ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ ПРИ РАСЧЕТЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

THE APPLICATION OF COMPLEX NUMBERS IN ELECTRICAL CIRCUIT CALCULATION

А. А. Будько, Л. А. Хвощинская

A. A. Budko, L. A. Khvostchinskaya

Белорусский государственный университет, МГЭИ им. А. Д. Сахарова БГУ,
г. Минск, Республика Беларусь
budko.anzhelika@gmail.com, ludmila.ark@gmail.com
Belarusian State University, ISEI BSU, Minsk, Republic of Belarus

В данной работе рассматривается один из методов расчета цепей переменного электрического тока. Метод основан на применении комплексных форм записей синусоидального тока и сопротивлений цепи. Приведены примеры расчета электрических цепей с применением комплексных чисел.

In this article, one of the methods for calculating alternating electric current circuits is considered. The method is based on the use of complex forms of records of sinusoidal current and circuit resistances. Examples of calculating electrical circuits using complex numbers are given.

Ключевые слова: комплексные числа, комплексная амплитуда тока, комплексное сопротивление, закон Ома.

Keywords: complex numbers, complex current amplitude, complex resistance, Ohm's Law.

https://doi.org/10.46646/SAKH-2021-1-108-110

Первое упоминание о мнимых числах появилось в 16 веке в работах итальянского математика Джероламо Кардано. Мнимая единица $i=\sqrt{-1}$ была введена Леонардом Эйлером, а Вассел впервые геометрически интерпретировал комплексные числа. В настоящее время комплексное число является одним из фундаментальных понятий математики, которое находит применение в науке и прикладных областях, таких как физика, компьютерная и космическая индустрия, самолетостроение, химия, электротехника [1].

Впервые с комплексными числами студенты знакомятся на первом курсе при изучении учебной дисциплины «Математический анализ». На протяжении двух лет обучения в университете студенты встречались с комплексными числами в курсах оптики и электромагнетизма. На втором курсе студентам специальностей «Медицинская физика» и «Ядерная и радиационная безопасность» факультета «Мониторинг окружающей среды» читается курс «Основы функционального анализа и теории функций», где изучаются функции комплексной переменной.

Идея записи синусоидального тока в комплексной форме основана на возможности графического изображения этого тока в пространстве в виде винтовой линии. Тогда проекции винтовой линии на осевые сечения будут представлять собой синусоиды с различными начальными фазами тока. Проекция винтовой линии на поперечное сечение графически изображается окружностью с радиусом, равным амплитуде тока.

Рассмотрим синусоидальный ток, закон изменения которого во времени описывается формулой

$$i = I_m sin(\frac{2\pi}{T}t+\psi) = I_m sin(\omega t+\psi),$$

где I_m – амплитуда тока, T – период, $\omega=\frac{2\pi}{T}$ – угловая частота, $\omega t+\psi$ – фаза, ψ – начальная фаза [2, 3].

При расчете электрических цепей для мнимой единицы применяют обозначение $j=\sqrt{-1}$.

Действующим значением синусоидального тока называется величина $I=\frac{I_m}{\sqrt{2}}$.

Величина $\dot{I}_m = I_m e^{j\psi}$ называется *комплексной амплитудой* тока i. Комплексная амплитуда – это комплексное число, модуль которого равен амплитуде тока I_m, а аргумент – начальной фазе ψ. *Комплексом действующего значения тока,* или *комплексом тока* называется величина $\dot{I}=\frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}}=\frac{I_m}{\sqrt{2}}e^{j\psi}$.

Аналогично вводятся понятия для синусоидальных напряжений $U=U_m sin(\omega t+\psi)$ $E=E_m sin(\omega t+\psi)$: $\dot{U}_m=U_m e^{j\psi}$, $\dot{U}=\frac{\dot{U}_m}{\sqrt{2}}$, $\dot{E}_m=E_m e^{j\psi}$, $\dot{E}=\frac{\dot{E}_m}{\sqrt{2}}$.

В общем случае при расчете электрических цепей вводится понятие комплексное сопротивление цепи Z, которое можно записать в виде комплекса: $Z=R+jX$, где R – активное сопротивление, X – реактивное сопротивление.

