БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе и
образовательным инновациям
________________ О.Н. Прохоренко

«01» июля 2022 г.

Регистрационный № УД – 10903/уч.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:

1-31 03 08 Математика и информационные технологии
(по направлениям)

Направления специальности:

1-31 03 08-01 Веб-программирование и интернет-технологии
1-31 03 08-02 Математическое и программное обеспечение мобильных устройств

2022 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 08-2021, типового учебного плана, регистрационный № G31-1-012/тип. от 31.03.2021 и учебных планов № G31-1-011/ уч. от 25.05.2021 г., № G31-1-004/ уч.з от 31.05.2021 г., № G31-1-003/ уч.ин. от 31.05.2021 г., № G31-1-220/ уч. от 22.03.2022 г., № G31-1-218/ уч.з от 27.05.2022 г., № G31-1-225/ уч.ин. от 27.05.2022 г.; № G31-1-017/ уч. от 25.05.2021 г., № G31-1-004/ уч.з от 31.05.2021 г., № G31-1-001/ уч.ин. от 31.05.2021 г., № G31-1-221/ уч. от 22.03.2022 г., № G31-1-219/ уч.з от 27.05.2022 г., № G31-1-235/ уч.ин. от 27.05.2022 г.

СОСТАВИТЕЛИ:

Василий Михайлович Волков, заведующий кафедрой веб-технологий и компьютерного моделирования Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, доцент;

Алексей Иванович Азаров, доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Марина Викторовна Игнатенко, доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕЦЕНЗЕНТ

Леонид Александрович Янович, главный научный сотрудник Института математики Национальной академии наук Беларуси, член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой веб-технологий и компьютерного моделирования БГУ
(протокол № 11 от 12.05.2022 г.)

Научно-методическим Советом БГУ
(протокол № 5 от 27.05.2022 г.)

Заведующий кафедрой ____________________ В.М. Волков

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

В настоящее время численные методы являются одним из наиболее интенсивно развивающихся разделов математики. Это связано как с бурным развитием вычислительной техники, наращиванием ее мощности, так и широким применением средств математического моделирования практически во всех сферах жизнедеятельности человека для оптимизации исследуемого объекта или прогнозирования ситуации. Поэтому в последнее время разрабатывается много новых численных процедур, применяемых как к новым, так и классическим объектам исследования, при этом многие классические алгоритмы решения задач претерпевают изменения с целью улучшения их вычислительных свойств.

Все это определяет важность учебной дисциплины «*Численные методы*» в учебном процессе, а также обуславливает необходимость внесения своевременных изменений и дополнений в ее содержание.

Учебная программа «*Численные методы*» разработана для студентов II-III курса очной (дневной) и III–V курса заочной формы обучения по специальности 1-31 03 08 Математика и информационные технологии (по направлениям механико-математического факультета Белорусского государственного университета.

Центральной идеей образования по дисциплине “*Численные методы*” является необходимость обучения студентов современным подходам и численным методам решения прикладных задач, а также принципами их грамотного практического использования.

Второй важнейшей идеей обучения является подготовка студентов к практической работе в области численного моделирования научных и прикладных математических задач естествознания.

Цели и задачи учебной дисциплины

Дисциплина «*Численные методы*» имеет прикладную направленность. ***Основная цель учебной дисциплины*** заключаются в освоении учащимися современной технологии математического моделирования, основанной на использовании численных методов и прикладного программного обеспечения.

Задачи дисциплины состоят в изучении основных принципов построения численных методов и оценки их вычислительных качеств, изучении основных методов численного решения задач линейной алгебры, анализа и дифференциальных уравнений, развития умения и навыков выбора адекватного алгоритма, его программной реализации, интерпретации результатов численных расчетов и степени их достоверности.

Опыт преподавания дисциплины «*Численные методы*» на механико-математическом факультете БГУ показывает, что обучение на практических занятиях должно проводиться в двух направлениях: изучения основ численных методов на примере решения теоретических задач и выполнения расчетных работ с использованием компьютеров. При этом только непосредственное общение исследователя с конкретными задачами кроме возможности закрепить лекционный материал, помогает дать общее представление и выработать необходимую интуицию для нахождения эффективных путей решения задач вычислительной математики.

В последние годы высокая техническая оснащенность и рост возможностей вычислительной техники позволяют существенно обогатить практическую сторону вычислительного практикума. Использование современных компьютерных математических систем (Maple, MathCAD, MatLAB, Mathematica и др.), а, также стандартных библиотек численного анализа позволяют, не углубляясь в знание частных вопросов, сосредоточиться непосредственно на объекте (цели) исследования, ускорить процесс получения решения типовых задач. Как следствие, решение большего числа разнообразных задач способствует приобретению студентами некоторого опыта практических расчетов. При этом спектр рассматриваемых проблем расширяется от типичных до достаточно сложных в вычислительном отношении задач, требующих для численной реализации использования мощных компьютеров. Появляется возможность уделять больше внимания анализу характеристик вычислительных алгоритмов и связи практических результатов с полученными теоретическими оценками.

Более того, часть времени, освобождающегося за счет использования современной вычислительной техники, позволяет уделять больше внимания детальному рассмотрению теоретических задач вычислительной математики. Это несомненно является важным моментом вычислительного практикума, поскольку как правило именно такого рода задачи помогают усваиванию, закреплению и более полному пониманию основных определений, понятий, результатов и алгоритмов вычислительной математики. Кроме того, решение теоретических задач позволяет установить связь между различными разделами математики, в частности, численного анализа, и, как следствие, способствует полноте восприятия курса по численным методам. При этом значительно возрастает роль самостоятельной работы студентов над предметом, без чего его успешное освоение представляется маловероятным. Общая оценка качества усвоения студентами учебного материала осуществляется в ходе выполнения индивидуальных заданий.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Дисциплина «*Численные методы*» относится **к модулю** «Численные методы» компонента учреждения высшего образования.

Связи с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Программа учебной дисциплины «*Численные методы*» составлена с учетом межпредметных связей и программ по смежным дисциплинам. Её изучение базируется на знаниях отдельных разделов из университетских курсов по «Алгебре и теории чисел», «Математическому анализу», «Функциональному анализу», «Дифференциальным уравнениям» и «Уравнениям математической физики».

В основу учебной программы дисциплины «*Численные методы*» положены одноименные программы, разработанные академиками А.А.Самарским и Н.С. Бахваловым (МГУ им. М.В. Ломоносова).

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины должно обеспечить формирование у студентов следующей ***специализированной*** компетенции:

– СК-7. Осуществлять обоснованный выбор рациональной численной методики для решения типовых математических задач, проводить ее реализацию с использованием современных программных средств компьютерных вычислений, оценивать корректность полученных результатов и анализировать возможности альтернативных подходов.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

знать:

– источники погрешности численных результатов;

– понятия устойчивости, сходимости и вычислительной сложности численных алгоритмов;

– требования корректности постановки задачи;

– основные приемы оценки погрешности численных методов;

– назначение и вычислительные качества наиболее популярных численных методов интерполирования (формулы Лагранжа и Ньютона, метод наилучшего приближения в среднеквадратичной норме), приближенного интегрирования (формулы трапеций и Симпсона, методы типа Гаусса наивысшей алгебраической степени точности), для задач алгебры, дифференциальных уравнений (метод Гаусса, LU-факторизация, итерационные методы Ричардсона, Якоби, Зейделя, последовательной верхней релаксации, минимальных невязок, сопряженных градиентов, методы Рунге-Кутты и Адамса, метод стрельбы, быстрое дискретное преобразование Фурье);

– достоинства и недостатки явных и неявных численных методов решения дифференциальных уравнений;

– современные тенденции в развитии методов численного решения математических и прикладных задач;

уметь:

– оценить корректность постановки задачи;

– выбрать адекватный метод для численного решения поставленной задачи;

– использовать численные методы для решения математических задач алгебры, анализа и дифференциальных уравнений;

– анализировать достоверность и трактовать численные результаты;

владеть:

– навыками работы с современными программными средствами численного решения математических и прикладных задач;

– навыками программирования численных алгоритмов;

