УДК 517.53

ТА ХОНГ КУАНГ, В. Н. РУСАК

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

1. Рациональные операторы Валле Пуссена

Обозначим через C_∞ класс функций, непрерывных и ограниченных на вещественной оси и удовлетворяющих условию $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Пусть в верхней полуплоскости заданы n чисел $\{z_k\}_{k=1}^n$; среди этих чисел могут встречаться и равные. Обозначим

$$K_n(t, x) = \prod_{k=1}^{n} \frac{t-z_k}{t-\bar z_k} \cdot \frac{x-\bar z_k}{x-z_k}; \quad \tilde K_n(t, x) = \prod_{u=1}^{n} \frac{t-\bar z_k}{t-z_k} \cdot \frac{x-z_k}{x-\bar z_k}. \qquad (1)$$

Очевидно, что если $x, t \in (-\infty, \infty)$, то $\tilde K_n(t, x) = \overline{K_n(t, x)}$. Введем ядро

$$K_{n,m,l}(t, z) = [\tilde K_n(t, z)]^m + [\tilde K_n(t, z)]^m - [K_n(t, z)]^l - [\tilde K_n(t, z)]^l \qquad (2)$$

и пусть

$$g_n(z) = g_{n,m,l}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{n,m,l}(t, z)}{(t-z)^2}\, dt. \qquad (3)$$

Всякой функции $f \in C_\infty$ ставим в соответствие оператор

$$V_{n,m,l}(x, f) = \frac{1}{g_n(x)} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{K_{n,m,l}(t, x)}{(t-x)^2}\, dt, \qquad (4)$$

называя его оператором типа Валле Пуссена.

Пусть $E_{2nq}(f) = \min\limits_{r_{2nq}} \max\limits_{-\infty<x<\infty} |f(x) - r_{2nq}(x)|$ наилучшее приближение функции $f \in C_\infty$ рациональными функциями вида

$$r_{2nq}(x) = \frac{a_0 x^{2nq} + \ldots + a_{2nq}}{\prod\limits_{k=1}^{n} (x-z_k)^q (x-\bar z_k)^q}. \qquad (5)$$

Теорема 1. Справедливо равенство

$$\| f(x) - V_{n,m,l}(x, f) \| \leqslant \frac{2Q}{Q-q} E_{2nq}(f), \qquad (6)$$

где $Q = \max\{m, l\}$; $q = \min\{m, l\}$, $m \neq l$ (m, l, n — целые числа).

Доказательство. Пусть $z_k = \alpha_k + i\beta_k$, $\beta_k > 0$ и

$\Phi_n'(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\beta_k}{(\alpha_k - z)^2 + \beta_k^2}$. Из (1) ясно, что выполнены равенства

$$K_n(z, z) = \tilde{K}_n(z, z) = 1. \tag{7}$$

Легко проверить также, что

$$\frac{d}{dt} K_n(t, z)|_{t, z} = 2i\, \Phi_n'(z) \tag{8}$$

и аналогичным образом

$$\frac{d}{dt} \tilde{K}_n(t, z)|_{t, z} = -2i\, \Phi_n'(z). \tag{9}$$

С помощью (8) и (9) устанавливаем, что $K_{n,m,l}(z, z) = \frac{d}{dt} K_{n,m,l} \times \times (t, z)|_{t=z} = 0$ и, следовательно, функция $K_{n,m,l}(t, z)/(t-z)^2$ непрерывна по $t \in [-\infty, \infty]$ для любого $z \in C$, и является рациональной функцией по каждой переменной, причем степень числителя на две единицы ниже степени знаменателя. Таким образом, интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{K_{n,m,l}(t, z)}{(t-z)^2} dt$ существует и является рациональной функцией, если $f \in C_\infty$.

Пусть λ_j есть кратность числа z_j, в системе чисел $\{z_i\}_{i=1}^n$ и λ — целое число, $0 \leqslant \lambda \leqslant q\lambda_j$. Вычислим значение интеграла

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{n,m,l}(t, x)}{(t-z_j)^\lambda (t-x)^2} dt, \; x \in (-\infty, \infty).$$

На основании (7), (8), (9) и учитывая, что разность $[K_n(t, x)]^m - [K_n(t, x)]^l$ аналитична по переменной t в верхней полуплоскости, а разность $[\tilde{K}_n(t, x)]^m - [\tilde{K}_n(t, x)]^l$ аналитична по t в нижней полуплоскости, получим (с помощью теории вычетов)

$$I(x) = \lim_{\substack{z \to x \\ Im z > 0}} I(x) = \lim_{z \to x + i \cdot 0} 2\pi i \operatorname{Res}_{t=z} \left\{ \frac{K_n^m(t, z) - K_n^l(t, z)}{(t-z)^2 (t-z_j)^\lambda} \right\} =$$

$$= \lim_{z \to x + i \cdot 0} \frac{4\pi\, \Phi_n'(z)(l-m)}{(z-z_j)^\lambda} = \frac{4\pi\, \Phi_n'(x)(l-m)}{(x-z_j)^\lambda}. \tag{10}$$