В отличии от активного сопротивления R, где выделяется энергия теплоты, на индуктивности и ёмкости энергия не выделяется, а периодически запасается в электрическом или магнитном полях. Поэтому индуктивность и ёмкость называют *реактивными элементами* цепи, а их сопротивления – *реактивными сопротивлениями.* Если по цепи течёт синусоидальный ток с частотой ω, то величина $X_L = \omega L$ называется *индуктивным сопротивлением,* а величина $X_C = \dfrac{1}{C\omega}$ – *ёмкостным сопротивлением.*

Соответственно вводятся понятия *комплексных сопротивлений,* которые находятся по формулам:

$Z_R = R$ для резистора, $Z_L = jL\omega$ для катушки с индуктивностью L и $Z_C = \dfrac{1}{jC\omega} = -\dfrac{j}{C\omega}$ для конденсатора с емкостью C.

Отметим, что для расчета комплексного сопротивления цепей применяют те же правила, как и для расчета цепей с активными резисторами:

$Z = Z_1 + Z_2$ для последовательного соединения и $\dfrac{1}{Z} = \dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_2}$ для параллельного соединения.

Закон Ома в комплексной форме для цепи синусоидального тока имеет вид: $\dot{I} = \dfrac{\dot{E}}{Z}$.

Мгновенное значение i тока находится как мнимая часть комплексного числа по формуле

$$i = Im(\dot{I}_m e^{j\omega t}) = Im(\sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t}) = I_m\, sin(\omega t + \psi).$$

В этом учебном году при изучении теории функций комплексной переменной студентке 2-го курса специальности «Ядерная и радиационная безопасность» было предложено ознакомиться с новым материалом и провести расчеты нескольких цепей переменного электрического тока двумя способами: классическими методами и с использованием комплексных чисел, а затем сравнить полученные результаты. Рассмотрим два примера применения комплексного метода для расчета электрических цепей.

Пример 1.

Рассмотрим схему, состоящую из последовательно соединенных резистора, конденсатора и катушки (рис. 1), э.д.с. которой меняется по закону

$E = 141 sin\left(\omega t + 20^\circ\right)$. $R = 10$ Ом, $X_L = 20$ Ом, $X_C = 15$ Ом.

Найти комплексное сопротивление цепи, комплекс действующего значения и мгновенное значение тока.

Решение символическим методом

Найдем комплексное сопротивление цепи

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C = 10 + j(20-15) = 10 + 5j = 5(2+j) = 5\sqrt{2^2+1}e^{jarctg\frac{1}{2}} = 11{,}18e^{j26^\circ}.$$

Найдем комплекс действующего значения э.д.с.:

$$\dot{E} = \frac{E}{\sqrt{2}}e^{j\varphi} = \frac{141}{\sqrt{2}}e^{j20^\circ} = 100e^{j20^\circ}\,B.$$

Найдем комплекс действующего значения тока:

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z} = \frac{100e^{j20^\circ}}{11{,}18e^{j26^\circ}} = 8{,}94e^{-j6^\circ}\,A.$$

Тогда мгновенное значение тока будет задаваться формулой

$$i = \mathrm{Im}\sqrt{2}\,\dot{I}\,e^{j\omega t} = \sqrt{2}\cdot 8{,}94e^{j(\omega t - 6^\circ)} = 12{,}61\sin(\omega t - 6^\circ)A.$$

При изучении раздела общего курса физики «Электромагнетизм» задачи по расчету электрических цепей формулируют иначе. Например, классическая задача со схемой из рис.1 может быть сформулирована следующим образом [4, 5] .

Напряжение в цепи (рис.1) меняется по закону $U = 141 sin\left(\omega t + \psi\right)$, $R = 10$ Ом, $X_L = 20$ Ом, $X_C = 15$ Ом. Найти действующее значение напряжения и максимальное значение тока в цепи.

Решение классическим методом

Сопротивление цепи найдем по формуле

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{10^2 + (20-15)^2} = 11{,}18\ Ом.$$

Найдем действующее значение э.д.с.:

$$U_д = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{141}{\sqrt{2}} = 100\,B$$

и действующее значение тока:

$$I_д = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{U_д}{Z} = \frac{100}{11{,}18} = 8{,}94A.$$

Тогда максимальное значение тока будет равно

$$I_m = \sqrt{2}\cdot I_д = \sqrt{2}\cdot 8{,}94 = 12{,}61A.$$

Заметим, что численное значение амплитуды тока совпало с полученным в предыдущей задаче. Однако значение начальной фазы тока при решении классическим методом мы не получили.

