

математической подготовки к школе до олимпиадных задач. Задания озвучены для младших школьников и содержат краткие пояснения, чтобы ребенок мог заниматься самостоятельно.

Приложение доступно на любом устройстве. Задача учителя не только дозировать и грамотно дать знания по предмету, но научить думать, рассуждать и принимать решения. Вдохнуть жизнь в каждую нестандартную, олимпиадную задачу. Внеурочные занятия повышают любопытство обучающихся и связывают программную математику, логику с жизнью, позволяют подготовить ребят к олимпиадам, турнирам и конкурсам. Каждое занятие непохоже на предыдущее. В конце учебного года дети участвуют в Международной олимпиаде по логике и математике.

ЛогикЛайк – это место, где растет поколение нового мышления, поддерживается детская любознательность и создается счастливое и успешное будущее. Платформа для учителей начальных классов, учителей математики, педагогов дополнительного образования, стремящихся привить любовь к логике, математике, а также учащихся и родителей, которые хотят и стремятся сделать школьную жизнь интереснее.

Петровский Г. Н., Петровская Н. В. (г. Минск, Республика Беларусь) НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МЕТОДИКИ РЕШЕНИЯ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ

Целью настоящей статьи является рассмотрение вопросов методики решения основных комбинаторных задач.

Мы будем исходить из того, что читателю известны основные понятия комбинаторики: размещения (A_n^m), размещения без повторений (A_n^m), сочетания (C_n^m), перестановки (P_n) и соответствующие формулы:

$$\underline{A}_n^m = n^m, A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1), P_n = n!, C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Изложение основной и дополнительной теории и много интересных задач.

I. Задачи, связанные с вычислением значений комбинаторных величин и алгебраических рациональных выражений с такими величинами.

Очевидно, что вычисление значений величин $\underline{A}_n^m, A_n^m, C_n^m, P_n$ при конкретных натуральных значениях чисел n и m не должна вызывать особых затруднений у учащихся, поскольку сводится к интерпретации формул для конкретных заданных чисел n и m и проведению несложных вычислений.

Не существенно более сложными являются задачи на вычисление значений рациональных выражений, аргументами которых являются величины $\underline{A}_n^m, A_n^m, C_n^m, P_n$ при конкретных натуральных значениях чисел n и m .

Пример 1. Вычислить значение величины $S = \frac{C_5^3 P_7}{A_7^4}$.

Решение. $S = \frac{C_5^3 P_7}{A_7^4} = \frac{\frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} = 60.$

II. Близкими по содержанию и методу решения являются задачи, связанные с определением свойств величин, задаваемых алгебраическими рациональными выражениями с величинами $\underline{A}_n^m, A_n^m, C_n^m, P_n$.

Пример 2. Доказать, что при любом натуральном $n > 3$ числовое значение выражения $\frac{P_n}{P_{n-3}}$ является натуральным числом, делящимся на 6.

Решение. Пусть $n > 3$ натуральное число. Тогда

$$\frac{P_n}{P_{n-3}} = \frac{n!}{(n-3)!} = n(n-1)(n-2).$$

Среди трех последовательных натуральных чисел всегда есть по крайней мере одно, делящееся на 2, и одно делящееся на 3. Значит произведение $n(n-1)(n-2)$ делится на 6.

Пример 3. Доказать, что при любом натуральном $n > 2$ числовое значение выражения $\frac{C_n^2}{C_{n-2}^4}$ является натуральным числом, делящимся на 24.

Решение: при любом натуральном $n > 2$ имеем

$$\frac{C_n^2}{C_{n-2}^4} = \frac{n!4!}{2!(n-2)!} = 12n(n-1).$$

Поскольку произведение $n(n-1)$ делится на 2, то произведение $12n(n-1)$ делится на 24.

III. Решение уравнений и систем уравнений.

При решении уравнений и систем уравнений, в условия которых входят какие-либо из комбинаторных величин $\underline{A}_n^m$, A_n^m , C_n^m , P_n , следует обращать внимание на то, что их аргументы (в данном случае величины n и m) являются натуральными числами и во всех случаях, кроме величины $\underline{A}_n^m$, должно быть $1 \leq m \leq n$.

Пример 4. Решить уравнение $P_{x+3} = 48(x+2)P_x$.