В частности, при $\lambda = 0$ из (9) следует, что

$$g_{n,m,l}(x) = 4\pi\, \Phi_n'(x)(l-m) \tag{11}$$

и видно, что $g_{n,m,l}(x)$ не обращается в нуль ни в одной точке вещественной оси.

Из (3), (4), (10) и (11) вытекает, что

$$V_{n,m,l}\left(x, \frac{1}{(x-z_j)^\lambda}\right) \equiv \frac{1}{(x-z_j)^\lambda}, \; x \in (-\infty, \infty).$$

Аналогичным образом устанавливается, что

$$V_{n,m,l}\left(x, \frac{1}{(x-\bar{z}_j)^\lambda}\right) \equiv \frac{1}{(x-\bar{z}_j)^\lambda}, \; x \in (-\infty, \infty).$$

Поскольку рациональная функция (5) разлагается на простые дроби

$$\frac{A_j}{(z-z_j)^\lambda}, \; \frac{B_j}{(z-\bar{z}_j)^\lambda}, \; 0 \leqslant \lambda \leqslant q\lambda_j,$$

а оператор $V_{n,m,l}(x, f)$ есть, очевидно, линейный оператор, то имеем, что для любой функции вида (5)

$$V_{n,m,l}(x, r_{2nq}) \equiv r_{2nq}(x), \; x \in (-\infty, \infty). \tag{12}$$

Оценим теперь норму рациональной функции (4), рассматривая ее как оператор, действующий из пространства C_∞ в пространство C_∞, точнее, найдем оценку сверху для интеграла

$$\frac{1}{|g_n(x)|} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{K_{n,m,l}(t, x)}{(t-x)^2} \right| dt \equiv A(x). \tag{13}$$

Имеем, что (см. (1) и (2)) при любых $x,\ t\in(-\infty,\infty)$

$$[K_n(t,x)]^l+[\overline{K_n(t,x)}]^l\leqslant|K_n(t,x)|^l+|\overline{K_n(t,x)}|^l=2,$$

поэтому $K_{n,o,l}(t,x)=2-K_n^l(t,x)-\overline{K}_n^l(t,x)\geqslant 0$ и для ядра $K_{n,m,l}(t,x)$ получим оценку сверху

$$|K_{n,m,l}(t,x)|=|[2-K_n^l(t,x)-\overline{K}_n^l(t,x)]-[2-K_n^m(t,x)-$$
$$-\overline{K}_n^m(t,x)]|\leqslant K_{n,o,l}(t,x)+K_{n,o,m}(t,x). \qquad (14)$$

Из (11), (13) и (14) найдем

$$A(x)\leqslant\frac{1}{4\pi\Phi_n'(x)(l-m)}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{K_{n,o,l}(t,x)}{(t-x)^2}\,dt+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{K_{n,o,m}(t,x)}{(t-x)^2}\,dt\right\}=$$
$$=\frac{l}{|l-m|}+\frac{m}{|l-m|}=\frac{Q+q}{Q-q}. \qquad (15)$$

Пусть $\tilde r_{2nq}(x)$ рациональная функция наилучшего приближения среди функций вида (5) для $f(x)$. Тогда в силу линейности оператора $V_{n,m,l}(x,f)$ и (15), получим

$$|f(x)-V_{n,m,l}(x,f)|\leqslant|f(x)-\tilde r_{2nq}(x)|+|\tilde r_{2nq}(x)-V_{n,m,l}(x,f)|\leqslant$$
$$\leqslant E_{2nq}(f)+\frac{Q+q}{Q-q}E_{2nq}(f)=\frac{2Q}{Q-q}E_{2nq}(f),$$

т. е. неравенство (6) установлено.

Замечание. Случай, когда $l=1$ и $m=r$ был впервые рассмотрен В. Н. Русаком в [1].

