Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский государственный университет

О.А. Кононова, Н.И. Ильинкова,
Н.С. Романова, Н.К. Филиппова

Уравнения с частными производными первого порядка

Минск
2012

УДК 517.955(075.8)(076.1)

Решение о депонировании документа вынес:
Совет физического факультета, № 3 от 01.11.2012

Авторы:
О. А. Кононова, Н. И. Ильинкова, Н. С. Романова, Н. К. Филиппова

Рецензенты:
Белявский С. С., канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры прикладной математики и экономической кибернетики БГЭУ,
Альсевич Л. А., канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики ФПМИ БГУ

Уравнения с частными производными первого порядка [Электронный ресурс] : учеб.-метод. пособие / О. А. Кононова [и др.]. – Электрон. текстовые дан. – Минск : БГУ, 2012.

В настоящем учебно-методическом пособии рассматриваются методы построения общих решений и решений задачи Коши линейных однородных и квазилинейных уравнений с частными производными первого порядка. Пособие содержит необходимый теоретический материал и примеры решения типовых задач.

Предназначено студентам университетов, обучающихся на физических факультетах.

1. Линейные однородные уравнения с частными производными первого порядка

Общий вид уравнения с частными производными первого порядка.

$$\Phi\left(x_1, x_2, \cdots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \qquad (1)$$

Решением уравнения (1) называется функция $u = u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ определенная и непрерывная вместе с частными производными в некоторой области изменения переменных $x_1, x_2, \cdots, x_n$ и обращающая уравнение (1) в тождество (в этой области).

Линейным однородным уравнением с частными производными первого порядка называется уравнение вида

$$f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \qquad (2)$$

Рассмотрим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)} = \cdots = \frac{dx_n}{f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)} \qquad (3)$$

Система (3) называется системой обыкновенных дифференциальных уравнений соответствующей уравнению (2).

Предположим, что функции $f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n), i = \overline{1, n}$ определены и непрерывны вместе с частными производными по $x_1, x_2, \cdots, x_n$ и не обращаются одновременно в ноль ни в одной точке рассматриваемой области.

Система (3) имеет ровно $n-1$ независимых первых интегралов.

Теорема 1. Всякий первый интеграл системы (3) является решением уравнения (2).

Теорема 2. Всякий решение уравнения (2) является первым интегралом системы (3).

Теорема 3. Пусть $\varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \varphi_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ — независимые первые интегралы системы (3), тогда $u = \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{n-1})$, где Φ любая непрерывно дифференцируемая функция по $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{n-1}$, является общим решением уравнения (2).

Задача Коши для однородного линейного уравнения с частными производными первого порядка заключается в следующем: среди всех решений уравнения(2) надо найти такое решение

$$u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n), \qquad (4)$$

которое удовлетворяет начальным условиям

$$u=\varphi\left(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}\right) \text{ при } x_n=x_n^0, \tag{5}$$

где φ заданная непрерывно дифференцируемая функция от $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$.

Геометрический смысл задачи Коши заключается в нахождении интегральной поверхности, проходящей через заданную интегральную кривую.

Правило нахождения решения задачу Коши (4)-(5):

1) Составить соответствующую систему (3) обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме и найти $n-1$ независимых первых интегралов
$$\varphi_1\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right),\varphi_2\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right),\cdots,\varphi_{n-1}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right). \tag{6}$$
2) Заменить в (6) $x_n=x_n^0$, то есть имеем
$$\begin{cases}\varphi_1\left(x_1,x_2,\cdots,x_n^0\right)=\overline{\varphi}_1,\\ \varphi_2\left(x_1,x_2,\cdots,x_n^0\right)=\overline{\varphi}_2,\\ \cdots,\\ \varphi_{n-1}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n^0\right)=\overline{\varphi}_{n-1}.\end{cases} \tag{7}$$
3) Разрешить систему (7) относительно $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ то есть:
$$\begin{cases}x_1=\omega_1\left(\overline{\varphi}_1,\overline{\varphi}_2,\cdots,\overline{\varphi}_{n-1}\right),\\ x_2=\omega_2\left(\overline{\varphi}_1,\overline{\varphi}_2,\cdots,\overline{\varphi}_{n-1}\right),\\ \cdots,\\ x_{n-1}=\omega_{n-1}\left(\overline{\varphi}_1,\overline{\varphi}_2,\cdots,\overline{\varphi}_{n-1}\right).\end{cases} \tag{8}$$
4) Подставить (8) в (5), меняя функции $\overline{\varphi}_1,\overline{\varphi}_2,\cdots,\overline{\varphi}_{n-1}$ на соответствующие первые интегралы (6), таким образом построить функцию:
$$u=f\left(\omega_1\left(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1}\right),\omega_2\left(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1}\right),\cdots,\omega_{n-1}\left(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1}\right)\right),$$
которая и задает решение задачи Коши .

2. Квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка.

Квазилинейным уравнением с частными производными первого порядка называется уравнение вида

$$f_1\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,u\right)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\cdots+f_n\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,u\right)\frac{\partial u}{\partial x_n}=h\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,u\right) \tag{1}$$

Замечание. Отличие однородного уравнения от квазилинейного заключается в том, что даже если $h=0$, то хотя бы одна из функций f_i должна зависеть от искомой функции u.

Предположим, что функции $f_i\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right), i=\overline{1,n}$ и функция $h\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,u\right)$ определены и непрерывны вместе с частными производными и не обращаются одновременно в ноль ни в одной точке рассматриваемой области.

Решение уравнения (1) ищем в неявном виде

$$V\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,u\right)=0 \tag{2}$$

причем $\dfrac{\partial V}{\partial u}\neq 0$ в некоторой области изменения переменных $x_1,x_2,\cdots,x_n,u$.

Продифференцируем выражение (2) по x_i:

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}+\frac{\partial V}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}=0\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x_i}=\left.\frac{\partial V}{\partial x_i}\middle/\frac{\partial V}{\partial u}\right. \quad \left(i=\overline{1,n}\right) \tag{3}$$

Подставим значение производных (3) в уравнение (1), и преобразовав полученное уравнение будем иметь уже однородное линейное уравнение относительно функции V:

$$f_1\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,u\right)\frac{\partial V}{\partial x_1}+\cdots+f_n\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,u\right)\frac{\partial V}{\partial x_n}+h\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,u\right)\frac{\partial V}{\partial u}=0 \tag{4}$$

Составим соответствующую уравнению (4) систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{f_1\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,u\right)}=\cdots=\frac{dx_n}{f_n\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,u\right)}=\frac{du}{h\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,u\right)} \tag{5}$$

Система (5) имеет порядок n, следовательно, существует n независимых первых интегралов:

$$\varphi_1\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,u\right),\varphi_2\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,u\right),\cdots,\varphi_n\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,u\right) \tag{6}$$

Тогда общее решение уравнения (4) будет $V=\Phi\left(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n\right)$, общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$\Phi\left(\varphi_1\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,u\right),\varphi_2\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,u\right),\cdots,\varphi_n\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,u\right)\right)=0.$$

Задача Коши для однородного линейного уравнения с частными производными первого порядка заключается в следующем: среди всех решений уравнения(1) надо найти такое решение

$$u=f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right), \tag{7}$$

которое удовлетворяет начальным условиям

$$u=\varphi\left(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}\right) \text{ при } x_n=x_n^0, \tag{8}$$

где φ заданная непрерывно дифференцируемая функция от $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$.

