Визуальная информация, самостоятельное составление схемы или заполнение таблицы формирует у учащихся умение анализировать, выделять главное, обобщать, лаконично излагать мысли и решать задачи. Заранее подготовленный мультимедийный урок является основой для логического анализа.

Использование интерактивной панели (мультиборда) на уроках предоставляет возможность осуществить обратную связь, что позволяет обеспечить интерактивный диалог; создает условия для максимального учета индивидуальных образовательных возможностей и потребностей учащихся, способствует развитию самостоятельности и познавательных способностей; повышает эффективность и интенсивность учебной деятельности учащихся.

Список использованных источников

1. Кузьминов, Я. В. Главный тренд российского образования – цифровизация / Я. В. Кузьминов. – Режим доступа : www.ug.ru. – Дата доступа : 20.12.2021.
2. Шамова, Т. И. Активизация учения школьников / Т. И. Шамова. – Москва : Педагогика, 1990. – 208 с.
3. Щукина, Г. И. Активизация познавательной деятельности учащихся в учебном процессе / Г. И. Щукина. – Москва : Педагогика, 1991. – 278 с.

Басик А. И., Ковалевич Н. И. (г. Брест, Республика Беларусь)

О ХАРАКТЕРНЫХ ОШИБКАХ ПРИ РЕШЕНИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Достойны исследования и «вечные невидимки» школьного курса математики (назовём их так вслед за С. Гомоновым и А. Арзамасцевым [1]) – функциональные уравнения. Упомянутое фундаментальное математическое понятие (сложное в силу высокого уровня абстрактности) странным образом обречено на весьма широкое использование в школьном курсе математики (бесконечные арифметическая и геометрическая прогрессии, чётность, нечётность, периодичность функции и др.; основные элементарные функции могут быть введены как решения специальных функциональных уравнений) при отсутствии там его имени, его определения, раскрытия его объёма. Задания на исследование функциональных уравнений часто предлагаются на математических олимпиадах разных уровней. Лишь сформированные в процессе трудоёмкой работы осознанность и глубина предметных знаний позволяют учащимся успешно справляться с предложенными на олимпиадах заданиями указанного типа.

На примерах покажем часто допускаемые учащимися (как показывает практика) ошибки – незаконное расширение ориентировочной основы действия.

Задача 1. *Найти все функции* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, *удовлетворяющие при всех* $x,y\in\mathbf{R}$ *соотношению*

$$f((x-y)^2)=(f(x))^2-2xf(y)+y^2. \qquad (1)$$

Решение. В (1) положим $x=y=0$, получим

$$f(0)=(f(0))^2-2\cdot 0\cdot f(0)+0^2 \Leftrightarrow (f(0))^2-f(0)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(0)=0, \\ f(0)=1. \end{array}\right.$$

Рассмотрим случай $f(0)=0$. Подставим $x=y$ в (1), тогда

$$0=(f(y))^2-2yf(y)+y^2 \Leftrightarrow (f(y)-y)^2=0 \Leftrightarrow f(y)=y.$$

Проверкой убеждаемся, что функция $f(x)=x$ удовлетворяет при всех $x,y\in\mathbf{R}$ соотношению (1). Действительно,

$$f((x-y)^2)=(x-y)^2=x^2-2xy+y^2=(f(x))^2-2xf(y)+y^2.$$

Рассмотрим случай $f(0)=1$. Подставим $x=y$ в (1), тогда

$$(f(y))^2-2yf(y)+y^2=1 \Leftrightarrow (f(y)-y)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(y)-y=-1, \\ f(y)-y=1. \end{array}\right.$$

Проверкой убеждаемся, что функция $f(x)=x+1$ удовлетворяет при всех $x,y\in\mathbf{R}$ соотношению (1). Действительно,

$$f((x-y)^2)=(x-y)^2+1=x^2-2xy+y^2+1=$$
$$=x^2+2x+1-2x(y+1)+y^2=(f(x))^2-2xf(y)+y^2.$$

Функция $f(x)=x-1$ не удовлетворяет соотношению (1), например, при $x=-1$ и $y=1$:

$$f((x-y)^2)=f(4)=3 \text{ и } (f(x))^2-2xf(y)+y^2=(-2)^2-2\cdot(-1)\cdot 0+1^2=5.$$

Ответ: $f(x)=x$ или $f(x)=x+1$.

