УДК 517.925.7

О МЕРОМОРФНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С ПЕРВЫМ УРАВНЕНИЕМ ПЕНЛЕВЕ

Е. В. ГРОМАК[1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Рассмотрена обобщенная иерархия первого уравнения Пенлеве, которая представляет собой последовательность полиномиальных обыкновенных дифференциальных уравнений четного порядка, имеющих единую дифференциально-алгебраическую структуру, определяемую оператором $\tilde{L}_n$. Первый член этой иерархии при $n = 2$ есть первое уравнение Пенлеве, а последующие уравнения порядка $2n - 2$ содержат произвольные параметры. Их называют высшими аналогами первого уравнения Пенлеве порядка $2n - 2$. Исследованы аналитические свойства решений уравнений обобщенной иерархии первого уравнения Пенлеве и связанных с ними линейных уравнений. Установлено, что каждое уравнение иерархии имеет один доминирующий член, а произвольное мероморфное решение любого уравнения иерархии не может иметь конечное число полюсов. Определен характер подвижных полюсов мероморфных решений. С использованием метода Фробениуса получены достаточные условия мероморфности общего решения линейных уравнений второго порядка с линейным потенциалом, определяемым мероморфными решениями первых трех уравнений иерархии.

Ключевые слова: первое уравнение Пенлеве; иерархии уравнений Пенлеве; мероморфные решения.

Образец цитирования:
Громак ЕВ. О мероморфных решениях уравнений, связанных с первым уравнением Пенлеве. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2022;2:15–22.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-2-15-22

For citation:
Gromak EV. On meromorphic solutions of the equations related to the first Painlevé equation. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2022;2:15–22. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-2-15-22

Автор:
Елена Валерьевна Громак – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры теории функций механико-математического факультета.

Author:
Elena V. Gromak, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of theory of functions, faculty of mechanics and mathematics.
lenagromak@tut.by
https://orcid.org/0000-0003-3646-6227

Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2022;2:15–22
Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2022;2:15–22

ON MEROMORPHIC SOLUTIONS OF THE EQUATIONS RELATED TO THE FIRST PAINLEVÉ EQUATION

E. V. GROMAK [a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

In this paper, we consider the generalised hierarchy of the first Painlevé equation which is a sequence of polynomial ordinary differential equations of even order that have a uniform differential-algebraic structure determined by the operator $\tilde{L}_n$. The first member of this hierarchy for $n = 2$ is the first Painlevé equation, and the subsequent equations of order $2n - 2$ contain arbitrary parameters. They are named as higher analogues of the first Painlevé equation of $2n - 2$ order. The article considers the analytical properties of solutions to the equations of the generalised hierarchy of the first Painlevé equation and the related linear equations. It is established that each hierarchy equation has one dominant term, and an arbitrary meromorphic solution of any hierarchy equation cannot have a finite number of poles. The character of the mobile poles of meromorphic solutions is determined. Using the Frobenius method, sufficient conditions are obtained for the meromorphicity of the general solution of the second-order linear equations with a linear potential defined by meromorphic solutions of the first three equations of the hierarchy.

Keywords: the first Painlevé equation; hierarchies of Painlevé equations; meromorphic solutions.

Введение

Рассмотрим иерархию первого уравнения Пенлеве [1]

$$\tilde{P}_1^{[2n-2]} : \tilde{L}_n[q] - \frac{z}{2} = 0,\ n = 2, 3, \ldots, \tag{1}$$

где обобщенный оператор $\tilde{L}_n$ определяется рекуррентным соотношением

$$\frac{d}{dz}\tilde{L}_{n+1}[u] = \left(\frac{d^3}{dz^3} + (4u + \beta_n)\frac{d}{dz} + 2u_z\right)\tilde{L}_n[u],\ \tilde{L}_1[u] = u,\ u = u(z),\ n = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

β_n – параметр. Если в операторе $\tilde{L}_N$ параметр $\beta = 0$, то $\tilde{L}_N = L_N$. Здесь и далее $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1})$. При этом относительно оператора $\tilde{L}_N$ справедливо представление (лемма 1 из работы [1])

$$\tilde{L}_n[u] = \sum_{j=0}^{n-1} s_j L_{n-j}[u], \tag{3}$$

где $s_0 = 1$; s_j, $j = 1, \ldots, n-1$, – основные симметрические полиномы параметров $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$.

