Теорема. *Существует* $c_1 > 0$, *такое что при* $Q > Q_0$ *справедливо неравенство*

$$\#M_3(Q, r) > c_1 Q^4 \mu_2 K.$$

Доказательство проводится методами метрической теории диофантовых приближений.

Литература

1. Mahler K. *Über das Mass der Menge aller S-Zahlen* // Math. Ann. 1932. Vol. 106. P. 131–139.

2. Спринджук В.Г. *Проблема Малера в метрической теории чисел.* Мн., 1967.

3. Берник В.И. *О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов* // Acta Arith. 1989. Vol. 53, No. 1. P. 17–28.

О БИРАЦИОНАЛЬНОЙ КОМПОЗИЦИИ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ, ОДНА ИЗ КОТОРЫХ БИНАРНАЯ

А.А. Бондаренко

Белорусский государственный университет, механико-математический факультет
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь
bondarenko@bsu.by

Пусть $f(X)$ и $g(Y)$ — невырожденные квадратичные формы размерности m и n над полем K, $\operatorname{char} K \neq 2$.

Определение. Если произведение $f(X) \cdot g(Y)$ бирационально эквивалентно над K квадратичной форме $h(Z)$ над K размерности $m+n$, то будем говорить, что квадратичные формы $f(X)$ и $g(Y)$ образуют бирациональную композицию $h(Z)$ над полем K.

Первые результаты по проблеме композиции восходят к Гурвицу, который изучал задачу о «сумме квадратов». Классические результаты Гурвица и Радона по этой задаче хорошо известны (см. [1]). В [2] получены первые общие теоремы о бирациональной композиции квадратичных форм над полем K, полное решение проблемы бирациональной композиции квадратичных форм над локальным полем дано в [3], над конечным — в [4].

Основная цель настоящего сообщения — решение проблемы бирациональной композиции квадратичных форм над K, одна из которых бинарная.

Полное решение проблемы бирациональной композиции анизотропных над K квадратичных форм, одна из которых бинарная, дает

Теорема. *Пусть* $f(X)$ *и* $g(Y)$ *анизотропные над* K *квадратичные формы размерности* $m = 2$ *и* n. *Бирациональная композиция* $h(Z)$ *над полем* K *квадратичных форм* $f(X) = ax_1^2 + bx_2^2$ *и* $g(Y)$ *существует тогда и только тогда, когда* $g(Y)$ K*-эквивалентна*

$$\begin{cases} \beta_1(y_1^2 + \alpha y_2^2) + \ldots + \beta_k(y_{n-1}^2 + \alpha y_n^2), & \text{если } n = 2k, \\ \beta_1(y_1^2 + \alpha y_2^2) + \ldots + \beta_{k-1}(y_{n-2}^2 + \alpha y_{n-1}^2) + \beta_k y_n^2, & \text{если } n = 2k-1, \end{cases}$$

где $\alpha = b/a$. *При этом с точностью до эквивалентности над* K

$$h(z_1, \ldots, z_{n+2}) = a[\beta_1(z_1^2 + \alpha z_2^2) + \ldots + \beta_k(z_{2k-1}^2 + \alpha z_{2k}^2)].$$

Решение проблемы бирациональной композиции, если $f(X)$ либо $g(Y)$ изотропна над K, следует из [2, теорема 1].

Литература

1. Lam K. Y. *Topological methods for studying the composition of quadratic forms* // Quadratic and hermitian forms. Conf. Proc. Providence. Rhod Island. 1983. Vol. 4. P. 173–192.

2. Бондаренко А. А. *О бирациональной композиции квадратичных форм* // Весцi НАН Беларуси, сер. фiз.-мат. навук. 2007. № 4. С. 56–61.

3. Бондаренко А. А. *Бирациональная композиция квадратичных форм над локальным полем* // Мат. заметки. 2009. Т. 85, № 3. С. 661–670.