Правило нахождения решения задачу Коши (7)-(8):

1) Составить соответствующую систему (5) обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме и найти n независимых первых интегралов (6)
2) Заменить в (6) $x_n = x_n^0$, то есть имеем

$$\begin{cases} \varphi_1\left(x_1, x_2, \cdots, x_n^0, u\right) = \overline{\varphi}_1, \\ \varphi_2\left(x_1, x_2, \cdots, x_n^0, u\right) = \overline{\varphi}_2, \\ \cdots, \\ \varphi_n\left(x_1, x_2, \cdots, x_n^0, u\right) = \overline{\varphi}_n. \end{cases} \tag{9}$$

3) Разрешить систему (9) относительно $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, u$ то есть:

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1\left(\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \cdots, \overline{\varphi}_n\right), \\ \cdots, \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}\left(\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \cdots, \overline{\varphi}_n\right), \\ u = \omega\left(\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \cdots, \overline{\varphi}_n\right). \end{cases} \tag{10}$$

4) Подставить (10) в (7), меняя функции $\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \cdots, \overline{\varphi}_n$ на соответствующие первые интегралы (6), таким образом построить функцию:
$\omega\left(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n\right) = f\left(\omega_1\left(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n\right), \omega_2\left(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n\right), \cdots, \omega_{n-1}\left(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n\right)\right)$
которая и задает решение задачи Коши.

3. Примеры решений однородных уравнений

Найти общее решение

Пример 1. $\left(mz - ny\right)\dfrac{\partial u}{\partial x} + \left(nx - lz\right)\dfrac{\partial u}{\partial y} + \left(ly - mx\right)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$ (1)

►Построим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме, соответствующей однородному уравнению (1)

$$\frac{dx}{mz - ny} = \frac{dy}{nx - lz} = \frac{dz}{ly - mx}.$$

Используя свойства пропорций, получим два независимых первых интеграла:

$$lx + my + nz = c_1 = \psi_1,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = c_2 = \psi_2.$$

Функция $u = F\left(lx + my + nz, x^2 + y^2 + z^2\right)$ является общим решением уравнения .◄

Пример 2. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + \left(z - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$ (2)

►Построим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме, соответствующей однородному уравнению (2)

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Система имеет два независимых первых интеграла. Для нахождения одного из них решается уравнение с разделенными переменными

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}\quad\Rightarrow\frac{y}{x}=c_1=\psi_1. \tag{3}$$

Для нахождения другого требуется решить однородное уравнение.

$$\frac{dx}{x}=\frac{dz}{z-\sqrt{x^2+\left(c_1x\right)^2+z^2}}. \tag{4}$$

В уравнении (4) сделаем замену $z=tx$. Получим уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dx}{x}=\frac{xdt+tdx}{tx-x\sqrt{1+c_1^{\,2}+t^2}}\quad\Rightarrow tdx-\sqrt{1+c_1^{\,2}+t^2}dx=xdt+tdx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dt}{\sqrt{1+c_1^{\,2}+t^2}}=0\Rightarrow\ln\left|x\right|+\ln\left|t+\sqrt{1+c_1^{\,2}+t^2}\right|=\ln c_2$$

Используя (3), имеем

$$x\left(\frac{z}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}+\frac{z^2}{x^2}}\right)=c_2\Rightarrow$$

$$z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=c_2=\psi_2$$

Функция $u=F\left(\frac{y}{x},z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$ является общим решением уравнения. ◄

Пример 3. $x\left(y+z\right)\frac{\partial u}{\partial x}+z\left(z-y\right)\frac{\partial u}{\partial y}+y\left(y-z\right)\frac{\partial u}{\partial z}=0$ (5)

►Построим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме, соответствующей однородному уравнению (5)

$$\frac{dx}{x\left(y+z\right)}=\frac{dy}{z\left(z-y\right)}=\frac{dz}{y\left(y-z\right)}.$$

Система имеет два независимых первых интеграла.

$$\frac{dy}{z\left(z-y\right)}=\frac{dz}{y\left(y-z\right)}\quad\Rightarrow ydy+zdz=0\Rightarrow y^2+z^2=c_1=\psi_1.$$

Используя свойства пропорций, имеем

$$\frac{dx}{x\left(y+z\right)}=\frac{dy-dz}{z^2-zy-y^2+zy}\quad\Rightarrow\frac{dx}{x}=\frac{dy-dz}{z-y}\Rightarrow x\left(z-y\right)=c_2=\psi_2.$$

Функция $u = F\left(y^2 + z^2, x(z-y)\right)$ является общим решением уравнения. ◄

Пример 4. $\left(x^3 + 3xy^2\right)\frac{\partial u}{\partial x} + 2y^3\frac{\partial u}{\partial y} + 2y^2 z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ (6)

►Построим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме, соответствующей однородному уравнению (6)

$$\frac{dx}{x^3 + 3xy^2} = \frac{dy}{2y^3} = \frac{dz}{2y^2 z}.$$

Система имеет два независимых первых интеграла.

$$\frac{dy}{2y^3} = \frac{dz}{2y^2 z} \Rightarrow \frac{z}{y} = c_1 = \psi_1.$$

Для нахождения другого требуется решить однородное уравнение.

$$\frac{dx}{x^3 + 3xy^2} = \frac{dy}{2y^3}. \tag{7}$$

В уравнении (7) сделаем замену $y = tx$.

$$\frac{dx}{x^3 + 3t^2x^3} = \frac{xdt + tdx}{2x^3t^3} \quad \Rightarrow x\left(1 + 3t^2\right)dt + \left(t + t^3\right)dx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} + \frac{\left(1 + 3t^2\right)dt}{t + t^3} = 0 \Rightarrow \ln|x| + \ln\left|t + t^3\right| = \ln c_2 \Rightarrow y + \frac{y^3}{x^2} = c_2 = \psi_2.$$

Функция $u = F\left(\frac{z}{y}, y + \frac{y^3}{x^2}\right)$.является общим решением уравнения (6). ◄

Пример 5. $x\left(y^2 - z^2\right)\frac{\partial u}{\partial x} - y\left(x^2 + z^2\right)\frac{\partial u}{\partial y} + z\left(x^2 + y^2\right)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ (7)

►Построим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме, соответствующей однородному уравнению (7)

$$\frac{dx}{x\left(y^2 - z^2\right)} = \frac{dy}{-y\left(x^2 + z^2\right)} = \frac{dz}{z\left(x^2 + y^2\right)}.$$