Из формул (1) и (2) для $n = 2, 3, 4$ последовательно находим

$$\tilde{P}_1^{[2]} : q'' + 3q^2 + \beta_1 q = \frac{z}{2}, \tag{4}$$

$$\tilde{P}_1^{[4]} : q^{(4)} + 10q^3 + 5(q')^2 + 10qq'' + (\beta_1 + \beta_2)(3q^2 + q'') + \beta_1\beta_2 q = \frac{z}{2}, \tag{5}$$

$$\begin{gathered}\tilde{P}_1^{[6]} : q^{(6)} + 35q^4 + 10q^3 s_1 + 3q^2 s_2 + s_3 q + 5(14q + s_1)(q')^2 + \\ + (70q^2 + 10qs_1 + s_2)q'' + 21(q'')^2 + 28q'q^{(3)} + (14q + s_1)q^{(4)} = \frac{z}{2},\end{gathered} \tag{6}$$

$$s_1 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3,\ s_2 = \beta_2\beta_3 + \beta_1(\beta_2 + \beta_3),\ s_3 = \beta_1\beta_2\beta_3.$$

Иерархию (1) называют обобщенной иерархией первого уравнения Пенлеве (см. [2–4]), поскольку первое уравнение этой иерархии с точностью до калибровочного преобразования, так же как и первый член иерархии $P_1^{[2n-2]}$, есть первое уравнение Пенлеве, а последующие уравнения обобщают соответствующие уравнения иерархии $P_1^{[2n-2]}$. При этом иерархия $P_1^{[2n-2]}$ может быть получена из иерархии $\tilde{P}_1^{[2n-2]}$ при $\beta = 0$. Заметим, что уравнение $\tilde{P}_1^{[2n-2]}$ имеет порядок $2n - 2$, где n определяет номер оператора $\tilde{L}_n$ и номер уравнения иерархии. Аналитические свойства решений первого уравнения Пенлеве, т. е. случай $n = 2$, рассмотрены, например, в работах [5–7]. Заметим также [1; 2], что уравнения иерархии (1) в соответствии с заменой $q = w' - w^2$ относительно $w(z)$ определяют $(2n-3)$-параметрические семейства решений соответствующих уравнений обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве при $\alpha = \frac{1}{2}$, задаваемой соотношением

$$\tilde{P}_2^{[2n]}: \left(\frac{d}{dz} + 2w\right)\tilde{L}_n\left[w' - w^2\right] - zw - \alpha = 0,\ n = 1, 2, \ldots.$$

Локальные свойства решений

Уравнение $P_1^{[2n-2]}$, которое образовано оператором L_n, имеет структуру с одним доминирующим членом [7]. Аналогичное свойство справедливо и для уравнения $\tilde{P}_1^{[2n-2]}$. Для уравнений (4)–(6) это члены $3q^2$, $10q^3$, $35q^4$ соответственно.

В общем случае справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Уравнение (1) имеет структуру*

$$q^{(2n)} + \gamma_n q^{n+1} + P_n\left(\beta, q, q', \ldots, q^{(2n-2)}\right) = \frac{z}{2},\ n > 1, \tag{7}$$

где степень одночленов полинома P_n относительно $q, q', \ldots, q^{(2n-2)}$ не превосходит n.

Доказательство леммы можно провести методом индукции, как это сделано для уравнения $P_1^{[2n-2]}$ [7]. Однако, поскольку структура (7) определяется доминирующим членом оператора $\tilde{L}_n$, который в силу представления (3) совпадает с доминирующим членом оператора L_n, справедливость леммы непосредственно следует из доказательства аналогичного утверждения для уравнения $P_1^{[2n-2]}$. При этом относительно коэффициента γ_n доминирующего члена имеем рекуррентное соотношение $(n+1)\gamma_{n+1} = (4n+2)\gamma_n$ или в явной форме $\gamma_n = \dfrac{2^{2n-1}\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+1)}$, где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция.