Решение: Из условия примера следует, что аргументы x и $x+3$ должны быть натуральными числами, что эквивалентно условию x – натуральное число.

Расписывая величины P_{x+3} и P_x , преобразуем рассматриваемое уравнение к виду $(x+3)(x+2)(x+1)P_x = 48(x+2)P_x$. Поскольку величины $x=2$ и P_x в области допустимых значений переменной не обращаются в нуль, то последнее уравнение можно привести к виду $(x+3)(x+1) = 48$, а потом – к виду $x^2 + 4x - 45 = 0$. Последнее уравнение имеет два корня $x = -9$ и $x = 5$. Первый из корней не входит в ОДЗ, а второй – $x = 5$ – является решением рассматриваемого уравнения.

Пример 5. Решить систему уравнений $\{C_x^2 + C_y^2 = 31, \underline{A}_x^2 + \underline{A}_y^2 = 74\}$.

Решение: Область допустимых значений: x и y – натуральные числа, большие или равные 3.

Исходя из формул для вычисления числа сочетаний и размещений с повторениями, перепишем рассматриваемую систему в виде $\{\frac{x(x-1)}{2} + \frac{y(y-1)}{2} = 31, x^2 + y^2 = 74\}$, а потом – в виде $\{x^2 - x + y^2 - y = 62, x^2 + y^2 = 74\}$. Последняя система приводится к виду $\{x + y = 12, x^2 + y^2 = 74\}$. Выразим из первого уравнения x через y , подставим его во второе уравнение и после сокращения получим уравнение $y^2 - 12y + 35 = 0$. Из этого уравнения имеем два решения: $y = 5$ и $y = 7$, что дает нам два решения системы $x = 5, y = 7$ и $x = 7, y = 5$.

IV. Методика решения текстовых задач в ситуации единственного выбора.

Решение текстовых комбинаторных задач может вызывать определенные затруднения у учащихся, связанные с необходимостью построения математической модели задачи. Ведь до выполнения всех вычислений необходимо определить, во-первых, какая из величин $\underline{A}_n^m$, A_n^m , C_n^m или P_n описывает описанный в условии задачи процесс, и, во-вторых, определить параметры n и m . Естественно, что наиболее сложным является поиск ответа на первый из этих двух вопросов.

Помочь им в этом может следующая таблица

		Повторения допустимы?	
		да	нет
Порядок важен?	да	$\underline{A}_n^m$	A_n^m

	нет	×	C_n^m
--	-----	---	---------

Рассуждения при решении следует вести по следующей схеме:

1. Из скольких выбираем? Ответ определяет число n .
2. Сколько выбираем? Ответ определяет число m .
3. Порядок важен? Да/нет
4. Повторения допустимы? Да/нет

Ответ на третий и четвертый вопросы определяет комбинаторную величину A_n^m , A_n^m , C_n^m или P_n , а ответы на первый и второй вопросы – параметры n и m .

Замечание: Следует иметь в виду, что по определению $P_n = A_n^n$.

Пример 6. Из класса, в котором обучается 28 учеников, необходимо сформировать команду из 5 учеников для участия в школьной интеллектуальной олимпиаде. Сколькими способами можно это сделать?

Решение: Анализ задачи произведем по указанной выше схеме.

1. Из скольких выбираем? Из 28. Значит $n = 28$.
2. Сколько выбираем? Пятерых. Значит $m = 5$.
3. Порядок важен? Нет. Все члены команды равноправны.
4. Повторения допустимы? Нет. Невозможно одного ученика в команду включить дважды.

Исходя из этих ответов по приведенной выше таблице заключаем, что математической моделью задачи будет C_{28}^5 . Значит существует $C_{28}^5 = 98280$ способов сформировать команду.

Пример 7. Сколько пятизначных натуральных чисел можно записать при помощи цифр от 1 до 9, если цифры в числах не повторяются.

Решение: Цифры числа выбираем из девяти цифр, значит $n = 9$. Цифр в числе должно быть пять, значит $m = 5$. Повторения цифр в числе, по условию быть не может. Порядок следования цифр в числе важен. Значит, математической моделью задачи будет A_9^5 . Но тогда, количество цифр, которые можно составить при условии задачи, будет равно $A_9^5 = 15120$.