Используя свойства пропорций, получим два независимых первых интеграла:

$$\frac{dx}{x\left(y^2 - z^2\right)} = \frac{dy}{-y\left(x^2 + z^2\right)} = \frac{dz}{z\left(x^2 + y^2\right)} = \frac{xdx + ydy + zdz}{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xdx + ydy + zdz = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = c_1 = \psi_1.$$

$$\frac{\frac{dx}{x}}{\left(y^2 - z^2\right)} = \frac{\frac{dy}{y}}{-\left(x^2 + z^2\right)} = \frac{\frac{dz}{z}}{\left(x^2 + y^2\right)} = \frac{-d\ln x + d\ln y + d\ln z}{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -d\ln x + d\ln y + d\ln z = 0 \Rightarrow \frac{yz}{x} = c_2 = \psi_2.$$

Функция $u = F\left(x^2 + y^2 + z^2, \dfrac{yz}{x}\right)$ является общим решением уравнения . ◄

Пример 6. $x_1 \dfrac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \dfrac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + x_n \dfrac{\partial u}{\partial x_n} = 0$ (8)

►Построим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме, соответствующей однородному уравнению (8)

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \cdots = \frac{dx_n}{x_n}.$$

Система имеет $(n-1)$ независимых первых интеграла:

$$\frac{x_1}{x_n} = c_1 = \psi_1, \frac{x_2}{x_n} = c_2 = \psi_2, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n} = c_{n-1} = \psi_{n-1}.$$

Функция $u = F\left(\dfrac{x_1}{x_n}, \dfrac{x_2}{x_n}, \ldots, \dfrac{x_{n-1}}{x_n}\right)$ является общим решением уравнения.◄

Найдите решение задачи Коши

Пример 7. $\left(1 + x^2\right)\dfrac{\partial z}{\partial x} + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ (9)

$z = y^2$ при $x = 0$ (10)

►Построим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме, соответствующей однородному уравнению (9)

$$\frac{dx}{1 + x^2} = \frac{dy}{xy}$$

Решая это уравнение, получим:

$$\frac{y^2}{1 + x^2} = c_1 = \psi_1$$

Общее решение уравнения (9): $z = F\left(\dfrac{y^2}{1 + x^2}\right)$.

Полагая в первом интеграле $x = 0$, получим $y^2 = \overline{\psi_1}$. Учитывая начальное условие (10), искомое решение имеет вид

$$z = \psi_1 \Rightarrow z = \frac{y^2}{1 + x^2}. ◄$$

Пример 8. $y\dfrac{\partial u}{\partial x} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$ (11)

$u = \ln z - \dfrac{1}{y}$ при $x = 1$ (12)

►Построим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме, соответствующей однородному уравнению (11)

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{z}.$$

Система имеет два независимых первых интеграла. Решая систему, получим

$$y = c_1 = \psi_1,$$

$$\ln z - \frac{x}{y} = c_2 = \psi_2$$

Общее решение уравнения (11): $u = F\left(y, \ln z - \dfrac{x}{y}\right)$.

Найдем решение , удовлетворяющее поставленному начальному условию (12).

Полагая в первых интегралах $x = 1$, имеем

$$\begin{cases} y = \overline{\psi}_1, \\ \ln z - \dfrac{1}{y} = \overline{\psi}_2. \end{cases}$$

Откуда, решая систему, получим

$$y = \overline{\psi}_1, \ln z = \overline{\psi}_2 + \frac{1}{\overline{\psi}_1}. \qquad (13)$$

Меняя в (13) $\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2$ на ψ_1, ψ_2 и подставляя полученное в начальное условие (12), найдем искомое решение задачи Коши

$$u = \psi_2 + \frac{1}{\psi_1} - \frac{1}{\psi_1} \Rightarrow u = \ln z - \frac{x}{y}. ◄$$

Пример 9. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + yz\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$ (14)

$u = x^y$ при $z = 1$ (15)

►Построим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме, соответствующей однородному уравнению (14)

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{yz}.$$

Система имеет два независимых первых интеграла. Решая систему, получим

$$y = c_1 = \psi_1,$$

$$\frac{x^y}{z} = c_2 = \psi_2$$

Общее решение уравнения (11): $u = F\left(y, \dfrac{x^y}{z}\right)$.

Найдем решение, удовлетворяющее поставленному начальному условию (15).

Полагая в первых интегралах $z = 1$, имеем

$$y=\overline{\psi}_1, x^y=\overline{\psi}_2. \quad (16)$$

Меняя в (16) $\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2$ на ψ_1, ψ_2 и подставляя полученное в начальное условие (15), найдем искомое решение задачи Коши

$$u=\psi_2 \Rightarrow u=\frac{x^y}{z}. ◄$$

Пример 10. $$x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0 \quad (17)$$

$$u=z+y \text{ при } x=1 \quad (18)$$

►Построим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме, соответствующей однородному уравнению (17)

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-y}=\frac{dz}{z}.$$

Решая систему, получим два независимых первых интеграла

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-y}\Rightarrow xy=c_1=\psi_1,$$

$$\frac{dy}{-y}=\frac{dz}{z}\Rightarrow yz=c_2=\psi_2.$$

Общее решение уравнения (11): $u=F(xy, yz)$.

Найдем решение , удовлетворяющее поставленному начальному условию (18).

Полагая в первых интегралах $x=1$, имеем

$$\begin{cases} y=\overline{\psi}_1, \\ zy=\overline{\psi}_2. \end{cases}$$

Откуда, решая систему, получим

$$y=\overline{\psi}_1, z=\frac{\overline{\psi}_2}{\overline{\psi}_1}. \quad (19)$$

Меняя в (19) $\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2$ на ψ_1, ψ_2 и подставляя полученное в начальное условие (18), найдем искомое решение задачи Коши

$$u=\psi_1+\frac{\psi_2}{\psi_1}\Rightarrow u=xy+\frac{z}{x}. ◄$$

Пример 11. $$(z-y)^2\frac{\partial u}{\partial x}+z\frac{\partial u}{\partial y}+y\frac{\partial u}{\partial z}=0 \quad (19)$$

$$u=2y(y-z) \text{ при } x=0 \quad (20)$$

►Построим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме, соответствующей однородному уравнению (19)

$$\frac{dx}{(z-y)^2}=\frac{dy}{z}=\frac{dz}{y}.$$

Решая систему, получим два независимых первых интеграла

$$\frac{dy}{z}=\frac{dz}{y}\Rightarrow\int ydy-\int zdz=0\Rightarrow y^2-z^2=c_1=\psi_1.$$

$$\frac{dx}{(z-y)^2}=\frac{d(y-z)}{z-y}\Rightarrow\int dx+\int(z-y)d(z-y)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+\frac{(z-y)^2}{2}=\frac{c_2}{2}\Rightarrow 2x+(z-y)^2=c_2=\psi_2\,.$$

Общее решение уравнения (19): $u=F\left(y^2-z^2,2x+(z-y)^2\right).$

Найдем решение, удовлетворяющее поставленному начальному условию (20).