Лемма 2. *Произвольное мероморфное решение уравнения (1) не может иметь конечное число полюсов.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что, как и в случае первого уравнения Пенлеве, уравнение (1) не имеет рациональных решений, поскольку для существования рационального решения необходимо, чтобы точка $z = \infty$ для решения $q(z)$ была полюсом или точкой голоморфности. Однако произвольное уравнение из иерархии (1) не допускает даже формального полярного или голоморфного разложения в окрестности $z = \infty$. Следовательно, уравнения иерархии (1) не имеют рациональных решений. Пусть $q(z)$ – мероморфное решение. Оно не может содержать конечное число полюсов, так как уравнения иерархии (1) имеют только один доминирующий член. В противном случае, следуя доказательству аналогичного утверждения для первого уравнения Пенлеве [8, с. 118; 9, с. 56], т. е. допуская существование у мероморфного решения $q(z)$ конечного числа полюсов и сделав замену $v(z) = P(z)q(z)$ с подходящим полиномом $P(z)$, получаем, что целая трансцендентная функция $v(z)$ удовлетворяет полиномиальному дифференциальному уравнению с одним доминирующим членом, что невозможно [8, с. 118].

Заметим также, что из совпадения доминирующих членов уравнений (1) и уравнения $P_1^{[2n-2]}$ и, по сути, из структуры (7) следует, что решение $q^{[n]}(z)$ n-го уравнения (1), так же как и решение уравнения $P_1^{[2n-2]}$, может иметь только двукратные полюсы с нулевым вычетом и главной частью

$$q^{[n]}(z) \sim c_{-2}(z - z_0)^{-2},\ c_{-2} = -k(k+1),\ k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Разложение решения уравнения (4) в окрестности подвижного полюса z_0 имеет вид

$$q^{[2]}(z) = \frac{-2}{t^2} - \frac{\beta_1}{6} - \left(6z_0 + \beta_1^2\right)\frac{t^2}{120} - \frac{t^3}{12} + ht^4 - \left(6z_0 + \beta_1^2\right)^2\frac{t^6}{86\,400} + \sum_{j=7}^{\infty} c_j t^j, \tag{8}$$

где $t = z - z_0$, h – произвольная постоянная, а коэффициенты c_j, $j > 6$, однозначно определяются через z_0, h и параметр β_1.

Для определения индексов Фукса r уравнений (5) и (6), т. е. степеней $\left(z - z_0\right)^r$ в полярных разложениях решений, для которых c_j остаются произвольными, положим

$$q = c_{-2}\left(z - z_0\right)^{-2} + \delta\left(z - z_0\right)^{r-2}.$$

Тогда для уравнения (5) в первом порядке по δ имеем $c_{-2} = -2$ и $c_{-2} = -6$. При $c_{-2} = -2$ индексы Фукса принимают значения $r_1 = -3$, $r_2 = 0$, $r_3 = 3$, $r_4 = 6$. Неотрицательные индексы Фукса влекут произвольность коэффициентов c_0, c_3, c_6. В этом случае разложение решения уравнения (5) в окрестности подвижного полюса $z = z_0$ имеет вид

$$\begin{aligned} q^{[3]}(z) = -2t^{-2} + h_1 + \left(30h_1^2 + 6h_1s_1 + s_2\right)\frac{t^2}{20} + h_2t^3 - \\ - \left(z_0 + 280h_1^3 + 84h_1^2s_1 + s_1s_2 + 6h_1s_1^2 + 8h_1s_2\right)\frac{t^4}{112} - \\ - \left(1 + 12s_1h_2 + 120h_1h_2\right)\frac{t^5}{160} + h_3t^6 + \sum_{j=7}^{\infty} c_j t^j, \end{aligned} \tag{9}$$

где $t = z - z_0$, h_1, h_2, h_3 – произвольные постоянные, а коэффициенты c_j, $j > 6$, однозначно определяются через z_0, h_1, h_2, h_3 и параметры $s_1 = \beta_1 + \beta_2$, $s_2 = \beta_1\beta_2$. По сути, разложение (9) в случае сходимости представляет собой разложение общего решения уравнения (5) в окрестности $z = z_0$.

При $c_{-2} = -6$ индексы Фукса $r_j \in \{-5, -3, 6, 8\}$ и разложение решения уравнения (5) имеет вид

$$\begin{aligned} q^{[3]}(z) = -6t^{-2} - \frac{s_1}{10} + \left(10s_2 - 3s_1^2\right)\frac{t^2}{1400} + \\ + \left(25z_0 - s_1^3 + 5s_1s_2\right)\frac{t^4}{25\,200} + \frac{t^5}{480} + h_1t^6 + h_2t^8 + \sum_{j=9}^{\infty} c_j t^j, \end{aligned} \tag{10}$$

где $t = z - z_0$, h_1, h_2 – произвольные постоянные, а коэффициенты c_j, $j > 8$, однозначно определяются через z_0, h_1, h_2 и параметры $s_1 = \beta_1 + \beta_2$, $s_2 = \beta_1\beta_2$.