Анаграммой данного слова называются все слова, получающиеся перестановкой букв исходного слова. Например, слово «кот» имеет 6 анаграмм: кот, кто, окт, отк, ток, тко (конечно же, не предполагается, что все анаграммы являются словами русского языка).

Пример 8. Сколько анаграмм имеет слово Миссисипи.

Решение: Понятно, что заглавная буква «М» в перестановках участвовать не может. Значит анаграммы могут возникать за счет перестановок оставшихся 8 букв и таких перестановок будет, вообще говоря, $8!$. Но перестановки, отличающиеся переменной места буквы «с», равно как и переменной места буквы «и» будут порождать одну и ту же анаграмму. Значит, количество анаграмм будет равно $\frac{8!}{4!3!} = 56$.

V. Методика решения текстовых задач в ситуации двух выборов.

В задачах этого типа фигурируют два множества, из которых может или должен производиться выбор элементов выборки. Приведем соответствующие примеры.

Пример 9. Из класса, в котором обучается 17 девочек и 11 мальчиков необходимо сформировать команду из 3 девочек и 3 мальчиков. Сколькими способами можно это сделать?

Пример 10. Из класса, в котором обучается 17 девочек и 11 мальчиков необходимо сформировать команду, в которую должны войти 3 девочки или 3 мальчика. Сколькими способами можно это сделать?

Несмотря на внешнюю похожесть этих задач, они являются существенно различными.

В первой из них, члены команды выбираются одновременно из обоих множеств: из множества девочек И из множества мальчиков. Во второй задаче члены команды должны выбираться только из одного множества: из множества девочек ИЛИ из множества мальчиков. В соответствии с теоремами комбинаторики в первом случае общее количество выборок будет получаться как произведение числа выбора девочек на число выборок мальчиков, а во втором случае – как сумма числа выбора девочек и числа выборок мальчиков.

Решим указанные задачи.

Пример 9. Количество вариантов выбора девочек равно $C_{17}^3 = 680$, количество вариантов выбора мальчиков равно $C_{11}^3 = 165$. Общее количество вариантов формирования команды будет равно $680 \times 165 = 112200$.

Пример 10. Количество вариантов выбора девочек равно $C_{17}^3 = 680$, количество вариантов выбора мальчиков равно $C_{11}^3 = 165$. Общее количество вариантов формирования команды будет равно $680 + 165 = 845$.

Пример 11. Сколько пятизначных чисел с различными цифрами можно составить из цифр от 0 до 9?

Решение. Чисто внешне эта задача похожа на рассмотренную выше задачу 7, но между ними есть существенное различие. В задаче 7 все цифры от 1 до 9 могут стоять на любой позиции в числе и, следовательно, они равноправны. В настоящей задаче на первой позиции числа не может стоять число 0 и поэтому цифра первой позиции выбирается из цифр от 1 до 9, а цифры последующих позиций – от цифр от 0 до 9.

Следовательно, мы имеем два выбора: отдельно первой цифры и отдельно остальных четырех.

Первую цифру числа можно выбрать девятью способами. Если она уже выбрана, то для выбора остальных четырех цифр остается 9 вариантов (цифры не повторяются!), т. е. для их выбора существует $A_9^4 = 3024$ способа. В данной задаче выборы связаны союзом «и» (выбор первой цифры и выбор еще четырех цифр).

Но тогда, в условиях задачи можно составить $9 \times 3024 = 27216$ чисел.

Пример 12. Сколько пятизначных чисел, составленных из цифр от 0 до 9, имеют хотя бы одну повторяющуюся цифру?

Решение. Количество пятизначных чисел, составленных из цифр от 0 до 9 и не имеющих повторяющихся цифр, подсчитано в предыдущей задаче.

Количество чисел, составленных из цифр от 0 до 9, можно подсчитать аналогично, и оно будет равно $9A_{10}^4 = 9 \times 10^4 = 90000$.

Тогда, количество пятизначных чисел, составленных из цифр от 0 до 9, имеют хотя бы одну повторяющуюся цифру, будет равно $N = 90000 - 27216 = 62784$.

Список использованных источников

1. Петровский, Г. Н. Элементы комбинаторики : пособие для учителей средней школы / Г. Н. Петровский, Н. В. Петровская. – Минск : Издательство Речь, 2021. – 69 с.