Полагая в первых интегралах $x=0$, имеем

$$\begin{cases} y^2-z^2=\overline{\psi}_1,\\ (z-y)^2=\overline{\psi}_2. \end{cases}$$

Складывая эти два выражения, получим

$$2y^2-2yz=\overline{\psi}_1+\overline{\psi}_2\Rightarrow 2y(y-z)=\overline{\psi}_1+\overline{\psi}_2 \tag{21}$$

Меняя в (21) $\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_2$ на ψ_1,ψ_2 и подставляя полученное в начальное условие (20), найдем искомое решение задачи Коши

$$u=\psi_1+\psi_2\Rightarrow u=2\big(x+y(y-z)\big).$$◄

4. Примеры решения квазилинейных уравнений

Найти общее решение

Пример 1. $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2+y^2$ (1)

►Составим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме, соответствующую уравнению (1)

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{x^2+y^2}\,.$$

Решая систему, получим два независимых первых интеграла

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{x}\Rightarrow xdx=ydy\Rightarrow\int xdx=\int ydy\Rightarrow x^2-y^2=c_1=\psi_1.$$

Выразим из полученного первого интеграла $x=\sqrt{y^2+c_1}$ и подставим в дифференциальное уравнение $\dfrac{dy}{x}=\dfrac{dz}{x^2+y^2}$:

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2+c_1}}=\frac{dz}{c_1+2y^2}\Rightarrow\int\frac{\left(c_1+2y^2\right)dy}{\sqrt{y^2+c_1}}=\int dz\Rightarrow y\sqrt{y^2+c_1}-z=c_2\,.$$

$$y\sqrt{y^2+x^2-y^2}-z=c_2 \Rightarrow yx-z=c_2=\psi_2.$$

Итак, $\Phi\left(x^2-y^2, xy-z\right)=0$ является общим решением уравнения (1). ◄

Пример 2. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-z\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ (2)

►Следуя общему правилу, составляем систему соответствующую уравнению (2)

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-z}=\frac{dz}{0}.$$

Решая систему, получим два независимых первых интеграла
$dz=0. \Rightarrow z=c_1=\psi_1.$

Подставим $z=c_1$ в дифференциальное уравнение $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{-z}$:

$$\frac{dx}{x}=\frac{-dy}{c_1} \Rightarrow \int\frac{dx}{x}=-\int\frac{dy}{c_1} \Rightarrow \ln|x|=-\frac{y}{c_1}+c_2 \Rightarrow \ln|x|+\frac{y}{z}=c_2=\psi_2.$$

Итак, $\Phi\left(z, \ln|x|+\dfrac{y}{z}\right)=0$ является общим решением уравнения (2). ◄

Пример 3. $(z-y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(x-z)\dfrac{\partial z}{\partial y}+x-y=0$ (3)

►Перепишем уравнение (3) в виде

$$(z-y)\frac{\partial z}{\partial x}+(x-z)\frac{\partial z}{\partial y}=y-x$$

Составим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме, соответствующую данному уравнению

$$\frac{dx}{z-y}=\frac{dy}{x-z}=\frac{dz}{y-x}.$$

Используя свойство пропорций, получим два независимых первых интеграла.

$$\frac{dx}{z-y}=\frac{dy}{x-z}=\frac{dz}{y-x}=\frac{dx+dy+dz}{0} \Rightarrow dx+dy+dz=0 \Rightarrow x+y+z=c_1=\psi_1$$

$$\frac{dx}{z-y}=\frac{dy}{x-z}=\frac{dz}{y-x}=\frac{xdx+ydy+zdz}{0} \Rightarrow xdx+ydy+zdz=0 \Rightarrow x^2+y^2+z^2=c_2=\psi_2$$

Итак, $\Phi\left(x+y+z, x^2+y^2+z^2\right)=0$ является общим решением уравнения (3). ◄

Пример 4. $x_1\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+x_2\dfrac{\partial u}{\partial x_2}+\cdots+x_n\dfrac{\partial u}{\partial x_n}=mu \quad (m\neq 0)$ (4)

►Составим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме, соответствующую уравнению (4)

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \cdots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{du}{mu}.$$

Система имеет n независимых первых интеграла:

$$\frac{x_1}{x_n} = c_1 = \psi_1, \frac{x_2}{x_n} = c_2 = \psi_2, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n} = c_{n-1} = \psi_{n-1}, \frac{u}{x_n^m} = c_n = \psi_n.$$

Функция $u = F\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, \frac{u}{x_n^m}\right)$ является общим решением уравнения (4). ◄

Пример 5. $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = y^2 - x^2$ (5)

►Составим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме, соответствующую уравнению (5)

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{y^2 - x^2}.$$

Система имеет два независимых первых интеграла.

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} \Rightarrow ydy = -xdx \Rightarrow \int ydy = -\int xdx \Rightarrow x^2 + y^2 = c_1 = \psi_1.$$

Используя свойство пропорций, получим:

$$\frac{dx + dy}{y - x} = \frac{dz}{y^2 - x^2} \Rightarrow (x+y)d(x+y) = dz \Rightarrow \int (x+y)d(x+y) = \int dz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x+y)^2}{2} - z = \frac{c_2}{2} \Rightarrow (x+y)^2 - 2z = c_2 = \psi_2$$

Итак, $\Phi\left(x^2 + y^2, (x+y)^2 - 2z\right) = 0$ является общим решением уравнения (5). ◄

Пример 6. $\left(x^2 + y^2\right)\frac{\partial z}{\partial x} + 2xy\frac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0$ (6)

►Перепишем уравнение (6) в виде

$$\left(x^2 + y^2\right)\frac{\partial z}{\partial x} + 2xy\frac{\partial z}{\partial y} = -z^2$$

Составим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме, соответствующую данному уравнению

$$\frac{dx}{x^2 + y^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{-z^2}.$$

Используя свойство пропорций, получим два независимых первых интеграла.

$$\frac{dx+dy}{\left(x+y\right)^2}=-\frac{dz}{z^2}\ \Rightarrow\int\frac{d\left(x+y\right)}{\left(x+y\right)^2}=-\int\frac{dz}{z^2}\Rightarrow-\frac{1}{x+y}-\frac{1}{z}=-c_1\Rightarrow\frac{1}{x+y}+\frac{1}{z}=c_1=\psi_1$$

$$\frac{dx-dy}{\left(x-y\right)^2}=-\frac{dz}{z^2}\ \Rightarrow\int\frac{d\left(x-y\right)}{\left(x-y\right)^2}=-\int\frac{dz}{z^2}\Rightarrow-\frac{1}{x-y}-\frac{1}{z}=-c_2\Rightarrow\frac{1}{x-y}+\frac{1}{z}=c_2=\psi_2$$

$\Phi\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{z},\frac{1}{x-y}+\frac{1}{z}\right)=0$ является общим решением уравнения. ◄