Для уравнения (6) возможны три случая: $c_{-2} \in \{-2, -6, -12\}$. Решение уравнения (6) в окрестности подвижного полюса $z = z_0$ имеет:

а) либо разложение

$$\begin{aligned} q^{[4]}(z) = -2t^{-2} + h_1 + h_2t^2 + h_3t^3 + \frac{t^4}{112}\left(s_3 + 6s_2h_1 + 10h_1^2\left(3s_1 + 14h_1\right) - 20\left(s_1 + 14h_1\right)h_2\right) + \\ + h_4t^5 + \frac{t^6}{2592}\left(-z_0 - 6h_1\left(2s_3 + 13s_2h_1 + 315h_1^3\right) - s_1\left(s_3 + 6h_1\left(s_2 + 90h_1^2 - 60h_2\right)\right) - \right. \\ \left. - 20\left(s_2 - 126h_1^2\right)h_2 + 168h_2^2 + s_1^2\left(20h_2 - 30h_1^2\right)\right) + \frac{t^7}{5600}\left(-1 - 12s_2h_3 - 840h_1^2h_3 - \right. \\ \left. - 560h_2h_3 - 2240h_1h_4 - 40s_1\left(3h_1h_3 + 4h_4\right)\right) + h_5t^8 + \sum_{j=9}^{\infty} c_j t^j, \end{aligned} \tag{11}$$

где $t = z - z_0$, коэффициенты c_0, c_2, c_3, c_5, c_8 остаются произвольными, а остальные коэффициенты c_j, $j > 8$, однозначно определяются через свободные коэффициенты, z_0 и параметры s_1, s_2, s_3;

б) либо разложение

$$\begin{aligned} q^{[4]}(z) = -6t^{-2} + h_1 + \left(s_2 + 10h_1\left(s_1 + 7h_1\right)\right)\frac{t^2}{140} + \\ + \left(-s_3 + 10s_1^2h_1 + 8s_2h_1 + 840h_1^3 + s_1\left(s_2 + 180h_1^2\right)\right)\frac{t^4}{1008} + h_2t^5 + \sum_{j=9}^{\infty} c_j t^j, \end{aligned} \tag{12}$$

где коэффициенты c_0, c_5, c_8, c_{10} остаются произвольными, а остальные коэффициенты c_j однозначно определяются через свободные коэффициенты, z_0 и параметры s_1, s_2, s_3;

в) либо разложение

$$q^{[4]}(z) = -12t^{-2} - \frac{s_1}{14} + \left(14s_2 - 5s_1^2\right)\frac{t^2}{5880} +$$
$$+ \left(21s_1s_2 - 5s_1^3 - 49s_3\right)\frac{t^4}{543\,312} + \sum_{j=5}^{\infty} c_j t^j, \quad (13)$$

где коэффициенты c_8, c_{10}, c_{12} остаются произвольными, а остальные коэффициенты c_j однозначно определяются через свободные коэффициенты, z_0 и параметры s_1, s_2, s_3.

Доказательство сходимости построенных разложений можно свести к построению эквивалентных исходным уравнениям систем Брио и Буке, как это сделано для уравнений $P_1^{[2n-2]}$ [6; 7]. Действительно, для уравнения (6) положим

$$u_{j+1} = t^{j+2}q^{(j)} - (-1)^j (j+1)!c_{-2}, \ z = z_0 - t, \ j = 1, \dots, 6. \quad (14)$$

Тогда для функций $u_j(t)$ имеем эквивалентную уравнению (6) систему

$$\begin{gathered} tu_j' = (j+1)u_j + u_{j+1}, \ j = 1, 2, \dots, 5, \\ tu_6' = P_3(s_1, s_2, s_3, u_1, u_2, u_3, u_4) \end{gathered} \quad (15)$$

с полиномиальной правой частью, которая при $c_{-2} \in \{-2, -6, -12\}$ является системой Брио и Буке, причем в силу замены (14) и разложений (11)–(13) с формальным голоморфным решением $u_j \to 0$ при $t \to 0$. Ряды, представляющие эти решения, являются сходящимися согласно теореме A12 из работы [5] и, следовательно, с учетом замены (14) порождают полярные решения уравнения (6) с разложениями (11)–(13). Заметим также, что собственные значения матрицы линейной части системы (15) совпадают с индексами Фукса.