2. Рациональные операторы типа Джексона. Пусть $z_k=\alpha_k+i\beta_k$; $\beta_k>0$; $\Phi_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\arg(z_k-x)$. Далее обозначим $W_n(t,x)=\sin^4[\Phi_n(t)-\Phi_n(x)]-2\sin^4 2[\Phi_n(t)-\Phi_n(x)]+\sin^4 3[\Phi_n(t)-\Phi_n(x)]$ и введем оператор типа Джексона

$$D_n(x,f)=\frac{1}{g_n(x)}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{1+t^2}{(t-x)^4}W_n(t,x)\,dt, \qquad (16)$$

где

$$g_n(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1+t^2)W_n(t,x)\,dt}{(t-x)^4}. \qquad (17)$$

Заметим, что рациональные операторы типа Джексона с несколько иными ядрами (рассматривались впервые в [2]) обладают тем свойством, что отображает на себя множество рациональных функций вида

$$R_{2n}(x)=\frac{a_0x^{2n}+a_1x^{2n-1}+\ldots+a_{2n}}{\prod_{k=1}^{n}(x-z_k)(x-\overline{z}_k)}. \qquad (18)$$

Точнее, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Для любой рациональной функции вида (18) справедливо равенство

$$D_n(x,R_{2n})\equiv R_{2n}(x),\quad -\infty\leqslant x\leqslant\infty. \qquad (19)$$

Доказательство. Пусть снова λ_j — кратность числа z_j в системе $\{z_j\}_{j=1}^n$ и $0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_j$ (λ — целое). В [2 стр. 114] установлено, что

$$\sin[\Phi_n(t)-\Phi_n(x)]=\frac{1}{2i}\,\frac{\prod_{k=1}^{n}(t-z_k)(x-\overline{z}_k)-\prod_{k=1}^{n}(t-\overline{z}_k)(x-z_k)}{\prod_{k=1}^{n}|t-z_k||x-z_k|}. \qquad (20)$$

Из (1) и (20) следует, что

$$\sin^4[\Phi_n(t)-\Phi_n(x)]=\frac{1}{16}K_n^2(t,\ x)-\frac{1}{4}K_n(t,\ x)-$$
$$-\frac{1}{4}\widetilde{K}_n(t,\ x)+\frac{1}{16}\widetilde{K}_n^2(t,\ x)+\frac{3}{8}. \tag{21}$$

Считая, что $\operatorname{Im} z>0$, найдем (см. (21))

$$I(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1+t^2)\left[\frac{1}{16}K_n^2(t,\ z)-\frac{1}{4}K_n(t,\ z)\right]}{(t-z_j)^{\lambda}(t-z)^4}dt+$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1+t^2)\left[\frac{1}{16}\widetilde{K}_n^2(t,\ z)-\frac{1}{4}\widetilde{K}_n(t,\ z)+\frac{3}{8}\right]}{(t-z_j)^{\lambda}(t-z)^4}dt=I_1(z)+I_2(z)\equiv I_1(z), \tag{22}$$

где $I_2(z)\equiv 0$ в силу аналитичности подынтегральной функции по t в нижней полуплоскости.

Применяя теорему о вычетах, с учетом (7), (8), (9) непосредственным вычислением найдем

$$I_1(z)=\frac{1}{(z-z_j)^{\lambda}}\left\{\frac{2\pi}{3}(1+z^2)\left([\Phi_n'(z)]^3-\sum_{k=1}^{n}\frac{\beta_k^3}{[(z-\alpha_k)^2+\beta_k^2]^3}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\beta_k^2(1+\alpha_k^2+\beta_k^2)}{[(z-\alpha_k)^2+\beta_k^2]^2}\right\}+\frac{\lambda}{(z-z_j)^{\lambda+1}}\cdot\frac{\pi i}{8}\left\{3+8iz\,\Phi_n'(z)+\right.$$
$$\left.+(1+z^2)\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(z-\bar{z}_k)^2}-\frac{1}{(z-z_k)^2}\right]\right\}-\frac{\lambda(\lambda+1)\pi i}{8(z-z_j)^{\lambda+2}}\times$$
$$\times[3z+2i\,\Phi_n'(z)(1+z^2)]+\frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{(z-z_j)^{\lambda+3}}\cdot\frac{\pi(1+z^2)}{16}. \tag{23}$$

В (23) при замене $\Phi_n'(z)$ на $\Theta\Phi_n'(x)$ получим конкретное выражение для интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1+t^2)\sin^4\Theta[\Phi_n(t)-\Phi_n(x)]}{(t-z_j)^{\lambda}(t-x)^4}dt,\ \Theta=1,\ 2,\ 3.$$

Отсюда непосредственным вычислением найдем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1+t^2)W_n(t,\ x)\,dt}{(t-z_j)^{\lambda}(t-x)^4}=\frac{8\pi(1+x^2)[\Phi_n'(x)]^3}{(x-z_j)^{\lambda}}. \tag{24}$$