Пример 7. $x^2z\frac{\partial z}{\partial x}+y^2z\frac{\partial z}{\partial y}=x+y$ (7)

►Составим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме, соответствующую уравнению (5)

$$\frac{dx}{x^2z}=\frac{dy}{y^2z}=\frac{dz}{x+y}.$$

Система имеет два независимых первых интеграла.

$$\frac{dx}{x^2z}=\frac{dy}{y^2z}\Rightarrow\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{y^2}\Rightarrow\int\frac{dx}{x^2}=\int\frac{dy}{y^2}\Rightarrow\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=c_1=\psi_1.$$

Используя свойство пропорций, получим:

$$\frac{dx-dy}{\left(x^2-y^2\right)z}=\frac{dz}{x+y}\Rightarrow\frac{d\left(x-y\right)}{\left(x-y\right)}=zdz\Rightarrow\int\frac{d\left(x-y\right)}{\left(x-y\right)}=\int zdz\Rightarrow\ln\left|x-y\right|-\frac{z^2}{2}=c_2=\psi_2$$

Итак, $\Phi\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x},\ln\left|x-y\right|-\frac{z^2}{2}\right)=0$ является общим решением уравнения (7). ◄

Пример 8. $yz\frac{\partial z}{\partial x}-xz\frac{\partial z}{\partial y}=e^z$ (8)

►Составим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме, соответствующую уравнению (8)

$$\frac{dx}{yz}=\frac{dy}{-xz}=\frac{dz}{e^z}.$$

Система имеет два независимых первых интеграла.

$$\frac{dx}{yz}=\frac{dy}{-xz}.\Rightarrow xdx=-ydy\Rightarrow\int xdx=-\int ydy\Rightarrow\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=\frac{c_1}{2}\Rightarrow x^2+y^2=c_1=\psi_1.$$

Выразим из полученного первого интеграла $y=\sqrt{c_1-x^2}$ и подставим в дифференциальное уравнение $\frac{dx}{yz}=\frac{dz}{e^z}.$:

$$\frac{dx}{\sqrt{c_1-x^2}}=\frac{zdz}{e^z}\Rightarrow\int\frac{dx}{\sqrt{c_1-x^2}}=\int\frac{zdz}{e^z}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{c_1}}\arcsin\frac{x}{\sqrt{c_1}}+\frac{z+1}{e^z}=c_2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{z+1}{e^z}=c_2=\psi_2\,.$$

Итак, $\Phi\left(x^2+y^2,\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{z+1}{e^z}\right)=0$ является общим решением уравнения (8). ◄

Пример 9. $\sin^2 x\frac{\partial z}{\partial x}+\mathrm{tg}z\frac{\partial z}{\partial y}=\cos^2 z$ (9)

►Составим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме, соответствующую уравнению (9)

$$\frac{dx}{\sin^2 x}=\frac{dy}{\mathrm{tg}z}=\frac{dz}{\cos^2 z}\,.$$

Система имеет два независимых первых интеграла.

$$\frac{dy}{\mathrm{tg}z}=\frac{dz}{\cos^2 z}\Rightarrow dy=\frac{\sin zdz}{\cos^3 z}\Rightarrow\int ydy=-\int\frac{d\cos z}{\cos^3 z}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{y^2}{2}-\frac{1}{2\cos^2 z}=\frac{c_1}{2}\Rightarrow y^2-\frac{1}{\cos^2 z}=c_1=\psi_1\,.$$

$$\frac{dx}{\sin^2 x}=\frac{dz}{\cos^2 z}\Rightarrow\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\int\frac{dz}{\cos^2 z}\Rightarrow tgz+ctgx=c_2=\psi_2$$

Итак, $\Phi\left(y^2-\frac{1}{\cos^2 z},tgz+ctgx\right)=0$ является общим решением уравнения (9). ◄

Найти решение задачи Коши

Пример 10. $x\frac{\partial z}{\partial x}+z\frac{\partial z}{\partial y}=0$ (10)

$z=-y$ при $x=1$ (12)

►Составим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме, соответствующую уравнению (10)

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{z}=\frac{dz}{0}\,.$$

Система имеет два независимых первых интеграла.

$$dz=0\Rightarrow z=c_1=\psi_1\,.$$

Подставим $z=c_1$ в дифференциальное уравнение $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{z}$:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{c_1}\Rightarrow\int\frac{dx}{x}=\int\frac{dy}{c_1}\Rightarrow c_1\ln|x|=y+c_2\Rightarrow z\ln|x|-y=c_2=\psi_2.$$

Итак, $\Phi\left(z, z\ln|x| - y\right) = 0$ является общим решением уравнения (10).

Найдем решение, удовлетворяющее поставленному начальному условию (11).

Полагая в первых интегралах $x = 1$, имеем

$$\begin{cases} z = \overline{\psi}_1, \\ -y = \overline{\psi}_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \overline{\psi}_1, \\ y = -\overline{\psi}_2. \end{cases} \tag{12}$$

Меняя в (14) $\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2$ на ψ_1, ψ_2 и подставляя полученное в начальное условие (13), найдем искомое решение задачи Коши

$$\psi_1 = \psi_2 \Rightarrow z = z\ln|x| - y\,.◄$$

Пример 11. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = u$ (13)

$z = -y$ при $x = 2$ (14)

►Составим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме, соответствующую уравнению (13)

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{du}{u}.$$

Система имеет три независимых первых интеграла.

$$\frac{y}{x} = c_1 = \psi_1, \frac{z}{x} = c_2 = \psi_2, \frac{u}{x} = c_3 = \psi_3.$$

Итак, $\Phi\left(\dfrac{y}{x}, \dfrac{z}{x}, \dfrac{u}{x}\right) = 0$ является общим решением уравнения (13).

Найдем решение , удовлетворяющее поставленному начальному условию (14).

Полагая в первых интегралах $x = 2$, имеем

$$\frac{y}{2} = \overline{\psi}_1, \frac{z}{2} = \overline{\psi}_2, \frac{u}{2} = \overline{\psi}_3 \Rightarrow y = 2\overline{\psi}_1, z = 2\overline{\psi}_2, u = 2\overline{\psi}_3. \tag{15}$$

Меняя в (15) $\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \overline{\psi}_3$ на ψ_1, ψ_2, ψ_3 и подставляя полученное в начальное условие (14), найдем искомое решение задачи Коши

$$2\psi_3 = \frac{1}{2}\left(2\psi_1 + 2\psi_2\right) = \psi_1 + \psi_2 \Rightarrow \frac{2u}{x} = \frac{y}{x} + \frac{z}{x} \Rightarrow u = \frac{1}{2}\left(y + z\right).◄$$

Пример 12. $yz\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ (16)

$z = x^2$ при $y = 1$ (17)

►Составим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме, соответствующую уравнению (16)

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}.$$

Система имеет два независимых первых интеграла.

$$dz = 0 \Rightarrow z = c_1 = \psi_1 .$$

Подставим $z = c_1$ в дифференциальное уравнение $\dfrac{dx}{yz} = \dfrac{dy}{x}.$:

$$\frac{dx}{yc_1} = \frac{dy}{x}. \Rightarrow xdx = yc_1dy \Rightarrow \int xdx = c_1\int ydy \Rightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{c_1y^2}{2} = \frac{c_2}{2} \Rightarrow x^2 - zy^2 = c_2 = \psi_2.$$

Итак, $\Phi\left(z, x^2 - zy^2\right) = 0$ является общим решением уравнения (16).