Уравнение (1) и линейное уравнение второго порядка

Известно, что общее решение линейного уравнения

$$u'' + \left(\lambda q(z) + \mu\right)u = 0, \quad (16)$$

где $q(z)$ – двоякопериодическая эллиптическая функция Вейерштрасса $\wp(z)$ с периодами ω, ω' и двукратными полюсами в точках $m\omega + m'\omega'$, m', $m \in \mathbb{Z}$, μ – произвольная постоянная, а $\lambda = -n(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$ (уравнение Ламе), представляет собой мероморфную функцию. Действительно, в этом случае уравнение (16) – линейное уравнение с регулярными особыми точками в полюсах мероморфной функции $\wp(z)$. При этом определяющее уравнение в данных особых точках имеет целые корни $\rho_1 = n + 1$, $\rho_2 = -n$. Следовательно, первое решение, соответствующее старшему показателю $\rho_1 = n + 1$, голоморфное, а второе решение, линейно независимое от первого, полярное в окрестности особых точек, при этом оно не имеет логарифмического члена, что является достаточным для мероморфности общего решения [10, с. 150].

Рассмотрим уравнение (16), где $q(z)$ – фиксированное мероморфное решение уравнений (4)–(6). Ясно, что в этом случае уравнение (16) – уравнение с конечными регулярными особыми точками в полюсах функции $q(z)$, и для построения фундаментальной системы решений можно использовать метод Фробениуса. Заметим, что для уравнения (4) в стандартной форме это уравнение рассматривалось ранее (см., например, [11]), а в работе [12] для уравнения Шази третьего порядка из статьи [11] построены решения, выражающиеся через эллиптическую функцию $\wp(z)$.

Пусть $q^{[2]}(z)$ – решение уравнения (4) с разложением (8) в окрестности подвижного полюса z_0. Тогда из определяющего уравнения $\rho(\rho - 1) - 2\lambda = 0$ с условием $\lambda = \frac{m(m+1)}{2}$, $m \in \mathbb{N}$, имеем целые показатели $\rho_1 = m + 1$, $\rho_2 = -m$. Для старшего показателя $\rho_1 = m + 1$ получаем голоморфное решение

$$u_1^{[2]}(z) = (z - z_0)^{m+1} \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j, \ a_0 = 1, \quad (17)$$

где

$$a_1 = a_3 = 0,\ a_2 = \frac{m\beta_1(1+m) - 12\mu}{24(3+2m)},\ a_5 = \frac{m^2+m}{240(3+m)},$$

$$a_4 = \frac{(m+m^2)\left(36(3+2m)z_0 + \left(18 + (17m+5m^2)\right)\beta_1^2\right) - 120(m+m^2)\beta_1\mu + 720\mu^2}{5760(3+2m)(5+2m)}, \ldots.$$

Второе решение $u_2^{[2]}(z)$, полярное и линейно независимое от $u_1^{[2]}(z)$, можно построить по формуле

$$u_2^{[2]}(z) = u_1^{[2]}(z)\int\left(u_1^{[2]}(z)\right)^{-2}dz.$$

При этом условием отсутствия логарифма в $u_2^{[2]}(z)$ является $R_m^{[2]}(m) := \operatorname*{res}_{z=z_0}\left[\left(u_1^{[2]}(z)\right)^{-2}\right] = 0$, где $R_m^{[2]}(m)$ – вычет функции $\left(u_1^{[2]}(z)\right)^{-2}$ в полюсе z_0. В данном случае находим $R_m^{[2]}(1) = 0$, $R_m^{[2]}(2) = -\frac{1}{100}$, $R_m^{[2]}(3) = \frac{\beta_1 - \mu}{490}$. Следовательно, при $\lambda = 1$ или $\lambda = 6$ с дополнительным условием на параметры $\beta_1 - \mu = 0$ фундаментальная система решений уравнения (16) мероморфна.

Пусть $q^{[3]}(z)$ – решение уравнения (5). Здесь возможны два случая: $c_{-2} = -2$ и $c_{-2} = -6$ с разложениями (9) и (10) в окрестности подвижного полюса z_0 соответственно, где принимаем $\beta_1 + \beta_2 = s_1$, $\beta_1\beta_2 = s_2$.