4. Бондаренко А. А. *Бирациональная композиция квадратичных форм над конечным полем* // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2010. № 3. С. 90–93.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КОНЕЧНОСТИ ДЛЯ ФОРМАЦИЙ

В.П. Буриченко

Институт математики НАН Беларуси
Кирова 32а, 246652 Гомель, Беларусь
vpburich@gmail.com

Напомним [1, 2], что *формация* — это класс конечных групп (рассматриваемых с точностью до изоморфизма), который замкнут относительно взятия факторгрупп и (попарных) подпрямых произведений. Например, классы всех абелевых, нильпотентных или всех π-групп (для фиксированного множества π) являются формациями.

Легко видеть, что для любого множества $\mathfrak{M}$ конечных групп существует формация $\mathrm{form}(\mathfrak{M})$, *порожденная* множеством $\mathfrak{M}$, т.е. наименьшая формация, содержащая $\mathfrak{M}$.

Известна следующая задача, иногда называемая *проблемой Гашюца*: верно ли, что для любой конечной группы G порожденная ею формация $\mathrm{form}(G)$ содержит лишь конечное число подформаций?

В ряде частных случаев (например, когда G разрешима [3]) получен положительный ответ. В общем случае, однако, ответ отрицательный.

Группа X называется *двойным накрытием* группы S_5, если $Z(X) \cong Z_2$, $X/Z(X) \cong S_5$ и $Z(X) \subseteq [X, X]$.

Теорема 1. *Пусть* $A = 2S_5$ *— двойное накрытие группы* S_5 *и* $\mathfrak{Q} = \mathrm{form}(A)$. *Положим* $\mathfrak{I} = \mathrm{form}(\{1\})$, $\mathfrak{E} = \mathrm{form}(Z_2)$ *и* $\mathfrak{P} = \mathrm{form}(S_5)$. *Тогда все различные подформации в* $\mathfrak{Q}$ *суть* $\emptyset$, $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{P}$ *и некоторые формации, обозначаемые* $\overline{\mathfrak{K}}$, $\mathfrak{K}_i$ *и* $\mathfrak{H}_i$, $i = 0, 1, \ldots$. *При этом* $\mathfrak{K}_0 = \mathfrak{Q}$. *Все включения между этими подформациями следующие:* $\emptyset \subset \mathfrak{I} \subset \mathfrak{E} \subset \mathfrak{P} \subset \overline{\mathfrak{K}} \subset$ $\subset \mathfrak{K}_i, \mathfrak{H}_i$ *для любого* i; $\mathfrak{K}_i \subset \mathfrak{K}_j$ *и* $\mathfrak{H}_i \subset \mathfrak{H}_j$ *при* $i > j$; $\mathfrak{H}_i \subset \mathfrak{K}_j$ *при* $i \geqslant j$.

Доказательство приведено в [4].

Получены также отрицательные ответы на следующие вопросы, касающиеся специальных типов формаций, а именно локальных и композиционных.

1) Верно ли, что для любой конечной группы G порожденная ею локальная (композиционная) формация $\mathrm{lform}(G)$ (соответственно $\mathrm{cform}(G)$) содержит лишь конечное число локальных (соответственно композиционных) подформаций? ([1], проблема 10).

2) Верно ли, что для любых двух локальных формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ таких, что $\mathfrak{F}_1 \not\subseteq \mathfrak{F}_2$, существует $\mathfrak{F}_2$-критическая подформация в $\mathfrak{F}_1$, т.е. локальная формация $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}_1$ такая, что $\mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{F}_2$, но $\mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ для любой собственной локальной подформации $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}$? ([5], задача 9.60).

Теорема 2. *Пусть* A *— двойное накрытие группы* S_5, V *— точный* $\mathbf{F}_3 A$*-модуль (где* $\mathbf{F}_3$ *— поле из трех элементов) и* $B = V \rtimes A$ *(полупрямое произведение). Тогда*

1) $\mathrm{lform}(B)$ *и* $\mathrm{cform}(B)$ *содержат бесконечное число локальных (соответственно композиционных) подформаций.*

2) *Существует локальная подформация* $\mathfrak{F}_1 \subset \mathrm{lform}(B) = \mathfrak{F}_2$ *такая, что* $\mathfrak{F}_2$ *не имеет* $\mathfrak{F}_1$*-критических подформаций.*