Найдем решение, удовлетворяющее поставленному начальному условию (17).

Полагая в первых интегралах $y = 1$, имеем

$$\begin{cases} z = \overline{\psi}_1, \\ x^2 - z = \overline{\psi}_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \overline{\psi}_1, \\ x^2 = \overline{\psi}_2 + \overline{\psi}_1. \end{cases} \qquad (18)$$

Меняя в (18) $\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2$ на ψ_1, ψ_2 и подставляя полученное в начальное условие (17), найдем искомое решение задачи Коши

$$\psi_1 = \psi_2 + \psi_1 \Rightarrow \psi_2 = 0 \Rightarrow x^2 - zy^2 = 0 . \blacktriangleleft$$

Пример 13. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + \left(y + x^2\right)\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$ (19)

$z = y - 4$ при $x = 2$ (20)

►Составим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме, соответствующую уравнению (19)

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y + x^2} = \frac{dz}{z} .$$

Система имеет два независимых первых интеграла.

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y + x^2} \Rightarrow \left(y + x^2\right)dx = xdy \Rightarrow \frac{xdy - ydx}{x^2} = dx \Rightarrow d\left(\frac{y}{x}\right) = dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = x + c_1 \Rightarrow \frac{y - x^2}{x} = c_1 = \psi_1.$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z} \Rightarrow \int\frac{dx}{x} = \int\frac{dz}{z} \Rightarrow -\ln|x| + \ln|z| = \ln c_2 \Rightarrow \frac{z}{x} = c_2 = \psi_2.$$

Итак, $\Phi\left(\dfrac{y - x^2}{x}, \dfrac{z}{x}\right) = 0$ является общим решением уравнения (19).

Найдем решение , удовлетворяющее поставленному начальному условию (20).

Полагая в первых интегралах $x = 2$, имеем

$$\begin{cases} \dfrac{y - 4}{2} = \overline{\psi}_1, \\ \dfrac{z}{2} = \overline{\psi}_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2\overline{\psi}_1 + 4, \\ z = 2\overline{\psi}_2. \end{cases} \qquad (21)$$

Меняя в (21) $\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2$ на ψ_1, ψ_2 и подставляя полученное в начальное условие (20), найдем искомое решение задачи Коши

$$2\psi_2 = 2\psi_1 + 4 - 4 \Rightarrow \psi_2 = \psi_1 \Rightarrow y - x^2 = z. \blacktriangleleft$$

Пример 14. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - 2y\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2$ (22)

$z = x^2$ при $y = 1$ (23)

►Составим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме, соответствующую уравнению (22)

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-2y} = \frac{dz}{x^2 + y^2}.$$

Система имеет два независимых первых интеграла.

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-2y} \Rightarrow \int \frac{2dx}{x} = -\int \frac{dy}{y} \Rightarrow 2\ln|x| = -\ln|y| + \ln c_1 \Rightarrow x^2 y = c_1 = \psi_1.$$

Подставим $y = \dfrac{c_1}{x^2}$ в дифференциальное уравнение $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dz}{x^2 + y^2}$.:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{x^2 + \frac{c_1^2}{x^4}} \Rightarrow \left(x + \frac{c_1^2}{x^5} \right) dx = dz \Rightarrow \int \left(x + \frac{c_1^2}{x^5} \right) dx = \int dz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{c_1^2}{4x^4} - z = -c_2 \Rightarrow -\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + z = c_2 = \psi_2.$$

Итак, $\Phi\left(x^2 y, -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{4} + z \right) = 0$ является общим решением уравнения (22).

Найдем решение, удовлетворяющее поставленному начальному условию (23).

Полагая в первых интегралах $y = 1$, имеем

$$\begin{cases} x^2 = \overline{\psi}_1, \\ -\dfrac{x^2}{2} + z = \overline{\psi}_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \overline{\psi}_1, \\ z = \overline{\psi}_2 - \dfrac{\overline{\psi}_1}{2} - \dfrac{1}{4}. \end{cases} \quad (24)$$

Меняя в (24) $\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2$ на ψ_1, ψ_2 и подставляя полученное в начальное условие (23), найдем искомое решение задачи Коши

$$\psi_2 - \frac{\psi_1}{2} - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow -\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + z - \frac{x^2 y}{2} - \frac{1}{4} = 0. \blacktriangleleft$$

Пример 15. $y^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = x$ (25)

$z = y^2$ при $x = 0$ (26)

►Составим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме, соответствующую уравнению (25)

$$\frac{dx}{y^2}=\frac{dy}{xy}=\frac{dz}{x}.$$

Система имеет два независимых первых интеграла.

$$\frac{dx}{y^2}=\frac{dy}{xy}\Rightarrow\int xdx=\int ydy\Rightarrow\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=\frac{c_1}{2}\Rightarrow x^2-y^2=c_1=\psi_1.$$

$$\frac{dy}{xy}=\frac{dz}{x}\ \Rightarrow\int\frac{dy}{y}=dz\Rightarrow\ln|y|-z=c_2=\psi_2.$$

Итак, $\Phi\left(x^2-y^2,\ln|y|-z\right)=0$ является общим решением уравнения (25).

Найдем решение, удовлетворяющее поставленному начальному условию (26).

Полагая в первых интегралах $x=0$, имеем

$$\begin{cases} y^2=\overline{\psi}_1, \\ \ln|y|-z=\overline{\psi}_2. \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y^2=-\overline{\psi}_1, \\ z=\ln\sqrt{-\overline{\psi}_1}-\overline{\psi}_2. \end{cases} \tag{27}$$

Меняя в (27) $\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_2$ на ψ_1,ψ_2 и подставляя полученное в начальное условие (26), найдем искомое решение задачи Коши

$$\ln\sqrt{-\psi_1}-\psi_2=-\psi_1\Rightarrow\ln\sqrt{y^2-x^2}-\ln|y|+z=y^2-x^2.◄$$

Пример 17. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-xy$ (28)

$z=y^2+1$ при $x=2$ (29)

►Составим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме, соответствующую уравнению (28)

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z-xy}.$$

Система имеет два независимых первых интеграла.