В случае $c_{-2} = -2$, как и выше, имеем решение $u_1^{[3]}(z)$ вида (17), где

$$a_1 = a_3 = 0,\ a_2 = -\frac{(m^2+m)h_1 + 2m}{12+8m},\ a_5 = -\frac{(m^2+m)h_2}{20(3+2m)},$$

$$a_4 = \frac{20\mu^2 + (m+m^2)\left(-(3+2m)s_2 + h_1\left((-18-12m)s_1 + 20\mu + 5\left(-18 + (-11+m)m\right)h_1\right)\right)}{160(3+2m)(5+2m)}, \ldots.$$

При этом находим $R_m^{[3]}(1) = 0$, $R_m^{[3]}(2) = \frac{3h_2}{25}$, $R_m^{[3]}(3) = \frac{3(-5 + 160\mu h_2 - 96h_2s_1)}{19\,600}$.

В случае $c_{-2} = -6$ положим $\lambda = \frac{p(p+1)}{6}$, $p \in \mathbb{N}$. Тогда корни $\rho_1 = p + 1$, $\rho_2 = -p$ определяющего уравнения являются целыми, и, следовательно, имеем голоморфное в окрестности z_0 решение вида (17), где

$$a_1 = a_3 = a_5 = 0,\ a_2 = \frac{ps_1 + p^2s_1 - 60\mu}{120(3+2p)},$$

$$a_4 = \frac{25\,200\mu^2 + (p+p^2)\left(-840\mu s_1 + (54 + 43p + 7p^2)s_1^2 - 60(3+2p)s_2\right)}{201\,600(3+2p)(5+2p)}, \ldots.$$

Если обозначить вычет $R_p^{[3]}(p) := \operatorname*{res}_{z=z_0}\left[\left(u_1^{[3]}(z)\right)^{-2}\right] = 0$, то находим $R_p^{[3]}(1) = R_p^{[3]}(2) = 0$, $R_p^{[3]}(3) = \frac{1}{11\,760}$.

Следовательно, в случае решения $q^{[3]}(z)$ уравнения (5) и $\lambda = 1$ ($m = 1$, $p = 2$) фундаментальная система решений уравнения (16) мероморфна как в окрестности полюсов с разложением (9), так и в окрестности полюсов с разложением (10).

Пусть $q^{[4]}(z)$ – решение уравнения (6). Здесь возможны три случая: $c_{-2} \in \{-2, -6, -12\}$ с разложениями (11), (12) и (13) в окрестности подвижного полюса z_0 соответственно.

В случае $c_{-2} = -2$, как и выше, имеем решение $u_1^{[4]}(z)$ вида (17), где

$$a_1 = a_3 = 0,\ a_2 = -\frac{2\mu + \left(m + m^2\right)h_1}{12 + 8m},\ a_5 = -\frac{\left(m^2 + m\right)h_3}{20\left(3 + m\right)},$$

$$a_4 = \frac{\left(2\mu + \left(m + m^2\right)h_1\right)^2 - 4\left(m + m^2\right)\left(3 + 2m\right)h_2}{32\left(3 + 2m\right)\left(5 + 2m\right)}, \ldots.$$

При этом находим $R_m^{[3]}(1) = 0,\ R_m^{[3]}(2) = \frac{3h_3}{25},\ \ R_m^{[3]}(3) = \frac{6\left(\mu h_3 + 6h_1h_3 + 5h_4\right)}{245}.$

В случае $c_{-2} = -6$ положим $\lambda = \frac{p(p+1)}{6},\ p \in \mathbb{N}$. Тогда корни $\rho_1 = p + 1,\ \rho_2 = -p$ определяющего уравнения являются целыми, и, следовательно, имеем голоморфное в окрестности z_0 решение вида (17), где $c_0 = h_1$,

$$a_1 = a_3 = a_5 = 0,\ a_2 = -\frac{6\mu + ph_1 + p^2h_1}{12\left(3 + 2p\right)},$$

$$a_4 = \frac{-3\left(p + p^2\right)\left(3 + 2p\right)s_2 + 1260\mu^2 + 5h_1\left(p + p^2\right)\left(-6\left(3 + 2p\right)s_1 + 84\mu + 7\left(-18 + \left(p^2 - 11p\right)\right)h_1\right)}{10\,080\left(3 + 2p\right)\left(5 + 2p\right)}, \ldots.$$