– основными приемами априорной и апостериорной оценки погрешности численного решения задач алгебры и анализа.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина «*Численные методы*» рассчитана на 300 часов в 3–6 семестрах, из них 164 аудиторных часа, в том числе 60 часов лекций, 92 часа лабораторных занятий и 12 часов УСР для очной (дневной) формы обучения. Рекомендуется следующее ***распределение часов*** по курсам и видам учебной работы:

Дневная форма обучения	Трудоемкость, зач. ед.	Экз., сем.	Зач., сем.	Всего часов	В том числе аудиторных	Из них		
						Лекций	Лабораторных занятий	УСР
3 сем.				60	32	14	16	2
4 сем.	3		4	60	28	12	14	2
5 сем.	3		5	90	54	18	32	4
6 сем.	3	6		90	50	16	30	4
Всего	**9**			**300**	**164**	**60**	**92**	**12**

Для заочной формы обучения объем дисциплины составляет 300 часов в 6–9 семестрах, из них 262 часа самостоятельной работы и 38 часов аудиторных занятий, в том числе 20 часов лекций и 18 часов лабораторных занятий. В рамках аудиторного контроля управляемой самостоятельной работы предусмотрены две контрольные работы в 7 и 8 семестрах. Рекомендуется следующее ***распределение часов*** по курсам и видам учебной работы:

Заочная форма обучения	Трудоемкость, зач. ед.	Экз., сем.	Зач., сем.	Всего часов	В том числе аудиторных	Из них		
						Лекций	Лабораторных занятий	Контр. раб.
6 сем.	3		6	120	12	6	6	
7 сем.	3		7	70	12	6	6	№1
8 сем.				20	14	8	6	№2
9 сем.	3	9		90				
Всего	**9**			**300**	**38**	**20**	**18**	**2**

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Введение

Тема 1.1 Об основных задачах и содержании вычислительной математики.

Тема 1.2 Содержание и назначение вычислительного эксперимента в трактовке А.А. Самарского.

Раздел 2. Элементы теории погрешностей

Тема 2.1 Значащие и верные цифры в записи приближенного числа. Абсолютная и относительная погрешности. Погрешности арифметических операций.

Тема 2.2 Прямая и обратная задачи теории погрешностей.

Тема 2.3 Примеры неустойчивых алгоритмов.

Тема 2.4 Погрешность вычислений на ЭВМ. Погрешность округлений и компьютерная запись чисел.

Раздел 3. Интерполирование и приближение функций

Тема 3.1 Системы функций Чебышева. Интерполирование обобщенными многочленами.

Тема 3.2 Алгебраическое интерполирование. Построение интерполяционного многочлена в форме Лагранжа.

Тема 3.3 Конечные разности.

Тема 3.4 Разделенные и разности, их свойства.

Тема 3.5 Интерполяционный многочлен Ньютона.

Тема 3.6. Представление погрешности интерполирования.

Тема 3.7. Минимизация погрешности интерполирования дискретно заданных функций.

Тема 3.8 Многочлены Чебышева.

Тема 3.9 Минимизация погрешности интерполирования для функций, заданных на отрезке.

Тема 3.10 Интерполирование по равноотстоящим узлам.

Тема 3.11 Интерполирование сплайнами.

Тема 3.12 Интерполяционная задача Эрмита.

Тема 3.13 Тригонометрическое интерполирование. Дискретное и быстрое преобразование Фурье.

Тема 3.14 Численное дифференцирование и оценка его погрешности.

Тема 3.15 Задача аппроксимации. Метод наименьших квадратов.

Раздел 4. Приближенное вычисление интегралов

Тема 4.1 Квадратурные формулы общего вида. Квадратурные формулы, основанные на алгебраическом интерполировании.

Тема 4.2 Простейшие квадратурные правила Ньютона-Котеса. Погрешность интегрирования.

Тема 4.3 Составные квадратурные формулы Ньютона-Котеса. Погрешность интегрирования.

Тема 4.4 Правила Рунге и Эйткена практической оценки погрешности квадратурных формул.
Тема 4.5 Квадратурные формулы типа Гаусса. Оптимизация распределения узлов квадратурной формулы.
Тема 4.6 Частные случаи квадратур Гауссова типа. Вычисление интегралов от функций специального вида.

Раздел 5. Обобщение интерполирования и численного интегрирования на случай функций многих переменных

Тема 5.1. Интерполирование многочленами многих переменных.
Тема 5.2. Численное дифференцирование функций многих переменных.
Тема 5.3 Вычисление кратных интегралов. Метод Монте-Карло.

Раздел 6. Численные методы решения систем ЛАУ

Тема 6.1 Нормы векторов и матриц. Оценка погрешности решения систем ЛАУ. Число обусловленности.
Тема 6.2 Прямые методы. Метод Гаусса. Выбор ведущего элемента.
Тема 6.3 LU факторизация. Разложение Холецкого. Метод прогонки и ортогонализации.
Тема 6.4 Итерационные методы решения систем ЛАУ. Метод простой итерации.
Тема 6.5 Сходимость итерационных методов. Оценка числа итераций. Выбор оптимального параметра.
Тема 6.6 Неявные итерационные методы. Понятие о переобуславливателе. Методы Якоби, Зейделя, последовательной верхней релаксации.
Тема 6.7 Методы наискорейшего спуска и сопряженных градиентов.

Раздел 7. Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц

Тема 7.1 Свойства собственных векторов и собственных значений матриц. Преобразование подобия.
Тема 7.2 Каноническая форма Фробениуса. Метод Данилевского.
Тема 7.3 Степенной метод нахождения максимальных по модулю собственных значений.
Тема 7.4 Метод вращений. Понятие о QR алгоритме.

Раздел 8. Решение нелинейных уравнений и систем

Тема 8.1 Отделение корней. Метод дихотомии. Кратные корни. Корни полиномов.
Тема 8.2 Метод простой итерации. Условие сходимости и скорость сходимости.
Тема 8.3 Метод Ньютона. Квадратичная сходимость. Модификации метода Ньютона.
Тема 8.4 Понятие о методах нелинейной оптимизации. Градиентные методы.

Тема 8.5 Обзорное занятие по теме «Численные методы линейной алгебры и методы решения нелинейных уравнений»

Раздел 9. Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

Тема 9.1 Одношаговые методы. Метод Эйлера. Оценка скорости сходимости.

Тема 9.2 Методы Рунге-Кутты.

Тема 9.3 Многошаговые методы. Устойчивость, условие корней. Метод Адамса.

Тема 9.4 Понятие о жестких системах ОДУ.
А-устойчивость. Метод Гира.

Раздел 10. Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

Тема 10.1 Разностный метод решения краевой задачи для уравнения второго порядка.

Тема 10.2 Методы построения разностных схем. Интегро-интерполяционный метод. Понятие о компактных разностных схемах. Метод Галеркина.

Тема 10.3 Аппроксимация и сходимость. Оценка погрешности линейных разностных схем.

Тема 10.4 Разностные методы решения краевых задач для нелинейных ОДУ.

Тема 10.5 Методы редукции краевых задач к задачам Коши. Методы дифференциальной прогонки и метод стрельбы.

Раздел 11. Численное решение интегральных уравнений Фредгольма

Тема 11.1 Основные подходы к решению интегральных уравнений. Метод Фурье для численного решения интегральных уравнений типа свертки.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная (дневная) форма получения образования с применением электронных средств обучения (ДО)

Номер темы	Название темы	Количество аудиторных часов					Литература	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Количество-часов УСР		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	**Введение**	**0,5**					**[2]**	
1.1 1.2	Об основных задачах и содержании вычислительной математики Содержание и назначение вычислительного эксперимента в трактовке А.А. Самарского	0,5					[2]	
2	**Элементы теории погрешностей**	**0,5**			**2**		**[1], [3]**	
2.1 2.2 2.3 2.4	Значащие и верные цифры в записи приближенного числа. Абсолютная и относительная погрешности. Погрешности арифметических операций Прямая и обратная задачи теории погрешностей Примеры неустойчивых алгоритмов Погрешность вычислений на ЭВМ. Погрешность округлений и компьютерная запись чисел	0,5			2		[1], [3]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе
3	**Интерполирование и приближение функций**	**13**			**16**	**2**	**[1], [2], [3], [12], [17]**	
3.1	Системы Функций Чебышева. Интерполирование обобщенными многочленами	1			2		[2], [3], [12], [17]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабора-