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}\Rightarrow\int\frac{dx}{x}=\int\frac{dy}{y}\Rightarrow\ln|x|-\ln|y|=\ln c_1\Rightarrow\frac{x}{y}=c_1=\psi_1.$$

Используя свойство пропорций, получим:

$$\frac{ydx+xdy+dz}{xy+z}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\frac{d\left(xy+z\right)}{xy+z}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{d\left(xy+z\right)}{xy+z}=\int\frac{dx}{x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ln|xy+z|-\ln|x|=\ln c_2\Rightarrow\frac{xy+z}{x}=c_2=\psi_2.$$

Итак, $\Phi\left(\dfrac{x}{y},\dfrac{xy+z}{x}\right)=0$ является общим решением уравнения (30).

Найдем решение, удовлетворяющее поставленному начальному условию (29).

Полагая в первых интегралах $x=2$, имеем

$$\begin{cases} \dfrac{2}{y} = \overline{\psi}_1, \\ \dfrac{2y+z}{2} = \overline{\psi}_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2}{\overline{\psi}_1}, \\ z = 2\overline{\psi}_2 - \dfrac{4}{\overline{\psi}_1}. \end{cases} \tag{30}$$

Меняя в (30) $\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2$ на ψ_1, ψ_2 и подставляя полученное в начальное условие (29), найдем искомое решение задачи Коши

$$2\psi_2 - \frac{4}{\psi_1} = \frac{4}{\psi_1^2} + 1 \Rightarrow 2\frac{xy+z}{x} - 4\frac{y}{x} = 4\frac{y^2}{x^2} + 1 . ◄$$

Пример 17. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z^2\left(x - 3y\right)$ (31)

$$zy + 1 = 0 \text{ при } x = 1 \tag{32}$$

►Составим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме, соответствующую уравнению (31)

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{z^2\left(x-3y\right)} .$$

Система имеет два независимых первых интеграла.

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|x| + \ln|y| = \ln c_1 \Rightarrow xy = c_1 = \psi_1 .$$

Используя свойство пропорций, получим:

$$\frac{dz}{z^2\left(x-3y\right)} = \frac{dx+3dy}{x-3y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow d\left(x+3y\right) = \frac{dz}{z^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int d\left(x+3y\right) = \int \frac{dz}{z^2} \Rightarrow x + 3y + \frac{1}{z} = c_2 = \psi_2 .$$

Итак, $\Phi\left(xy, x+3y+\dfrac{1}{z}\right) = 0$ является общим решением уравнения (31).

Найдем решение, удовлетворяющее поставленному начальному условию (32).

Полагая в первых интегралах $x = 1$, имеем

$$\begin{cases} y = \overline{\psi}_1, \\ 1 + 3y + \dfrac{1}{z} = \overline{\psi}_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \overline{\psi}_1, \\ z = \dfrac{1}{\overline{\psi}_2 - 3\overline{\psi}_1 - 1}. \end{cases} \tag{33}$$

Меняя в (33) $\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2$ на ψ_1, ψ_2 и подставляя полученное в начальное условие (32), найдем искомое решение задачи Коши

$$\frac{\psi_1}{\psi_2 - 3\psi_1 - 1} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{xy}{x + 3y + z^{-1} - 1 - 3xy} = -1 \Rightarrow z^{-1} + x + 3y = 2xy + 1 . ◄$$

Пример 18. $yz\dfrac{\partial z}{\partial x} + xz\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy$ (34)

$$z^2 + y^2 = a^2 \text{ при } x = a \qquad (35)$$

►Составим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме, соответствующую уравнению (34)

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy}.$$

Система имеет два независимых первых интеграла.

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} \Rightarrow \int xdx = \int ydy \Rightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = \frac{c_1}{2} \Rightarrow x^2 - y^2 = c_1 = \psi_1.$$

$$\frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy} \Rightarrow \int ydy = \int zdz \Rightarrow \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2} = \frac{c_2}{2} \Rightarrow y^2 - z^2 = c_2 = \psi_2.$$

Итак, $\Phi\left(x^2 - y^2, y^2 - z^2\right) = 0$ является общим решением уравнения (34).

Найдем решение, удовлетворяющее поставленному начальному условию (35).

Полагая в первых интегралах $x = a$, имеем

$$\begin{cases} a^2 - y^2 = \overline{\psi}_1, \\ y^2 - z^2 = \overline{\psi}_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = a^2 - \overline{\psi}_1, \\ z^2 = a^2 - \overline{\psi}_1 - \overline{\psi}_2. \end{cases} \qquad (36)$$

Меняя в (36) $\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2$ на ψ_1, ψ_2 и подставляя полученное в начальное условие (35), найдем искомое решение задачи Коши

$$a^2 - \psi_1 + a^2 - \psi_1 - \psi_2 = a^2 \Rightarrow a^2 + y^2 - x^2 + a^2 + y^2 - x^2 - y^2 + z^2 = a^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x^2 - y^2 - z^2 = a^2 .◄$$

Пример 20. $z\dfrac{\partial z}{\partial x} - xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2xz \qquad (37)$

$$x + y = 2, \qquad (38)$$

$$yz = 1 \qquad (39)$$

►Составим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме, соответствующую уравнению (37)

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{-xy} = \frac{dz}{2xz}.$$

Система имеет два независимых первых интеграла.

$$\frac{dx}{z} = \frac{dz}{2xz} \Rightarrow 2\int xdx = \int dz \Rightarrow x^2 - z = c_1 = \psi_1.$$

$$\frac{dy}{-xy} = \frac{dz}{2xz} \Rightarrow 2\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dz}{z} \Rightarrow 2\ln|y| + \ln|z| = \ln|c_2| \Rightarrow y^2 z = c_2 = \psi_2.$$

Итак, $\Phi\left(x^2 - z, y^2 z\right) = 0$ является общим решением уравнения (37).

Найдем решение, удовлетворяющее поставленному начальному условию (38-39). Выразим z из (39): $z=\frac{1}{y}$. Полагая в первых интегралах $z=\frac{1}{y}$, имеем

$$\begin{cases} x^2-\dfrac{1}{y}=\overline{\psi}_1, \\ y^2\cdot\dfrac{1}{y}=\overline{\psi}_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{\overline{\psi}_1+\dfrac{1}{\overline{\psi}_2}}, \\ y=\overline{\psi}_2. \end{cases} \tag{40}$$

Меняя в (40) $\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_2$ на ψ_1,ψ_2 и подставляя полученное в (38), найдем искомое решение задачи Коши

$$\sqrt{\psi_1+\frac{1}{\psi_2}}+\psi_2=2\Rightarrow\sqrt{\frac{\left(x^2-z\right)zy^2+1}{zy^2}}+zy^2=2\Rightarrow\left[\left(zy^2-2\right)^2-x^2+z\right]zy^2=1. ◄$$

Пример 20. $z\dfrac{\partial z}{\partial x}+\left(z^2-x^2\right)\dfrac{\partial z}{\partial y}+x=0$ (41)

$$y=x^2, \tag{42}$$

$$z=2x \tag{43}$$

► Перепишем уравнение (41) в виде

$$z\frac{\partial z}{\partial x}+\left(z^2-x^2\right)\frac{\partial z}{\partial y}=-x$$

Составим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме, соответствующую данному уравнению

$$\frac{dx}{z}=\frac{dy}{z^2-x^2}=\frac{dz}{-x}.$$

Система имеет два независимых первых интеграла.

$$\frac{dx}{z}=\frac{dz}{-x}\Rightarrow-\int xdx=\int zdz\Rightarrow\frac{x^2}{2}+\frac{z^2}{2}=\frac{c_1}{2}\Rightarrow x^2+z^2=c_1=\psi_1.$$

Используя свойство пропорций, получим:

$$\frac{dx}{z}=\frac{dy}{z^2-x^2}=\frac{dz}{-x}=\frac{zdx-dy+xdz}{0}\Rightarrow d\left(xz-y\right)=0\Rightarrow xz-y=c_2=\psi_2.$$

Итак, $\Phi\left(x^2+z^2,xz-y\right)=0$ является общим решением уравнения (41).