При этом находим $R_p^{[3]}(1) = R_p^{[3]}(2) = 0,\ R_p^{[3]}(3) = \frac{2h_2}{49}.$

В случае $c_{-2} = -12$ положим $\lambda = \frac{l(l+1)}{12},\ l \in \mathbb{N}$. Тогда корни $\rho_1 = l + 1,\ \rho_2 = -l$ определяющего уравнения являются целыми, и, следовательно, имеем голоморфное в окрестности z_0 решение вида (17), где

$$a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = 0,\ a_2 = \frac{ls_1 + l^2s_1 - 168\mu}{336\left(2l + 3\right)},$$

$$a_4 = \frac{141\,120\mu^2 - 1680\left(l + l^2\right)\mu s_1 + \left(l + l^2\right)\left(s_1^2\left(60 + 45l + 5l^2\right) - 56\left(3 + 2l\right)s_2\right)}{1\,128\,960\left(3 + 2l\right)\left(5 + 2l\right)}, \ldots.$$

Если при этом обозначить вычет $R_l^{[4]}(l) := \operatorname*{res}_{z = z_0}\left[\left(u_1^{[4]}(z)\right)^{-2}\right]$, то находим $R_l^{[4]}(1) = R_l^{[4]}(2) = R_p^{[3]}(3) = 0$, $R_p^{[3]}(4) = -\frac{1}{2\,449\,440}$. Следовательно, в случае уравнения (6) и $\lambda = 1$ ($m = 1$, $p = 2$, $l = 3$) фундаментальная система решений уравнения (16) мероморфна в окрестности полярной особой точки с разложениями (11)–(13). Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть в уравнении (16) выполнено одно из условий:*

1) $q(z)$ есть произвольное решение уравнения (4) и $\lambda = 1$ либо $\lambda = 6$ с дополнительным условием $\mu = \beta_1$;

2) $q(z)$ есть произвольное мероморфное решение уравнения (5) или уравнения (6) и $\lambda = 1$.

Тогда общее решение уравнения (16) мероморфно.

Заметим, что частично теорема 1 была анонсирована в публикации [13].

Библиографические ссылки

1. Громак ВИ. Аналитические свойства решений уравнений обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве. *Дифференциальные уравнения.* 2020;56(8):1017–1033.

2. Кудряшов НА. *Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений.* 2-е издание. Москва: Институт компьютерных исследований; 2004. 359 с.

3. Sakka AH. Linear problems and hierarchies of Painlevé equations. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical.* 2009; 42(2):025210. DOI: 10.1088/1751-8113/42/2/025210.

4. Айнс ЭЛ. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* Эфрос АМ, редактор. Харьков: Научно-техническое издательство Украины; 1939. 719 с.

5. Gromak VI, Laine I, Shimomura S. *Painlevé differential equations in the complex plane.* Berlin: Walter de Gruyter & Co.; 2002. VIII, 303 p. (de Gruyter studies in mathematics; volume 28). DOI: 10.1515/9783110198096.

6. Gromak VI. The Bäcklund transformations of the higher order Painlevé equations. In: Coley A, Levi D, Milson R, Rogers C, Winternitz P, editors. *Bäcklund and Darboux transformations. The geometry of solitons. AARMS – CRM workshop; 1999 June 4–9; Halifax, Canada.* Providence: American Mathematical Society; 2001. p. 3–28 (CRM proceedings and lecture notes; volume 29).

7. Грицук ЕВ. О локальных свойствах решений уравнений ${}_{2n}P_1$. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика.* 2011;2:113–118.

8. Виттих ГВ. *Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям.* Гольдберг АА, переводчик; Волковыский ЛИ, редактор. Москва: Физматгиз; 1960. 319 с.

9. Еругин НП. *Проблема Римана.* Минск: Наука и техника; 1982. 336 с.

10. Гурса Э. *Курс математического анализа. Том 3. Часть 2. Интегральные уравнения. Вариационное исчисление.* Шестопал МГ, переводчик; Степанов ВВ, редактор. Москва: Государственное технико-теоретическое издательство; 1934. 320 с.

11. Chazy J. Sur les équations différentielles du troisième ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes. *Acta Mathematica.* 1911;34:317–385. DOI: 10.1007/BF02393131.