								торной работе, письменный отчет с устной защитой по домашнему заданию
3.2	Алгебраическое интерполирование. Построение интерполяционного многочлена в форме Лагранжа	1			2		[2], [3], [12], [17]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, письменный отчет с устной защитой по домашнему заданию
3.3	Конечные разности	1					[2], [3], [12], [17]	
3.4	Разделенные и разности, их свойства	1					[2], [3], [12], [17]	
3.5	Интерполяционный многочлен Ньютона	0,5					[2], [3], [12], [17]	
3.6 3.7	Представление погрешности интерполирования Минимизация погрешности интерполирования дискретно заданных функций	1			2		[2], [12], [17]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, письменный отчет с устной защитой по домашнему заданию
3.8	Многочлены Чебышева	1					[2]	
3.9	Минимизация погрешности интерполирования для функций, заданных на отрезке	1			2	2	[2], [17]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, письменный отчет с устной защитой по заданиям УСР, письменный отчет с устной защитой по домашнему заданию
3.10	Интерполирование по равноотстоящим узлам	0,5					[2], [3], [12], [17]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по домашнему заданию

3.11	Интерполирование сплайнами	1			2		[2], [3], [17]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, письменный отчет с устной защитой по домашнему заданию
3.12	Интерполяционная задача Эрмита	1			2		[2], [17]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, письменный отчет с устной защитой по домашнему заданию
3.13	Тригонометрическое интерполирование. Дискретное и быстрое преобразование Фурье	1			1		[1], [2]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, письменный отчет с устной защитой по домашнему заданию
3.14	Численное дифференцирование и оценка его погрешности	1			1		[2], [17]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, письменный отчет с устной защитой по домашнему заданию
3.15	Задача аппроксимации. Метод наименьших квадратов	1			2		[1], [2], [12]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, математический диктант по теме 3, контрольная работа по теме 3
4	**Приближенное вычисление интегралов**	**8**			**8**	**2**	**[1], [2], [3], [12], [17]**	
4.1	Квадратурные формулы общего вида. Квадратурные формулы, основанные на алгебраическом интерполировании	1					[2], [3], [12], [17]	

4.2	Простейшие квадратурные правила Ньютона-Котеса. Погрешность интегрирования	1			2		[2], [11], [17]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, письменный отчет с устной защитой по домашнему заданию
4.3	Составные квадратурные формулы Ньютона-Котеса. Погрешность интегрирования	2			2		[2], [3], [12], [17]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, письменный отчет с устной защитой по домашнему заданию
4.4	Правила Рунге и Эйткена практической оценки погрешности квадратурных формул	1			1		[1], [2]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, письменный отчет с устной защитой по домашнему заданию
4.5	Квадратурные формулы типа Гаусса. Оптимизация распределения узлов квадратурной формулы	2			2	2	[2], [3], [12], [17]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, письменный отчет с устной защитой по заданиям УСР, контрольная работа по темам 4.1-4.5
4.6	Частные случаи квадратур гауссова типа. Вычисление интегралов от функций специального вида	1			1		[2], [3], [12], [17]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, письменный отчет с устной защитой по домашнему заданию
5	**Обобщение интерполирования и численного интегрирования на случай функций многих переменных**	**4**			**4**		**[1], [2], [17]**	

5.1 5.2	Интерполирование многочленами многих переменных Численное дифференцирование функций многих переменных	2			2		[2], [17]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, письменный отчет с устной защитой по домашнему заданию
5.3	Вычисление кратных интегралов. Метод Монте-Карло	2			2		[1], [2], [17]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, математический диктант по темам 4-5
								Зачет
ВСЕГО (II курс)		**26**			**30**	**4**		
6	**Численные методы решения систем ЛАУ**	**8**			**14**	**2**	**[1],[3],[5], [20]**	
6.1	Нормы векторов и матриц. Оценка погрешности решения систем ЛАУ. Число обусловленности	1			2		[1], [3],[5],[20]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе
6.2	Прямые методы. Метод Гаусса. Выбор ведущего элемента	1			2		[5],[20]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, письменный отчет с устной защитой по домашнему заданию
6.3	LU факторизация. Разложение Холецкого. Метод прогонки и ортогонализации	2			4		[5],[20]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, письменный отчет с устной защитой по домашнему заданию
6.4	Итерационные методы решения систем ЛАУ. Метод простой итерации	1					[5],[20]	Опрос

6.5	Сходимость итерационных методов. Оценка числа итераций. Выбор оптимального параметра	1			2	1	[1],[5]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, письменный отчет с устной защитой по заданиям УСР, письменный отчет с устной защитой по домашнему заданию
6.6	Неявные итерационные методы. Понятие о переобуславливателе. Методы Якоби, Зейделя, Последовательной верхней релаксации	1			2	1	[1],[5]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, письменный отчет с устной защитой по заданиям УСР, письменный отчет с устной защитой по домашнему заданию
6.7	Методы наискорейшего спуска и сопряженных градиентов	1			2		[1]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, письменный отчет с устной защитой по домашнему заданию, контрольная работа по теме 6
7	**Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц**	**4**			**6**	**1**	**[1],[3],[20]**	
7.1	Свойства собственных векторов и собственных значений матриц. Преобразование подобия	1			2		[1],[20]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, письменный отчет с устной защитой по домашнему заданию
7.2	Каноническая форма Фробениуса. Метод Данилевского	1			2		[1], [3], [20]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, письменный отчет с устной

								защитой по домашнему заданию
7.3	Степенной метод нахождения максимальных по модулю собственных значений	1			2	1	[1], [3], [20]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, письменный отчет с устной защитой по заданиям УСР, письменный отчет с устной защитой по домашнему заданию, контрольная работа по теме 7
7.4	Метод вращений. Понятие о QR алгоритме	1					[1],[20]	
8	**Решение нелинейных уравнений и систем**	**6**			**12**	**1**	**[1],[3],[5], [10]**	
8.1	Отделение корней. Метод дихотомии. Кратные корни. Корни полиномов	1			2		[1],[5],[10]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, письменный отчет с устной защитой по домашнему заданию
8.2	Метод простой итерации. Условие сходимости и скорость сходимости	1			4		[1],[3],[5], [10]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, письменный отчет с устной защитой по домашнему заданию
8.3	Метод Ньютона. Квадратичная сходимость. Модификации метода Ньютона	2			4	1	[1],[3],[5], [10]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, письменный отчет с устной защитой по заданиям УСР, письменный отчет с устной защитой по до-

							машнему заданию
8.4	Понятие о методах нелинейной оптимизации. Градиентные методы	1			2		[1],[3]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе
8.5	Обзорные занятия по теме «Численные методы линейной алгебры и методы решения нелинейных уравнений»	1						Контрольная работа по теме 8, коллоквиум по темам 6-8
								Зачет
9	**Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений**	**6**			**14**	**2**	**[1],[3],[5], [10]**	
9.1	Одношаговые методы. Метод Эйлера. Оценка скорости сходимости	1			4		[3],[5],[10]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе
9.2	Методы Рунге-Кутты	2			2	2	[3],[5],[10]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, письменный отчет с устной защитой по заданиям УСР, письменный отчет с устной защитой по домашнему заданию
9.3	Многошаговые методы. Устойчивость, условие корней. Метод Адамса	2			4		[1],[3],[5]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, письменный отчет с устной защитой по домашнему заданию
9.4	Понятие о жестких системах ОДУ. А-устойчивость. Метод Гира	1			4		[1],[3],[5]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, письменный отчет с устной защитой по домашнему заданию, контрольная ра-

								бота по теме 9
10	**Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений**	**8**			**14**	**2**	**[1],[4],[5], [10]**	
10.1	Разностный метод решения краевой задачи для уравнения второго порядка	1			4		[4],[5]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, письменный отчет с устной защитой по домашнему заданию
10.2	Методы построения разностных схем. Интегро-интерполяционный метод. Понятие о компактных разностных схемах. Метод Галеркина	2			4		[4],[5]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, письменный отчет с устной защитой по домашнему заданию, контрольная работа по темам 10.1-10.2
10.3	Аппроксимация и сходимость. Оценка погрешности линейных разностных схем	2			2	2	[4],[5]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, письменный отчет с устной защитой по заданиям УСР, письменный отчет с устной защитой по домашнему заданию
10.4	Разностные методы решения краевых задач для нелинейных ОДУ	2			2		[4],[5],[10]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, письменный отчет с устной защитой по домашнему заданию
10.5	Методы редукции краевых задач к задачам Коши. Методы дифференциальной прогонки и метод стрельбы	1			2		[1],[4],[10]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, кон-