Однако это решение, приведшее к верному ответу, нельзя считать правильным, так как полученную совокупность

$$\left[\begin{array}{l} f(y)-y=-1, \\ f(y)-y=1. \end{array}\right.$$

нужно интерпретировать следующим образом. Пусть $A\subset\mathbf{R}$ – произвольное числовое множество, тогда

$$f(y)=\begin{cases} y+1, & y\in A, \\ y-1, & y\notin A. \end{cases}$$

Условие $f(0)=1$ равносильно тому, что $0\in A$. Для окончания решения еще нужно доказать, что $A=\mathbf{R}$, чего не сделано в приведенном выше решении данного функционального уравнения и допущена ошибка незаконного расширения ориентировочной основы действия, т.е. без обоснования принято, что $A=\mathbf{R}$.

Завершить решение задачи 1 можно следующим образом. Пусть $f(0)=1$ и функция $f(x)$ удовлетворяет (1). Тогда при всех $x\in\mathbf{R}$ имеем

$$f(x^2)=f((0-x)^2)=(f(0))^2-2\cdot 0\cdot f(x)+x^2=x^2+1.$$

Полученное равенство означает, что $f(x)=x+1$ при $x\geq 0$.

Покажем, что $A=\mathbf{R}$. Пусть найдется $x_0\notin A$, тогда $x_0<0$ и $f(x_0)=x_0-1$. Имеем

$$(x_0-1)^2+1=f((x_0-1)^2)=(f(x_0))^2-2x_0f(1)+1^2=(x_0-1)^2-4x_0+1.$$

Т. к.

$$(x_0-1)^2+1=(x_0-1)^2-4x_0+1 \Leftrightarrow x_0=0,$$

то предположение о том, что $A\neq\mathbf{R}$ неверно. Задача 1 решена.

Несколько иное решение задачи 1 приведено в [2, с. 68].

Задача 2. *Найти все функции* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$*, удовлетворяющие при всех* $x,y\in\mathbf{R}$ *соотношению*

$$f(x+f(y))=7x+49y+16. \qquad (2)$$

Решение. Пусть функция $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ удовлетворяет (2), тогда при каждом $x\in\mathbf{R}$ выполняется равенство

$$f(f(x))=f(0+f(x))=7\cdot 0+49x+16=49x+16.$$

Правая часть последнего равенства подсказывает, что $f(x)=kx+b.$ Т. к. $f(f(x))=k(kx+b)+b=k^2x+kb+b,$ то для нахождения коэффициентов k и b получим систему уравнений

$$\begin{cases} k^2=49, \\ kb+b=16, \end{cases}$$

решениями которой являются пары чисел $k=7, b=2$ и $k=-7, b=-\frac{8}{3}.$

В первом случае получим $f(x)=7x+2$ и при любых $x,y\in\mathbf{R}$ имеем

$$f(x+f(y))=7(x+7y+2)+2=7x+49y+16,$$

т. е. функция удовлетворяет уравнению (2).

Во втором случае $f(x)=-7x-\frac{8}{3}$,

$$f(x+f(y))=-7\left(x-7y-\frac{8}{3}\right)-\frac{8}{3}=-7x+49y+16$$

и (2) не выполняется, например, при $x=1, y=0.$

Ответ: $f(x)=7x+2$.

