and Steutel F. W. (Holland).— Mat., 1967, v. 9(32), № 1, p. 155.

Поступила в редакцию
24.05.82.

Кафедра функционального анализа

УДК 518:517(944)947

П. А. ВАКУЛЬЧИК

ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ МЕТОДА НЬЮТОНА РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ, АППРОКСИМИРУЮЩИХ СМЕШАННУЮ ЗАДАЧУ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Исследование сходимости метода Ньютона решения нелинейных разностных уравнений проведем на примере аппроксимации однородной системы квазилинейных уравнений в дивергентной форме [1]

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial \varphi(U)}{\partial x}, \; U = \{u^1, u^2, \ldots, u^n\}, \; \varphi = \{\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^n\}, \tag{1}$$

где матрица $A = \left\|\left\{\frac{\partial \varphi^i(U)}{\partial u^j}\right\}\right\|$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ удовлетворяет условию гиперболичности и ее собственные значения $\xi^i(U)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ таковы, что $\xi^i(U) \leqslant 0$, $i = \overline{1, n_0}$, $n_0 \leqslant n$; $\xi^i(U) > 0$, $i = \overline{n_0+1, n}$. Для системы (1) рассмотрим начальные при $t = 0$

$$U(x, 0) = U_0(x), \; 0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{2}$$

и граничные при $x = 0$ и $x = 1$ условия

$$L(x, t)\, U(x, t) = \psi(x, t), \; 0 \leqslant t \leqslant T, \; \psi = \{\psi^1, \psi^2, \ldots, \psi^n\}, \tag{3}$$

где матрица $L(x, t)$ удовлетворяет условию корректности [2] смешанной задачи. Пусть решение задачи (1)—(3) в прямоугольнике $\Pi = \{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ существует, единственно, и компоненты вектора решения $U = U(x, t)$ принадлежат классу $C_3^3(\Pi)^*$ [1]. При этом функции $\varphi^i(U)$, $i = \overline{1, n}$, дважды непрерывно дифференцируемы по компонентам вектора U.

Следуя интегро-интерполяционному методу построения консервативных разностных схем [3], на сетке $\omega_{h\tau}$ рассмотрим неявную разностную схему

$$Y_t = [\varphi(\hat{Y})]_x, \tag{4}$$