								трольная работа по темам 10.3-10.5
11	**Численное решение интегральных уравнений Фредгольма**	**2**			**2**		**[1],[3]**	
11.1	Основные подходы к решению интегральных уравнений. Метод Фурье для численного решения интегральных уравнений типа свертки	2			2		[1],[3]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе коллоквиум по темам 9, 10, 11
								Экзамен
ВСЕГО (III курс)		**34**			**62**	**8**		
ИТОГО		**60**			**92**	**12**		

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Заочная форма получения образования

Номер темы	Название темы	Количество аудиторных часов					Литература	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Контр. работы		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	**Введение**						**[2]**	
1.1. 1.2	Об основных задачах и содержании вычислительной математики Содержание и назначение вычислительного эксперимента в трактовке А.А. Самарского						[2]	
2	**Элементы теории погрешностей**						**[1], [3]**	
2.1 2.2. 2.3 2.4	Значащие и верные цифры в записи приближенного числа. Абсолютная и относительная погрешности. Погрешности арифметических операций Прямая и обратная задачи теории погрешностей Примеры неустойчивых алгоритмов Погрешность вычислений на ЭВМ. Погрешность округлений и компьютерная запись чисел						[1], [3]	
3	**Интерполирование и приближение функций**	**4**			**6**		**[1], [2], [3], [12], [17]**	

3.1	Системы Функций Чебышева. Интерполирование обобщенными многочленами	0,5					[2], [3], [12], [17]	
3.2	Алгебраическое интерполирование. Построение интерполяционного многочлена в форме Лагранжа	0,5			2		[2], [3], [12], [17]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе
3.3	Конечные разности	0,5					[2], [3], [12], [17]	
3.4	Разделенные и разности, их свойства	0,5					[2], [3], [12], [17]	
3.5	Интерполяционный многочлен Ньютона	0,5					[2], [3], [12], [17]	
3.6 3.7	Представление погрешности интерполирования Минимизация погрешности интерполирования дискретно заданных функций	0,5					[2], [12], [17]	
3.8	Многочлены Чебышева	0,5					[2]	
3.9	Минимизация погрешности интерполирования для функций, заданных на отрезке	0,5			2		[2], [17]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, письменный отчет с устной защитой по домашнему заданию
3.10	Интерполирование по равноотстоящим узлам						[2], [3], [12], [17]	
3.11	Интерполирование сплайнами						[2], [3], [17]	
3.12	Интерполяционная задача Эрмита						[2], [17]	
3.13	Тригонометрическое интерполирование. Дискретное и быстрое преобразование Фурье						[1], [2]	
3.14	Численное дифференцирование и оценка его погрешности						[2], [17]	

3.15	Задача аппроксимации. Метод наименьших квадратов						[1], [2], [12]	
4	**Приближенное вычисление интегралов**	**2**					**[1], [2], [3], [12], [17]**	
4.1	Квадратурные формулы общего вида. Квадратурные формулы, основанные на алгебраическом интерполировании	0,5					[2], [3], [12], [17]	
4.2	Простейшие квадратурные правила Ньютона-Котеса. Погрешность интегрирования	0,5					[2], [11], [17]	
4.3	Составные квадратурные формулы Ньютона-Котеса. Погрешность интегрирования	0,5			2		[2], [3], [12], [17]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, письменный отчет с устной защитой по домашнему заданию
4.4	Правила Рунге и Эйткена практической оценки погрешности квадратурных формул						[1], [2]	
4.5	Квадратурные формулы типа Гаусса. Оптимизация распределения узлов квадратурной формулы	0,5					[2], [3], [12], [17]	
4.6	Частные случаи квадратур гауссова типа. Вычисление интегралов от функций специального вида						[2], [3], [12], [17]	
5	**Обобщение интерполирования и численного интегрирования на случай функций многих переменных**						**[1], [2], [17]**	
5.1 5.2	Интерполирование многочленами многих переменных Численное дифференцирование функций многих переменных						[2], [17]	
5.3	Вычисление кратных интегралов. Метод Монте-Карло						[1], [2], [17]	
ВСЕГО (III курс)		**6**			**6**			**Зачет**

6	**Численные методы решения систем ЛАУ**	**4**			**2**		**[1],[3],[5], [9]**	
6.1	Нормы векторов и матриц. Оценка погрешности решения систем ЛАУ. Число обусловленности	1					[1], [3],[5],[9]	
6.2	Прямые методы. Метод Гаусса. Выбор ведущего элемента	0,5			2		[5],[9]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, письменный отчет с устной защитой по домашнему заданию
6.3	LU факторизация. Разложение Холецкого. Метод прогонки и ортогонализации	0,5					[5],[9]	
6.4	Итерационные методы решения систем ЛАУ. Метод простой итерации	0,5					[5],[9]	
6.5	Сходимость итерационных методов. Оценка числа итераций. Выбор оптимального параметра	0,5					[1],[5]	
6.6	Неявные итерационные методы. Понятие о переобуславливателе. Методы Якоби, Зейделя, Последовательной верхней релаксации	0,5					[1],[5]	
6.7	Методы наискорейшего спуска и сопряженных градиентов	0,5					[1]	
7	**Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц**	**2**			**2**		**[1],[3],[9]**	
7.1	Свойства собственных векторов и собственных значений матриц. Преобразование подобия	0,5					[1],[9]	
7.2	Каноническая форма Фробениуса. Метод Данилевского	0,5					[1], [3], [9]	
7.3	Степенной метод нахождения максимальных по модулю собственных значений	0,5					[1], [3], [9]	
7.4	Метод вращений. Понятие о QR алгоритме	0,5			2		[1],[9]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, письменный отчет с

6	**Численные методы решения систем ЛАУ**	**4**			**2**		**[1],[3],[5], [9]**	
6.1	Нормы векторов и матриц. Оценка погрешности решения систем ЛАУ. Число обусловленности	1					[1], [3],[5],[9]	
6.2	Прямые методы. Метод Гаусса. Выбор ведущего элемента	0,5			2		[5],[9]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, письменный отчет с устной защитой по домашнему заданию
6.3	LU факторизация. Разложение Холецкого. Метод прогонки и ортогонализации	0,5					[5],[9]	
6.4	Итерационные методы решения систем ЛАУ. Метод простой итерации	0,5					[5],[9]	
6.5	Сходимость итерационных методов. Оценка числа итераций. Выбор оптимального параметра	0,5					[1],[5]	
6.6	Неявные итерационные методы. Понятие о переобуславливателе. Методы Якоби, Зейделя, Последовательной верхней релаксации	0,5					[1],[5]	
6.7	Методы наискорейшего спуска и сопряженных градиентов	0,5					[1]	
7	**Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц**	**2**			**2**		**[1],[3],[9]**	
7.1	Свойства собственных векторов и собственных значений матриц. Преобразование подобия	0,5					[1],[9]	
7.2	Каноническая форма Фробениуса. Метод Данилевского	0,5					[1], [3], [9]	
7.3	Степенной метод нахождения максимальных по модулю собственных значений	0,5					[1], [3], [9]	
7.4	Метод вращений. Понятие о QR алгоритме	0,5			2		[1],[9]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, письменный отчет с

								устной защитой по домашнему заданию
8	**Решение нелинейных уравнений и систем**	**2**			**2**	**1**	**[1],[3],[5], [10]**	
8.1	Отделение корней. Метод дихотомии. Кратные корни. Корни полиномов	0,5					[1],[5],[10]	
8.2	Метод простой итерации. Условие сходимости и скорость сходимости	0,5			2		[1],[3],[5], [10]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе
8.3	Метод Ньютона. Квадратичная сходимость. Модификации метода Ньютона	0,5					[1],[3],[5], [10]	
8.4	Понятие о методах нелинейной оптимизации. Градиентные методы	0,5				№ 1	[1],[3]	Контрольная работа № 1 по темам 6-8
								Зачет
9	**Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений**	**2**			**2**		**[1],[3],[5], [10]**	
9.1	Одношаговые методы. Метод Эйлера. Оценка скорости сходимости	0,5					[3],[5],[10]	
9.2	Методы Рунге-Кутты	0,5			2		[3],[5],[10]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе
9.3	Многошаговые методы. Устойчивость, условие корней. Метод Адамса	0,5					[1],[3],[5]	
9.4	Понятие о жестких системах ОДУ. А-устойчивость. Метод Гира	0,5					[1],[3],[5]	
10	**Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений**	**2**			**4**	**1**	**[1],[4],[5], [10]**	
10.1	Разностный метод решения краевой задачи для уравнения второго порядка	0,5					[4],[5]	
10.2	Методы построения разностных схем. Интегро-интерполяционный метод. Понятие о компактных разностных схемах. Метод Галеркина	0,5			2		[4],[5]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе

10.3	Аппроксимация и сходимость. Оценка погрешности линейных разностных схем	0,5					[4],[5]	
10.4	Разностные методы решения краевых задач для нелинейных ОДУ						[4],[5],[10]	
10.5	Методы редукции краевых задач к задачам Коши. Методы дифференциальной прогонки и метод стрельбы	0,5			2	№ 2	[1],[4],[10]	Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, контрольная работа № 2 по темам 9-10
11	**Численное решение интегральных уравнений Фредгольма**	**2**					**[1],[3]**	
11.1	Основные подходы к решению интегральных уравнений. Метод Фурье для численного решения интегральных уравнений типа свертки	2					[1],[3]	
								Зачет
ВСЕГО (IV курс)		**14**			**12**	**2**		
V курс, 9 сем.								**Экзамен**
ИТОГО		**20**			**18**	**2**		

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основная литература

1. *Бахвалов, Н. С.* Численные методы : учеб. пособие для студ. физико-матем. спец. вузов / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – 8-е изд. – М. ; СПб. : Лаборатория Базовых Знаний : Физматлит : Невский Диалект, 2000. – 622 с.

Экземпляры: Всего: 3, из них: АБУ-1, КХН-1, СЧЗ-1

2. *Игнатенко, М. В.* Методы вычислений. Интерполирование и интегрирование: курс лекций / М. В. Игнатенко. – Минск : БГУ, 2006. – 116 с.

3. Сборник задач по методам вычислений : учеб. пособие для студ. учрежд., обеспеч. получение высш. образования по физ.-мат. спец. / [А. И. Азаров и др.] ; под ред. П. И. Монастырного. – Минск : Издательский центр БГУ, 2007. – 376 с.

4. *Самарский, А. А.* Введение в численные методы : учеб. пособие для вузов / А. А. Самарский. – Изд. 5-е, стер. – Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2009. – 288 с. : ил. ; 20x13 см. – (Классическая учебная литература по математике) (Учебники для вузов. Специальная литература). – На обл. также: Знание. Уверенность. Успех!. Библиогр.: с. 281.

Экземпляры: Всего: 5, из них: АБУ-5

5. *Бахвалов, Н. С.* Численные методы. Решения задач и упражнения: Учебное пособие / Н.С. Бахвалов, А. А Корнев, Е. В. Чижонков. – М.: Бином, 2016. – 352 с.

6. *Волков, В. М.* Численные методы : учеб.-метод. пособие для студ. учреждений высш. образования, обуч. по спец. 1-31 03 08 "Математика и инф. технологии (по напр.)" : в 2 ч. / В. М. Волков ; БГУ. – Минск : БГУ, 2016. Ч. 1 : – Минск : БГУ, 2016. – 87 с. : ил. ; 20x14 см. – На обл. также: БДУ 95. - Библиогр.: с. 80. - ISBN 978-985-566-289-2.

Экземпляры: Всего: 34, из них: АБУ-33, КХН-1.

Ссылка на ресурс: http://elib.bsu.by/handle/123456789/161943.

7. *Кремень, Е. В.* Численные методы. Практикум в MathCad : учеб. пособие для студ. учреждений высш. образования по математическим спец. / Е. В. Кремень, Ю. А. Кремень, Г. А. Расолько. – Минск : Вышэйшая школа, 2019. – 255 с

Экземпляры: Всего: 41, из них: АБУ-38, КХН-1, РФ-2

8. *Марчук, Г. И.* Методы вычислительной математики : учеб. пособие / Г. И. Марчук. – Изд. 4-е, стер. – Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2009. – 608 с.

Экземпляры: Всего: 5, из них: АБУ-5

9. *Фаддеев, Д. К.* Вычислительные методы линейной алгебры : учебник / Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. – Изд. 4-е, стер. – Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2009. – 734 с.

Экземпляры: Всего: 5, из них: АБУ-5

Дополнительная литература

10. *Крылов, В. И.* Приближенное вычисление интегралов / В. И. Крылов. – М.: Наука, 1967. – 500 с.

11. *Крылов, В. И.* Вычислительные методы. В 2 т. / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – М.: Наука, 1976. – Т. 1. – 304 с.

12. *Крылов, В. И.* Вычислительные методы. В 2 т. / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – М.: Наука, 1977. – Т. 2. – 400 с.

13. *Крылов, В. И.* Начала теории вычислительных методов. Дифференциальные уравнения / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – Мн.: Наука и техника, 1982. – 286 с.

14. *Крылов, В. И.* Начала теории вычислительных методов. Уравнения в частных производных / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – Мн.: Наука и техника, 1986. – 311 с.

15. *Мысовских, И. П.* Лекции по методам вычислений: учеб. пособие / И. П. Мысовских. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1998. – 470 с.

16. *Березин, И. С.* Методы вычислений. В 2 т. / И. С. Березин, Н.П. Жидков. – М.: Физматгиз, 1962. Т. 2. – 640 с.

17. Самарский, А.А. Численные методы математической физики / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: Альянс, 2016. – 432 с.

18. *Самарский, А. А.* Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1983. – 616 с.

19. *Самарский, А. А.* Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. – М.: Наука, 1987. – 600 с.

20. *Волков, В. М.* Численный анализ и оптимизация/ В. М.Волков, О. Л.Зубко, И. Н. Катковская, И. Л. Ковалева, В. Г. Кротов, П. Лима. – Минск: Белгослес, 2017. – 207 с.

21. *Калиткин, Н. Н.* Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М.: Academia, 2018. – 96 с.

4. Самарский, А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М.: Наука, 1989. 432 с.

22. *Годунов, С. К.* Разностные схемы / С. К. Годунов, В. С. Рябенький. – М.: Наука, 1977. – 440 с.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой оценки

Рекомендуются следующие формы диагностики компетенций.

Устная форма

1. Опрос.

Письменная форма

1. Опрос.
2. Коллоквиум.
3. Математический диктант.
4. Контрольная работа.

Устно-письменная форма

1. Письменный отчет с устной защитой по лабораторным работам.
2. Письменный отчет с устной защитой по домашним заданиям.
3. Письменный отчет с устной защитой по заданиям УСР.
4. Зачет.
5. Экзамен.

Формой текущей аттестации по дисциплине «Численные методы» учебным планом предусмотрен в 4 и 5 семестрах дневной формы обучения – зачет, в 6 семестре – экзамен.

На заочной форме обучения в 6 и 7 семестрах – зачет, в 9 семестре – экзамен.

При формировании итоговой оценки используется рейтинговая оценка знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая оценка предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Рекомендуются следующие примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний в оценку текущей успеваемости:

- ответы на аудиторных занятиях – 5%;
- письменный отчет с устной защитой по лабораторным работам – 40%;
- письменный отчет с устной защитой по домашним заданиям – 20%;
- математический диктант/контрольная работа – 15%;
- коллоквиум – 20%.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе оценки текущей успеваемости (рейтинговой оценки) и экзаменационной оценки с учетом их весовых коэффициентов Вес оценки текущей успеваемости составляет 40%, экзаменационной – 60%.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Задание 1.

Раздел 3. Интерполирование и приближение функций.

Тема 3.9. Минимизация погрешности интерполирования для функций, заданных на отрезке (2 ч.).

В качестве заданий для УСР студентам рекомендуется выполнить задачи и упражнения, аналогичные приведенным в сборнике задач [3]: гл. 6, задачи и упражнения 43–62.

Форма контроля – письменный отчет с устной защитой.

Задание 2.

Раздел 4. Приближенное вычисление интегралов.