По принципу комплексного сопряжения верно

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1+t^2)W_n(t,\ x)}{(t-\bar{z}_j)^{\lambda}(t-x)^4}dt=\frac{8\pi(1+x^2)[\Phi_n'(x)]^3}{(x-\bar{z}_j)^{\lambda}}. \tag{25}$$

Из (24), (25) и линейности следует, что для любой функции вида (18)

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+t^2)R_{2n}(t)\frac{W_n(t,\ x)}{(t-x)^4}dt=8\pi(1+x^2)[\Phi_n'(x)]^3\cdot R_{2n}(x).$$

В частности, при $R_{2n}(x)\equiv 1$ имеем

$$g_n(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1+t^2)W_n(t,\ x)\,dt}{(t-x)^4}=8\pi(1+x^2)[\Phi_n'(x)]^3. \tag{27}$$

Из (26), (27) следует (19), и теорема 2 полностью доказана.

В качестве следствия теоремы 2 имеется следующая

Теорема 3.

$$|f(x)-D_n(x,f)|\leqslant(1+\|D_n(x)\|)E_{2n}(f), \tag{28}$$

где

$$\| D_n (x) \| = \frac{1}{g_n (x)} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{(1+t^2) W_n (t, x)}{(t-x)^4} \right| dt. \tag{29}$$

Действительно, пусть $\tilde{R}_{2n}(x)$ — рациональная дробь вида (18) наилучшего приближения функции $f(x)$, тогда $|f(x)-D_n(x, f)| \leqslant |f(x)-\tilde{R}_{2n}(x)|+|\tilde{R}_{2n}(x)-D_n(x, t) \leqslant (1+\|D_n(x)\|) E_{2n}(f)$. Заметим, что в особом случае, когда $\alpha_k = 0$, $\beta_k = 1$, $k = \overline{1, n}$ при замене $x = tg\frac{u}{2}$, $t = \operatorname{tg}\frac{v}{2}$ имеем

$$D_n(x, t) = \tilde{D}_n (u, \varphi) = \frac{1}{16\pi n^3} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi (u+v) \frac{\sin^4 \frac{3nt}{2} - 2\sin^4 nt + \sin^4 \frac{nt}{2}}{\sin^4 \frac{t}{2}} dt, \tag{30}$$

где $\varphi (u) = f\left(\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right)$ (см. [2, с. 141). В [2] было установлено, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^4 \frac{nt}{2}}{\sin^4 \frac{t}{2}} dt = \frac{2n\pi (2n^2+1)}{3}.$$

Теорема 4. Пусть $\varphi(u)$ — 2π-периодическая непрерывная функция, $E_n(\varphi)$ — наилучшее приближение функции $\varphi(u)$ тригонометрическими многочленами степени не выше n, тогда

$$|\varphi (u) - \tilde{D}_n (u, \varphi)| \leqslant (1 + \|\tilde{D}_n\|) E_n (\varphi),$$

где

$$\| D_n \| = \frac{1}{16\pi n^3} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left|\sin^4 \frac{3nt}{2} - 2\sin^4 nt + \sin^4 \frac{nt}{2}\right|}{\sin^4 \frac{t}{2}} dt \leqslant 3 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3n^2}. \tag{32}$$

Действительно, (32) немедленно вытекает из (28), (30) а $\|\tilde{D}_n\|$ оценивается с помощью (31).

ЛИТЕРАТУРА

1. Русак В. Н.— Матем. заметки, 1977, т. 22, вып. 3.
2. Русак В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения.— Минск, 1979.

Поступила в редакцию
23.03.80.

Кафедра высшей математики и математической физики

УДК 519.768 : 17

И. А. КОРОЛЬ, И. В. СОВПЕЛЬ

АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ СИСТЕМА ПЕРЕВОДА КЛЮЧЕВЫХ СЛОВ (СПЕРКС-1).1

Эффективность использования информационно-поисковых систем (ИПС) во многих случаях можно существенно повысить, если объединить их в единую информационную сеть. Такое объединение позволяет лучше удовлетворять потребности абонентов благодаря более полному использованию информационных массивов, сосредоточенных в различных центрах [1].

Поскольку при объединении ИПС не всегда можно ограничиться одним информационно-поисковым языком (ИПЯ), то при создании единой информационной сети приходится решать проблему перехода от одних ИПЯ к другим. В этом плане наиболее общей является задача машинного перевода текстов, рефератов, аннотаций, поисковых предписаний и т. п. с одного естественного языка (ЕЯ) на другой, поскольку ЕЯ является ИПЯ с наибольшей семантической силой. Эта задача возникает,