В теории классов групп естественным обобщением субнормальности является понятие обобщенной субнормальности.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Напомним, что подгруппу H называют $\mathfrak{F}$-достижимой (обобщенно субнормальной), если существует цепь подгрупп $G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_m = H$ такая, что для любого $i = 1, 2, \ldots, m$ либо подгруппа H_i нормальна в H_{i-1}, либо $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$.

В 1978 году Кегель [2] и Л.А. Шеметков [3] поставили задачу о нахождении новых классов конечных групп, обладающих тем свойством, что в любой конечной группе порождение обобщенно субнормальных подгрупп есть обобщенно субнормальная подгруппа.

В настоящее время данная задача полностью решена в классе наследственных насыщенных формаций. В классе разрешимых групп ее решение получили Баллестер-Болинше, Дерк и Перец-Рамош в работе [4] и в произвольном случае А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников, В.Н. Семенчук [5].

Если условия порождения $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп заменить более слабым условием — произведением перестановочных $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп, то задачу Кегеля-Шеметкова можно сформулировать следующим образом: найти новые классы групп, обладающих тем свойством, что в любой конечной группе произведение перестановочных обобщенно субнормальных подгрупп является обобщенно субнормальной подгруппой.

Нами показано, что таким свойством, в частности, обладают классы всех p-разложимых, p-нильпотентных, p-замкнутых групп. Доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная сверхрадикальная формация. Тогда для любой группы G и для любых ее перестановочных $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп H и K подгруппа HK $\mathfrak{F}$-достижима в G.*

Литература

1. Wielandt H. *Uber den Normalisator der subnormalen Untergruppen* // Math. Z. 1958. Vol. 69, № 8. P. 463–465.

2. Kegel O. H. *Untergruppenverbande endlicher Gruppen, die Subnormalteilerverband echt enthalten* // Arch. Math. 1978. Vol. 30, № 3. P. 225–228.

3. Шеметков Л. А. *Формации конечных групп.* М.: Наука, 1978.

4. Ballester-Bolinches A., Doerk K., Perez-Ramos M. D. *On the lattice of $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups* // J. Algebra. 1992. Vol. 148, № 2. P. 42–52

5. Васильев А. Ф., Каморников С. Ф., Семенчук В. Н. *О решетках подгрупп конечных групп* // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические системы / Ин-т математики Акад. Украины; редкол.: Н.С. Черников [и др.]. Киев, 1993. С. 27–54.

О ПРОБЛЕМЕ ОПИСАНИЯ НАИМЕНЬШЕГО ЭЛЕМЕНТА СЕКЦИИ ЛОКЕТТА ФИТТИНГОВА ФУНКТОРА

Е.А. Витько, Н.Т. Воробьев

Витебский государственный университет им. П. М. Машерова
Московский пр-т 33, 210038 Витебск, Беларусь
{alenkavit,vorobyovnt}@tut.by

В определениях и обозначениях мы следуем [1]. Рассматриваемые в работе группы конечны.

Фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор мы называем пронормальным, если каждая подгруппа $X \in f(G)$ является пронормальной в группе $G \in \mathfrak{X}$.

Определение 1. Фиттинговы π-разрешимые функторы f и g назовем перестановочными, если $XY = YX$ для любых подгрупп $X \in f(G)$ и $Y \in g(G)$ таких, что существует холловская система группы G, которая редуцируется в X и в Y.

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Подгруппу A группы G называют π-связанной [2], если либо порядок подгруппы A, либо ее индекс в G является π-числом. Фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор будем называть π-связанным, если каждая подгруппа $X \in f(G)$ является π-связанной подгруппой группы $G \in \mathfrak{X}$.

Если f — фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор, то множество всех простых чисел p, для которых существует такая группа $G \in \mathfrak{X}$ и подгруппа $X \in f(G)$, что число p является делителем $|X|$, называют характеристикой функтора f и обозначают $\mathrm{Char} f$.

Определение 2. Пусть $\{f_i : i \in I\}$ — множество пронормальных сопряженных попарно перестановочных π-разрешимых π-связанных фиттинговых функторов и $\mathrm{Char} f_i \cap \mathrm{Char} f_j = \varnothing$ для всех $i, j \in I$, если $i \neq j$. Определим операцию $\vee$ следующим образом: $(\vee_{i \in I} f_i)(G) = \{\prod_{i \in I} X_i : X_i \in f_i(G)$, существует холловская система группы G, которая редуцируется в подгруппу X_i для всех $i \in I\}$.

Пусть f — фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор и π_1 — проекция первой координаты $G \times G$ в G. Тогда отображение f^* сопоставляет каждой группе $G \in \mathfrak{X}$ множество $\{\pi_1(T) : T \in f(G \times G)\}$. Если f — сопряженный фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор, то секция Локетта — множество $\mathrm{Locksec}(f) = \{g : g$ — сопряженный фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор и $g^* = f^*\}$.

Пусть π — некоторое множество простых чисел, $\Lambda = \{\pi_i : i \in I\}$ — система попарно непересекающихся подмножеств множества простых чисел такая, что $\pi' \subseteq \pi_i$ для некоторого $\pi_i \in \Lambda$ и $\mathbb{P} = \cup_{\pi_i \in \Lambda} \pi_i$. Фиттингов π-разрешимый функтор f назовем Λ-нормально вложенным, если f является π_i-нормально вложенным для всех $\pi_i \in \Lambda$. Доказана

Теорема. *Пусть f — сопряженный Λ-нормально вложенный π-разрешимый фиттинговый функтор. Тогда f_* — наименьший по сильному вложению элемент секции Локетта, совпадает с π-разрешимым фиттинговым функторм* $\vee_{\pi_i \in \Lambda}(\mathrm{Hall}_{\pi_i} \circ \mathrm{Rad}_{(L_{\pi_i}(f))_*})$.

Заметим, что из теоремы следует положительное решение проблемы Бейдельман — Брюстера — Хаука об описании наименьшего элемента секции Локетта для нормально вложенных сопряженных разрешимых фиттинговых функторов (см. [3, проблема 8.7]).

Литература

1. Витько Е. А., Воробьев Н. Т. *Фиттинговы функторы и радикалы конечных групп* // Сиб. матем. журнал. 2011. Т. 52, № 6. С. 1253–1263.
2. Сементовский В. Г. *О пронормальных подгруппах конечных π-разрешимых групп* // Веснік Віцебскага дзяржаўнага універсітэта. 2000. № 3. С. 55–59.
3. Beidleman J. C., Brewster B., Hauck P. *Fitting functors in finite solvable groups II* // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1987. V. 101. P. 37–55.

ЧАСТИЧНО КОМПОЗИЦИОННЫЕ ФОРМАЦИИ С УСЛОВИЕМ ДОПОЛНЯЕМОСТИ

Н.Н. Воробьев[1], А.П. Мехович[2]

[1] Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
Советская 104, 246019 Гомель, Беларусь
vornic2001@yahoo.com
[2] Витебский государственный университет им. П. М. Машерова
Московский пр-т 33, 210038 Витебск, Беларусь
amekhovich@yandex.ru

Все рассматриваемые нами группы предполагаются конечными. Используется стандартная терминология [1–3]. В дальнейшем символ ω обозначает некоторое непустое множество простых чисел, $\omega' = \mathbb{P} \setminus \{\omega\}$.