12. Атрохов КГ, Громак ЕВ. О решениях уравнения Шази. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2021;2:51–59. На англ. DOI: 10.33581/2520-6508-2021-2-51-59.

13. Громак ЕВ. О мероморфных решениях линейных уравнений со специальным инвариантом. В: *Институт математики НАН Беларуси. Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений. Материалы 10-го Международного научного семинара; 13–17 сентября 2021 г.; Минск, Беларусь = Analytical methods of analysis and differential equations. Materials of the 10th International workshop; 2021 September 13–17; Minsk, Belarus.* Минск: ИВЦ Минфина; 2021. с. 30.

References

1. Gromak VI. [Analytic properties of solutions to the equations in the generalised hierarchy of the second Painlevé equation]. *Differentsial'nye uravneniya.* 2020;56(8):1017–1033. Russian.

2. Kudryashov NA. *Analiticheskaya teoriya nelineinykh differentsial'nykh uravnenii* [Analytic theory of non-linear differential equations]. 2nd edition. Moscow: Institute of Computer Science; 2004. 359 p. Russian.

3. Sakka AH. Linear problems and hierarchies of Painlevé equations. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical.* 2009; 42(2):025210. DOI: 10.1088/1751-8113/42/2/025210.

4. Ince EL. *Ordinary differential equations.* New York: Dover Publications; 1956. VIII, 558 p.

Russian edition: Ince EL. *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya.* Efros AM, editor. Kharkiv: Nauchno-tekhnicheskoe izdatel'stvo Ukrainy; 1939. 719 p.

5. Gromak VI, Laine I, Shimomura S. *Painlevé differential equations in the complex plane.* Berlin: Walter de Gruyter & Co.; 2002. VIII, 303 p. (de Gruyter studies in mathematics; volume 28). DOI: 10.1515/9783110198096.

6. Gromak VI. The Bäcklund transformations of the higher order Painlevé equations. In: Coley A, Levi D, Milson R, Rogers C, Winternitz P, editors. *Bäcklund and Darboux transformations. The geometry of solitons. AARMS – CRM workshop; 1999 June 4–9; Halifax, Canada.* Providence: American Mathematical Society; 2001. p. 3–28 (CRM proceedings and lecture notes; volume 29).

7. Gritsuk EV. [On local properties of solutions to the equations ${}_{2n}P_1$]. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika.* 2011;2:113–118. Russian.

8. Wittich H. *Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen.* Berlin: Springer-Verlag; 1955. IV, 163 S. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, neue Folge; Heft 8).

Russian edition: Wittich HV. *Noveishie issledovaniya po odnoznachnym analiticheskim funktsiyam.* Gol'dberg AA, translator; Volkovyskii LI, editor. Moscow: Fizmatgiz; 1960. 319 p.

9. Erugin NP. *Problema Rimana* [The Riemann problem]. Minsk: Nauka i tekhnika; 1982. 336 p. Russian.

10. Goursat E. *Cours d'analyse mathématique. Tome 3. Intégrales infiniment voisines. Équations aux dérivées partielles du second ordre. Équations intégrales. Calcul des variations.* 5me édition. Paris: Gauthier-Villars; 1927. 712 p.

Russian edition: Goursat E. *Kurs matematicheskogo analiza. Tom 3. Chast' 2. Integral'nye uravneniya. Variatsionnoe ischislenie.* Shestopal MG, translator; Stepanov VV, editor. Moscow: Gosudarstvennoe tekhniko-teoreticheskoe izdatel'stvo; 1934. 320 p.

11. Chazy J. Sur les équations différentielles du troisième ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes. *Acta Mathematica.* 1911;34:317–385. DOI: 10.1007/BF02393131.

12. Atrokhau KG, Gromak EV. On solutions of the Chazy equation. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2021;2:51–59. DOI: 10.33581/2520-6508-2021-2-51-59.

13. Gromak EV. [On meromorphic solutions of linear equations with a special invariant]. In: *Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus. Analytical methods of analysis and differential equations. Materials of the 10th International workshop; 2021 September 13–17; Minsk, Belarus.* Minsk: Information and Computing Center of the Ministry of Finance of the Republic of Belarus; 2021. p. 30. Russian.

Получена 31.01.2022 / исправлена 16.06.2022 / принята 16.06.2022.
Received 31.01.2022 / revised 16.06.2022 / accepted 16.06.2022.