Тема 4.5. Квадратурные формулы типа Гаусса. Оптимизация распределения узлов квадратурной формулы (2 ч.)

В качестве заданий для УСР студентам рекомендуется выполнить задачи и упражнения, аналогичные приведенным в сборнике задач [3]: гл. 8, задачи и упражнения 118-164.

Форма контроля – письменный отчет с устной защитой.

Задание 3.

Раздел 6. Численные методы решения систем ЛАУ.

Тема 6.5. Сходимость итерационных методов. Оценка числа итераций. Выбор оптимального параметра (1 ч.)

Исследовать зависимость количество итераций для достижения заданной точности в методе сопряженных градиентов в зависимости от размерности матрицы (матрица Пуассона, функции МАТЛАБ pcg, gallery).

Оценить зависимость числа обусловленности матрицы Пуассона от размерности матрицы (функции МАТЛАБ gallery, condest).

Форма контроля – письменный отчет с устной защитой.

Задание 4.

Раздел 6. Численные методы решения систем ЛАУ.

Тема 6.6. Неявные итерационные методы. Понятие о переобуславливателе. Методы Якоби, Зейделя, последовательной верхней релаксации (1 ч.)

Исследовать зависимость количество итераций для достижения заданной точности в методе сопряженных градиентов с переобусловливателем iLU в зависимости от размерности матрицы (матрица Пуассона, функции МАТЛАБ pcg, gallery, ilu).

Форма контроля – письменный отчет с устной защитой.

Задание 5.

Раздел 7. Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц.

Тема 7.3. Степенной метод нахождения максимальных по модулю собственных значений (1 ч.)

Построить зависимость максимального собственного значения матрицы Пуассона от ее размерности (функции МАТЛАБ eigs, gallery).

Форма контроля – письменный отчет с устной защитой.

Задание 6.

Раздел 8. Решение нелинейных уравнений и систем.

Тема 8.3. Метод Ньютона. Квадратичная сходимость (1 ч.)

В качестве заданий для УСР студентам рекомендуется выполнить задачи и упражнения, аналогичные приведенным в сборнике задач [3]: гл. 5.2, задачи и упражнения 55-62.

Форма контроля – письменный отчет с устной защитой.

Задание 7.

Раздел 9. Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Тема 9.2. Методы Рунге-Кутты (2 ч.)

В качестве заданий для УСР студентам рекомендуется выполнить задачи и упражнения, аналогичные приведенным в сборнике задач [3]: гл. 9.4, задачи и упражнения 30-44.

Форма контроля – письменный отчет с устной защитой.

Задание 8.

Раздел 10. Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Тема 10.3. Аппроксимация и сходимость. Оценка погрешности линейных разностных схем (2 ч.)

В качестве заданий для УСР студентам рекомендуется выполнить задачи и упражнения, аналогичные приведенным в сборнике задач [3]: гл. 10.5, задачи и упражнения 63-72.

Форма контроля – письменный отчет с устной защитой.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используются

1) ***эвристический подход***:

- осуществление студентами личностно-значимых открытий окружающего мира;
- демонстрация многообразия решений большинства профессиональных задач и жизненных проблем;
- творческую самореализация обучающихся в процессе создания образовательных продуктов;
- индивидуализация обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлексию собственной образовательной деятельности;

2) ***практико-ориентированный подход:***

- освоение содержание образования через решения практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
- ориентация на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;
- использование процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

3) ***метод анализа конкретных ситуаций (кейс-метод):***

- приобретение студентом знаний и умений для решения практических задач;
- анализ ситуации, используя профессиональные знания, собственный опыт, дополнительную литературу и иные источники.

4) ***методы и приемы развития критического мышления,*** которые представляют собой систему, формирующую навыки работы с информацией в процессе чтения и письма; понимании информации как отправного, а не конечного пункта критического мышления.

5) ***метод группового обучения,*** который представляет собой форму организации учебно-познавательной деятельности обучающихся, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

– изучение литературы и материалов электронных источников по проблемам дисциплины;

– работы, предусматривающие аналитическое решение задач и выполнение заданий лабораторных занятий;

– выполнение домашнего задания;

– подготовка к лабораторным занятиям;

– курсовые, дипломные и научно-исследовательские работы, связанные с тематикой дисциплины;

– подготовка к участию в конференциях с докладами по проблемам дисциплины.

Для организации дистанционной и самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине рекомендуется использовать современные информационные ресурсы, в том числе размещенные на образовательном портале смешанного и дистанционного обучения БГУ:

https://edummf.bsu.by/course/view.php?id=21 (2 курс, дневн.),
https://edummf.bsu.by/course/view.php?id=24 (3 курс, заочн.),
https://edummf.bsu.by/course/view.php?id=117 (3 курс, дневн.),
https://edummf.bsu.by/course/view.php?id=210 (4 курс, заочн.)
и содержащие учебные материалы для электронного сопровождения изучаемой дисциплины.

Другая значимая информация

Примерный перечень заданий исследовательского характера для домашней работы и контрольных работ

Индивидуальные задания исследовательского характера для самостоятельной работы включают аналитические решения теоретических задач различного уровня сложности, которые сдаются на проверку в письменном виде.

Раздел 1. Введение. Раздел 2. Элементы теории погрешностей

1. Определить относительную погрешность при вычислении полной поверхности усеченного конуса, если радиусы его оснований R и r и образующая l, измеренные с точностью до 0,01 см, следующие $R = 23,64$ см, $r = 17,31$ см, $l = 10,21$ см.

2. Высота h и радиус основания R цилиндра измерены с точностью до 0,5%. Какова относительная погрешность при вычислении объема цилиндра?

3. Длина периметра правильного вписанного 96-угольника, которым пользовался Архимед при вычислении π, выражается при $r = 1$ формулой

$p = 96\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$. Если вычислять непосредственно по этой формуле, желая получить π с точностью до 0,001, то с какой точностью нужно производить вычисления подкоренных величин?

4. Какая из формул $S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^{-2}\right)$ или $S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2\right)$, где $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ является численно более устойчивой для вычисления отклонения S^2 множества событий $x_1, \ldots, x_n$.

Также можно рекомендовать в качестве заданий для самостоятельной работы упражнения из сборника задач [3]: гл. 1 , задачи 1-30.

Раздел 3. Интерполирование и приближение функций

1. Функция $f(x) = \frac{1}{A^2 - x}$ приближается на $[-4;\ -1]$ многочленом Лагранжа по узлам $x_i = -4, -3, -2, -1$. При каких значениях A оценка погрешности в равномерной норме не превосходит 10^{-5}?

2. Функция $f(x) = e^{2x}$ приближается на отрезке $\left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$ интерполяционным многочленом второй степени по трём узлам: $-{}^{1}\!/_{2}$, 0, ${}^{1}\!/_{2}$. Доказать, что погрешность интерполяции в равномерной норме не превосходит ${}^{\sqrt{3}}\!/_{9}$.

3. Пусть функция $f(x) = \sin x$ задана на отрезке $[4; b]$. При каком $b > 4$ многочлен Лагранжа третьей степени, построенный по оптимальным узлам, приближает эту функцию с погрешностью $\varepsilon \le 10^{-3}$?

4. Оценить число равноудаленных на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$ точек, обеспечивающее интерполирование функции $f(x) = \sin x$ с точностью $\varepsilon \le 10^{-2}$.

5. Дана таблица натуральных логарифмов чисел от 1000 до 10000. Какова наибольшая погрешность линейной (квадратичной) интерполяции, если шаг равен 1?

6. Оценить погрешность приближения функции e^{2x} на [2; 5] интерполяционным многочленом Лагранжа второй степени, построенным по оптимальным узлам.

7. С какой точностью можно вычислить по формуле Ньютона $\cos 10{,}5$ по известным значениям $\cos 10$, $\cos 11$, $\cos 12$, $\cos 13$, $\cos 14$, $\cos 15$?

8. Оценить число точек на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$, обеспечивающее интерполирование функции $f(x)=\sin x$ с точностью $\varepsilon \le 10^{-2}$.

9. Функция $\ln(x)$ приближается на отрезке $[1,2]$ интерполяционным многочленом третьей степени по четырём узлам 1, $4/3$, $5/3$, 2. Доказать, что погрешность интерполирования в равномерной норме не превосходит $1/300$.