Пример 2.

Рассмотрим схему, состоящую из нескольких последовательно и параллельно соединенных элементов, как это изображено на рис. 2.

Для схемы заданы э.д.с. $E = 141\sin(\omega t + 20^\circ)B$, R_1 = 10 Ом, R_2 = 15 Ом и реактивные сопротивления X_L = 30 Ом, X_C = 20 Ом.

Найти комплексное сопротивление цепи, комплекс действующего значения и мгновенное значение тока.

Решение символическим методом

Найдем комплексное сопротивление каждой из ветвей схемы и комплексное сопротивление всей цепи:

$$Z_1 = R_1 - jX_C, \quad Z_2 = R_2 + jX_L,$$

$$Z = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} = -\frac{(R_1 - jX_C)\cdot\left(R_2 + jX_L\right)}{(R_1 - jX_C) + (R_2 + jX_L)},$$

$$Z = -\frac{(10 - j20)\cdot(15 + j30)}{10 - j20 + 15 + j30} = \frac{750}{25 + 10j} = \frac{150(5 - 2j)}{5^2 - (2j)^2} = \frac{150(5 - 2j)}{29} =$$

$$= \frac{150}{29}\sqrt{25 + 4}e^{jarctg\left(-\frac{2}{5}\right)} = \frac{150}{29}\sqrt{29}e^{-j22^\circ} = 27,85e^{-j22^\circ}\,Ом.$$

Найдем комплекс действующего значения э.д.с.

$$I_m = \dot{E} = \frac{E}{\sqrt{2}}e^{j\varphi} = \frac{141}{\sqrt{2}}e^{j20^\circ} = 100e^{j20^\circ}\,B,$$

и действующего значения тока

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z} = \frac{100e^{j20^\circ}}{27,85e^{-j22^\circ}} = 3,59e^{j42^\circ}\,A.$$

Мгновенное значение тока находим по формуле

$$i = \mathrm{Im}(\sqrt{2}\,\dot{I}\,e^{j\omega t}) = \sqrt{2}\cdot 3,57e^{j\omega(t+42^\circ)} = 5,08\sin(\omega t + 42^\circ)A.$$

Рассчитаем теперь схему из рис.2 в классической формулировке.

Решение классическим методом

Сопротивление всей цепи найдем по формуле:

$$Z = \frac{\sqrt{R_1^2 + X_C^2}\cdot\sqrt{R_2^2 + X_L^2}}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{\sqrt{10^2 + 20^2}\cdot\sqrt{15^2 + 30^2}}{\sqrt{(10 + 15)^2 + (30 - 20)^2}} = \frac{750}{27} = 27,85\,Ом.$$

Найдем действующие значения напряжения и тока:

$$U_д = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{141}{\sqrt{2}} = 100B, \qquad I_д = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{U_д}{Z} = \frac{100}{27,85} = 3,59A.$$

Максимальное значение тока будет равно

$$I_m = \sqrt{2}\cdot I_д = \sqrt{2}\cdot 3,59 = 5,08\,A,$$

что совпадает с предыдущим результатом.

Таким образом, символический метод расчета цепей синусоидального переменного тока:

1) упрощает нахождение общего сопротивления электрических цепей по сравнению с классическими методами, так как основан на правилах работы с резисторами;

2) позволяет по заданной э.д.с. найти начальную фазу тока и записать формулу для мгновенного значения тока;

3) для применения этого метода достаточно знать правила работы с комплексными числами и основные законы физики для электромагнитных полей.

Поэтому считаем, что с основами этого метода можно знакомить студентов специальностей «Медицинская физика» и «Ядерная и радиационная безопасность» факультета «Мониторинг окружающей среды» при изучении в третьем семестре курса «Основы функционального анализа и теории функций».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Балк М. Б.* и др. Реальные применения мнимых чисел. – К.: Радяньска Школа,1988. – 354 с.

2. *Бессонов Л. А.* Теоретические основы электротехники. – Москва: Высшая школа, 1978. – 528 с.

3. *Нейман В. Ю.* Теоретические основы электротехники в примерах и задачах.– Новосибирск: Издательство НГТУ, 2015. –166 с.

4. *Трофимова Т. И.* Электромагнетизм. – Москва: Академия, 2006. – 560 с.

5. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. Электричество. Т.3. – Москва: Наука, 1977. – 704 с.