В этом решении неверным является утверждение о том, что если сложная функция $f(f(x))$ является линейной, то и $f(x)$ также является линейной. Покажем, что уравнению

$$f(f(x))=49x+16$$

удовлетворяет нелинейная, разрывная функция

$$f(x)=\begin{cases} 7x+2, & x\in\mathbf{Q}, \\ -7x-\frac{8}{3}, & x\notin\mathbf{Q}. \end{cases}$$

Действительно, если $x\in\mathbf{Q}$, то $7x+2\in\mathbf{Q}$ и, следовательно,

$$f(f(x))=7(7x+2)+2=49x+16,$$

а если $x\notin\mathbf{Q}$, то $-7x-\frac{8}{3}\notin\mathbf{Q}$ и поэтому

$$f(f(x))=-7\left(-7x-\frac{8}{3}\right)-\frac{8}{3}=49x+16.$$

Найти все функции, удовлетворяющие условию задачи 2 можно следующим образом. Если функция $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ удовлетворяет уравнению (2), то при всех $x,y\in\mathbf{R}$ выполняются равенства

$$f(f(x+f(y)))=f(7x+49y+16)$$ и
$$f(f(x+f(y)))=f(0+f(x+f(y)))=7\cdot 0+49(x+f(y))+16=49x+49f(y)+16.$$
Следовательно, при всех $x,y\in\mathbf{R}$ выполняется равенство
$$f(7x+49y+16)=49x+49f(y)+16. \qquad (3)$$
Пусть $y\in\mathbf{R}$ произвольно. В формулу (3) подставим $x=\dfrac{-48y-16}{7}$, получим
$$f(y)=7(-48y-16)+49f(y)+16 \Leftrightarrow f(y)=7y+2.$$
Таким образом, мы доказали, что если функция удовлетворяет уравнению (2), то в каждой точке $y\in\mathbf{R}\,(f(y)=7y+2).$ Проверка (см. решение задачи 2) показывает, что найденная функция удовлетворяет (2). Задача 2 решена.

Список использованных источников

1. Арзамасцев, А. Л. Вечные «невидимки» школьного курса математики, или Функциональные уравнения в школе вчера, сегодня, завтра [Электронный ресурс] / А. Л. Арзамасцев, С. А. Гомонов // Концепт. – 2015. – № 1 (январь). – С. 6–10. – Режим доступа : http://e-koncept.ru/2015/15002.htm. – Дата доступа : 05.05.2022.
2. Басик, А. И. Готовимся к олимпиаде: числовые последовательности, функциональные уравнения / А. И. Басик, Н. И. Ковалевич. – Брест : Издательство БрГТУ, 2019. – 142 с.

Колбанова Т. В. (г. Мозырь, Республика Беларусь)

РАЗВИТИЕ ГУМАНИТАРИЗАЦИИ В ИНТЕРЕСАХ УСТОЙЧИВОГО РАЗВИТИЯ В ШКОЛЬНОЙ ГЕОГРАФИИ НА ПРИМЕРЕ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЫ «ПРОБЛЕМА УТИЛИЗАЦИИ ХОЛОДИЛЬНИКОВ В БЕЛАРУСИ»

Аннотация: в данной статье рассматриваются влияние исследовательской деятельности на развитие гуманитаризации в предмете «География» в интересах ЦУР.

Ключевые слова: гуманитаризация, исследовательская деятельность, цели устойчивого развития общества

Abstract: this article examines the impact of research activities on the development of humanitarization in the subject "Geography" in the interests of the SDGs.

Key words: humanitarization, research activities, goals of sustainable development of society

Согласно педагогическому словарю, гуманитаризация это – «система мер, направленных на приоритетное развитие общекультурных компонентов в содержании образования и таким образом, на формирование личностной зрелости обучаемых».

Гуманитаризация образования направлена, прежде всего, на мир культуры, мир человека, на очеловечивание знания, на формирование гуманитарного мироощущения на основе нравственной ответственности человека перед другими людьми, обществом, природой. Предмет «География» развивает гуманитаризацию, используя задачи краеведения при изучения темы, творческие задания и исследовательскую деятельность.

Исследовательской деятельности присущи характеристики активной, объективной, логической, гуманистической, ориентирующей и интегрирующей познавательной деятельности, выражающейся в осознанности и смысловой направленности. Рассмотрим на примере выполненной учащимися X классов исследовательской работы, как формируется и развивается гуманитаризация при изучении географии.