Найдем решение, удовлетворяющее поставленному начальному условию (42-43). Полагая в первых интегралах $z=2x$, имеем

$$\begin{cases} 4x^2+x^2=\overline{\psi}_1, \\ 2x^2-y=\overline{\psi}_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=\dfrac{\overline{\psi}_1}{5}, \\ y=\dfrac{2\overline{\psi}_1-5\overline{\psi}_2}{5}. \end{cases} \tag{44}$$

Меняя в (44) $\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2$ на ψ_1, ψ_2 и подставляя полученное в (44), найдем искомое решение задачи Коши

$$\frac{2\psi_1 - 5\psi_2}{5} = \frac{\psi_1}{5} \Rightarrow \psi_1 = 5\psi_2 \Rightarrow x^2 + z^2 = 5\left(xz - y\right) \blacktriangleleft$$

Пример 21. $y^2 \dfrac{\partial z}{\partial x} + yz \dfrac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0$ (45)

$$x - y = 0, \tag{46}$$

$$x - yz = 1. \tag{47}$$

► Перепишем уравнение (45) в виде

$$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + yz \frac{\partial z}{\partial y} = -z^2$$

Составим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме, соответствующую данному уравнению

$$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-z^2}.$$

Система имеет два независимых первых интеграла.

$$\frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-z^2} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dz}{z} \Rightarrow \ln|z| + \ln|y| = \ln c_1 \Rightarrow zy = c_1 = \psi_1 .$$

Подставим $z = \dfrac{c_1}{y}$ в дифференциальное уравнение $\dfrac{dx}{y^2} = \dfrac{dy}{yz}$:

$$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{y\frac{c_1}{y}} \Rightarrow c_1 dx = y^2 dy \Rightarrow c_1 \int dx = \int y^2 dy \Rightarrow c_1 x - \frac{y^3}{3} = \frac{c_2}{3} \Rightarrow 3xyz - y^3 = c_2 = \psi_2.$$

Итак, $\Phi\left(zy, 3xyz - y^3\right) = 0$ является общим решением уравнения (45).

Найдем решение, удовлетворяющее поставленному начальному условию (46-47). Выразим z из (47): $z = \dfrac{x-1}{y}$. Полагая в первых интегралах $z = \dfrac{x-1}{y}$, имеем

$$\begin{cases} y \cdot \dfrac{x-1}{y} = \overline{\psi}_1, \\ 3yx\dfrac{x-1}{y} - y^3 = \overline{\psi}_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \overline{\psi}_1 + 1, \\ y^3 = 3\left(\overline{\psi}_1 + 1\right)\overline{\psi}_1 - \overline{\psi}_2. \end{cases} \tag{48}$$

Для удобства последующих вычислений преобразуем условие (46), а именно:

$$x - y = 0 \Rightarrow x = y \Rightarrow x^3 = y^3 . \tag{49}$$

Меняя в (48) $\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2$ на ψ_1, ψ_2 и подставляя полученное в (49), найдем искомое решение задачи Коши

$$\left(\psi_1+1\right)^3=3\left(\psi_1+1\right)\psi_1-\psi_2 \Rightarrow \psi_1^3+1=-\psi_2 \Rightarrow z^3y^3+1=y^3-3xyz. \blacktriangleleft$$

Пример 22. $(x-z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(y-z)\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z$ (50)

$$x-y=2, \quad (51)$$

$$z+2x=1 \quad (52)$$

►Составим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме, соответствующую уравнению (50)

$$\frac{dx}{x-z}=\frac{dy}{y-z}=\frac{dz}{2z}.$$

Система имеет два независимых первых интеграла. Используя свойство пропорций, получим:

$$\frac{dz}{2z}=\frac{dx-dy}{x-y} \Rightarrow \int\frac{d(x-y)}{x-y}=\int\frac{dz}{2z} \Rightarrow \ln|x-y|-\frac{\ln|z|}{2}=\ln c_1 \Rightarrow \frac{x-y}{\sqrt{z}}=c_1=\psi_1.$$

Уравнение $\dfrac{dx}{x-z}=\dfrac{dz}{2z}$ линейное. Решив его, имеем $\dfrac{x+z}{\sqrt{z}}=c_2=\psi_2.$

Итак, $\Phi\left(\dfrac{x-y}{\sqrt{z}},\dfrac{x+z}{\sqrt{z}}\right)=0$ является общим решением уравнения (50).

Найдем решение, удовлетворяющее поставленному начальному условию (51-52). Выразим y из (51): $y=2-x$. Полагая в первых интегралах $y=2-x$, имеем

$$\begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{z}}=\overline{\psi}_1, \\ \dfrac{x+z}{\sqrt{z}}=\overline{\psi}_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=\dfrac{4}{\overline{\psi}_1^{\,2}}, \\ x=\dfrac{2\overline{\psi}_1\overline{\psi}_2-4}{\overline{\psi}_1^{\,2}}. \end{cases} \quad (53)$$

Меняя в (50) $\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_2$ на ψ_1,ψ_2 и подставляя полученное в (52), найдем искомое решение задачи Коши

$$\frac{4}{\psi_1^2}+\frac{4\psi_1\psi_2-8}{\psi_1^2}=1 \Rightarrow 4\psi_1\psi_2-4-\psi_1^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi_1\left(4\psi_2-\psi_1\right)=4 \Rightarrow (x-y)(2x+y+4z)=4z. \blacktriangleleft$$

Оглавление

Список используемой литературы

1. Матвеев, Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.М. Матвеев. – Минск: Высш. шк. , 1974. – 766 с.
2. Эльсгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. – Москва: Наука , 1969. – 320с.
3. Матвеев, Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Н.М. Матвеев. – СПб: Лань , 2002. – 432 с.
4. Филиппов, А.Ф. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям / А.Ф. Филиппов. – Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. – 176 с.
5. Шилин, А.П. Дифференциальные уравнения. Задачи и примеры/ А.П. Шилин. – Минск :РИВШ, 2008. – 366 с.
6. Тихонов, А.Н. Дифференциальные уравнения / А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников – Москва: Наука , 1985. – 231.