10 Дана таблица синусов с шагом 1. Какова наибольшая погрешность линейной интерполяции?

Также можно рекомендовать в качестве заданий для самостоятельной работы упражнения из сборника задач [3]: гл. 6, задачи 1-62.

Раздел 4. Приближенное вычисление интегралов

1. Пусть весовая функция $p(x)$ четна, узлы x_i расположены симметрично относительно нуля, т.е. $x_{n+1-i}=-x_i$, $i=1,\ldots,n$. Доказать, что в интерполяционной квадратурной формуле $I(f)\approx\sum\limits_{i=1}^{n}c_i f(x_i)$ для вычисления интеграла $I(f)=\int\limits_{-a}^{a}p(x)f(x)dx$ коэффициенты, соответствующие симметричным узлам равны, т.е. $c_{n+1-i}=c_i$, $i=1,\ldots,n$.

2. Для вычисления $\int\limits_0^1 f(x)dx$ применяется составная формула трапеций. Оценить минимальное число разбиений N, обеспечивающее точность $0{,}5\cdot10^{-3}$ на двух классах функций:

$$1)\ \|f''(x)\|\le 1;\qquad 2)\ \int\limits_0^1|f''(x)|dx\le 1.$$

3. Найти оценку погрешности вычисления интеграла $\int\limits_0^1 f(x)dx$ при $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ по составной квадратурной формуле

$$S(f)=\big(f(0)+4f(0{,}1)+2f(0{,}2)+4f(0{,}3)+\ldots+4f(0{,}9)+f(1{,}0)\big)/30.$$

4. Оценить минимальное количество узлов составной квадратурной формулы Симпсона для вычисления интеграла $\int\limits_0^2 f(x)dx$, обеспечивающее точность $\varepsilon\le 0{,}5\cdot10^{-4}$ на классе функций, удовлетворяющих условию $\sup\limits_{x\in[0;2]}\left|f^{(IV)}(x)\right|\le 1$.

5. Пусть $f \in C^{(1)}[-1;1]$ и $P_5(x)$ — алгебраический полином пятой степени, удовлетворяющий условиям $P(x_k) = f(x_k)$, $P'(x_k) = f'(x_k)$, $k = 1,2,3$, где $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Рассмотрим квадратурную формулу следующего вида:

$$S_5(f) = \left(7f(-1) + 16f(0) + 7f(1) + f'(-1) - 15f'(1)\right)/15.$$

Проверить, что $\int_{-1}^{1} P_5(x)dx = S_5(P_5)$, и доказать, что $S_5(f)$ точна на полиномах пятой степени, но найдется полином степени 6, на котором она не точна.

6. Доказать, что ортогональный многочлен степени n имеет ровно n различных корней на отрезке $[a,b]$.

7. Доказать, что среди всех многочленов степени n вида $P_n(x) = x^n + \ldots$ минимальную норму $\|P_n\|^2 = \int_a^b p(x)P_n^2(x)dx$ имеет ортогональный многочлен $\psi_n(x)$ со старшим коэффициентом 1.

8. Для ортогональных многочленов вида $\psi_n(x) = x^n + \ldots$ показать справедливость рекуррентного соотношения $\psi_n(x) = (x + b_n)\psi_{n-1}(x) - c_n\psi_{n-2}(x)$ с коэффициентом $c_n > 0$.

9. Доказать, что ортогональные многочлены на симметричном относительно нуля отрезке с четным весом $p(x)$ обладают свойством $\psi_n(-x) = (-1)^n\psi_n(x)$.

10. Доказать, что все коэффициенты квадратуры Гаусса положительны.

Также можно рекомендовать в качестве заданий для самостоятельной работы упражнения из сборника задач [3]: гл. 7, задачи 1-4; гл. 8, задачи 1-217.

Раздел 5. Обобщение интерполирования и численного интегрирования на случай функций многих переменных

1. В пространстве R^2 выбрать произвольную ньютоновскую систему точек $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{\mu}$, $\mu = C_{2+m}^2$, для заданного m. Убедиться, что выбранные точки не лежат на алгебраической кривой порядка m (проверить равносильное условие $|V_m| \neq 0$, где V_m – матрица Вандермонда, построенная по точкам $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{\mu}$). Для заданной функции $f(x,y)$ построить интерполяционный многочлен $P_m(x,y)$ степени не выше m от n переменных вида $P_m(x,y) = \sum_{i=1}^{\mu} b_i\varphi_i(x,y)$, удовлетворяющий условиям $\sum_{i=1}^{\mu} b_i\varphi_i(x_j, y_j) = f(x_j, y_j)$, $j = 1,2,\ldots,\mu$, где $\{\varphi_i(x,y)\}_{i=1}^{\mu}$ – множество всех одночленов степени не выше

m от n переменных в случае *а)* $m=3$, $f(x,y)=5x\sin y$; *б)* $m=2$, $f(x,y,z)=2xz\cos y$.

2. Пусть известна таблица значений функции $f(x,y,z)$ для аргументов из некоторой произвольно выбранной ньютоновской системы точек $\{(x_i,y_i,z_i)\}_{i=1}^{\mu}$, $\mu=C_{3+m}^3$, в пространстве R^3, где m – заданное натуральное число. Найти приближенные значения следующих частных производных:

$$а)\ \frac{\partial f\,(x_{m-1},y_{m-1},z_{m-1})}{\partial x},\quad б)\ \frac{\partial f^{m}\qquad(x_m,y_m,z_m)}{\partial x^{m-2}\partial y\,\partial z},$$

с помощью соответствующих частных производных от интерполяционного многочлена $P_m(x,y,z)=\sum_{i=1}^{\mu}b_i\varphi_i(x,y,z)$ степени не выше m от трех переменных для функции $f(x,y,z)$, удовлетворяющего условиям $\sum_{i=1}^{\mu}b_i\varphi_i(x_j,y_j,z_j)=f(x_j,y_j,z_j),\ j=1,2,...,\mu$, где $\{\varphi_i(x,y,z)\}_{i=1}^{\mu}$ – множество всех одночленов степени не выше m от трех переменных; а также методом неопределенных коэффициентов в случае *1)* $m=2$; $f(x,y,z)=2^y\cos(x+y+z)$; *2)* $m=3$; $f(x,y,z)=3^{xy}\sin(y+z)$.

3. Вычислить n-кратный интеграл от заданной функции f по области $\Omega=[0;1]^n$, применяя интерполяционную кубатурную формулу с числом узлов $\mu=C_{n+m}^n$, для указанных значений n и m:

а) $n=2$; $m=4$; $f(x,y)=2x\cos y$; *б)* $n=3$; $m=2$; $f(x,y,z)=5ze^{x+y}$.

4. Вычислить n – кратный интеграл от заданной функции f по области $\Omega=[0;1]^n$ методом повторного применения квадратурной формулы гауссова типа $(p(x)\equiv 1)$ для отрезка $[0;1]$ с числом узлов, равным m; убедиться, что полученная кубатурная формула является точной для всех одночленов степени не выше $2m-1$ по каждой из n переменных:

а) $n=2$; $m=4$; $f(x,y)=2x\cos y$; *б)* $n=3$; $m=2$; $f(x,y,z)=5ze^{x+y}$.

5. Вычислить n – кратный интеграл от заданной функции f по области $\Omega=[-1;1]^n$ методом Монте-Карло дважды с различным числом испытаний N; убедиться, что абсолютная погрешность интегрирования не превышает оценки погрешности интегрирования методом Монте-Карло, полученной с помощью правила «трёх сигм»: *а)* $n=2$; $f(x,y)=2x\cos y$; $N=5000,\ 15000$; *б)* $n=3$; $f(x,y,z)=5ze^{x+y}$; $N=6000,\ 10000$.

Раздел 6. Численные методы решения систем ЛАУ. Раздел 7. Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц

1. Доказать, что для операторной нормы матрицы $A \in M_n(R)$, порожденной векторной нормой $\|x\|_1$, справедливо представление $\|A\|_1 = \max\limits_{1 \le j \le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

2. Доказать, что для операторной нормы матрицы $A \in M_n(R)$, порожденной векторной нормой $\|x\|_\infty$, справедливо представление $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

3. Пусть $A = A^T$. Доказать, что $\max\limits_{\|x\|_2 = 1} |(Ax, x)| = \rho(A)$.

4. Пусть числа $d_k > 0, k = \overline{1,n}$. Доказать, что $\sum\limits_{k=1}^{n} d_k |x_k|$ является нормой вектора x. Найти норму матрицы, подчиненную этой векторной норме.

5. Пусть числа $d_k > 0, k = \overline{1,n}$. Доказать, что $\max\limits_{k}(d_k |x_k|)$ является нормой вектора x. Найти норму матрицы, подчиненную этой векторной норме.

6. Пусть $|a_{jj}| > \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{n} |a_{ij}|$. Доказать, что метод простой итерации $x^{(n+1)} = Sx^{(n)} + \phi$ для системы $Ax = b$ сходится.

7. Пусть $|a_{jj}| > \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{n} |a_{ij}|$. Доказать, что $\det A \ne 0$.

8. Пусть $A = A^T > 0$. Доказать, что итерационный процесс $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \tau\left(A\dfrac{x^{(k+1)} + x^{(k)}}{2} - b\right)$ сходится при $\tau > 0$. Оценить его скорость сходимости, если известны $\lambda_{\max}(A)$ и $\lambda_{\min}(A)$.

9. Найти все матрицы, для которых метод итераций будет сходящимися ($x = Bx + g$), $B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix}$, где α, β – некоторые числа.

10. При каких значениях параметра τ метод $x^{(k+1)} = (E - \tau A)x^{(k)} + \tau f$ для системы уравнений $Ax = f$ с матрицей $A = \begin{bmatrix} 5 & 0,8 & 4 \\ 2,5 & 3 & 0 \\ 2 & 0,8 & 4 \end{bmatrix}$ сходится для произвольного приближения?

11. Доказать неравенство $\|x\|_C^2 \le \rho(C)\|x\|_2^2$, где $C = C^T > 0$.

12. Пусть $A = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{5}/2 \\ \sqrt{5}/2 & 1 \end{bmatrix}$. Записать сходящийся метод простой итерации. Найти оптимальное значение итерационного параметра τ.

13. Показать, что для системы ЛАУ $Ax = b$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.1 & 3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.1 & 4.8 \end{bmatrix}$, метод $x^{(k+1)} = (E - \tau A)x^{(k)} + \tau b$ сходится для любого начального приближения при $0 < \tau < 0.4$.

14. Найти все матрицы, для которых метод Зейделя будет сходящимися ($x = Bx + g$), $B = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{bmatrix}$, где α, β – некоторые числа.

15. Пусть $A = A^T$ имеет собственные значения $\lambda(A) \in [m, M]$, $m > 0$ Доказать, что при любом $\tau > 0$ итерационный процесс $\dfrac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau} + A\left(\dfrac{x^{(k+1)} + x^{(k)}}{2}\right) = b$ сходиться. Определить оптимальное значение $\tau_{опт}$.

16. Найти α, β, при которых метод Зейделя будет сходящимся для систем уравнений $x = Hx + \phi$ с матрицей вида $H = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix}$.

17. Число обусловленности матрицы A равно q. Найти число обусловленности матрицы A^{-1}.

18. При решении системы ЛАУ с матрицей размерности 128×128 методом сопряженных градиентов за 50 итераций достигается относительная погрешность приближенного решения 1.*e*-3. Какое максимальное число итераций потребуется для достижения точности не хуже, чем 1.*e*-9?

19. Число обусловленности симметричной матрицы *K*=1.*e*9. Максимальное собственное значение при этом равно 1000. Вычислить минимальное и максимальное собственные значения обратной матрицы.

20. Какой будет значение переменной x, если все переменные класса double p=(S+1)^2/(S-1)^2; if(p==1); x=1; else x=0; end;

a) p=1.e-20; b) p=1.e-12; c) p=1.e12; d) p=1.e151; p=1.e155.

21. Какая геометрическая фигура в R^3 будет определена множеством точек $\|x\| = const$ в случае максимальной и квадратичной норм?

Можно также рекомендовать в качестве заданий для самостоятельной работы упражнения из сборника задач [3]: гл.2, задачи 81-88, 107-114.

Раздел 8. Решение нелинейных уравнений и систем

1. Построить итерационный процесс Ньютона для вычисления корня n – ой степени $\sqrt[n]{a}$, $a>0$, n – вещественное число.

2. Построить итерационный процесс вычисления всех корней уравнения $f(x)=x^3-3x^2-1=0$ методом простой итерации.

3. Определить область начальных приближений x_0, для которых итерационный процесс $x_{n+1}=\dfrac{x_n^3+1}{20}$ сходится.

4. Пусть уравнение $f(x)=0$ имеет на отрезке $[a,b]$ корень кратности $p>1$, причем функция $f(x)$ дважды дифференцируема. Показать, что при этих условиях метод Ньютона сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $(p-1)/p$.

5. Пусть уравнение $f(x)=0$ имеет на отрезке $[a,b]$ корень кратности $p>1$, причем функция $f(x)$ дважды дифференцируема. Построить модификацию метода Ньютона, имеющую квадратичную скорость сходимости.

6. Построить метод Ньютона для вычисления числа $\dfrac{1}{a}$ так, чтобы расчетные формулы не содержали операций деления. Определить область сходимости метода при $a>0$.

7. Пусть дана функция $\phi(x)=\alpha\sin^2 x+\beta\cos^2 x-\gamma$. При каких ограничениях на параметры α,β,γ метод простой итерации сходится при любом начальном приближении.

8. Пусть дана функция $\phi(x)=ae^{-bx^2}+c$, $a\neq 0$, $b\geq 0$. При каких ограничениях на a,b и c метод простой итерации сходится при любом начальном приближении.

9. Построить метод простой итерации для решения уравнения $2+x=e^x$, $x>0$.

10. Исследовать сходимость метода простой итерации $x_{n+1}=x_n^2-2x_n+2$ в зависимости от выбора начального приближения x_0.

11. Дано уравнение $x=\phi(x)={}^{\pi}\!/_{2}\sin x$, которое решается методом простой итерации $x_{n+1}=\phi(x_n)$. Найти область сходимости к корням уравнения.

12. Определить скорость сходимости метода Ньютона к корням уравнения $x^3-4x^2+5x-2=0$.

13. Для вычисления $x=\sqrt{2}$ используется итерационный процесс $x_{n+1}=\phi(x_n)=x_n+\nu(x_n^2-2)$. При каком выборе ν этот процесс имеет квадратичную скорость сходимости?

14. Построить метод простой итерации для решения уравнения $\cos x - \frac{1}{x}\sin x = 0$, сходящийся при любом начальном приближении $x_0 \neq 0$.

15. Найти область сходимости метода простой итерации для следующего уравнения $x = e^{2x} - 1$.

16. Построить итерационный процесс вычисления всех корней уравнения $f(x) = 3x + \cos x + 1 = 0$ методом простой итерации.

17. Уравнение $x = 2^{x-1}$ решается методом простой итерации. Исследовать его сходимость в зависимости от выбора начального приближения x_0.

18. Пусть $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$. Исследовать его сходимость в зависимости от выбора начального приближения x_0.

19. При каких значениях p метод простой итерации $x_{k+1} = x_k + p\left(1 - x^{1/2}\right)$ сходится к корню $x = 1$: а) если $x_0 > 1$; б) если $x_0 < 1$.

Можно также рекомендовать в качестве заданий для самостоятельной работы упражнения из сборника задач [3]: гл.4, задачи 52, 54, 105.

Раздел 9. Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Раздел 10. Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

1. Используя разностное уравнение, выписать формулу для вычисления интеграла $I_k(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos(kx) - \cos(k\alpha)}{\cos x - \cos\alpha}dx$, где α – параметр.

2. Доказать, что для чисел Фибоначчи f_k: $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$, $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, справедливо равенство $f_k f_{k+2} - f_{k+1}^2 = (-1)^{k+1}$, $k = 0,1,2,\dots$.

3. Доказать, что любое решение разностного уравнения $y_{k+1} - 5y_k + 6y_{k-1} = 0$ удовлетворяет уравнению $y_{k+1} - 9y_k + 27y_{k-1} - 23y_{k-2} - 24y_{k-3} + 36y_{k-4} = 0$

4. Доказать, что любое решение разностного уравнения $y_{k+1} - 12y_{k-1} + 2y_{k-2} + 27y_{k-3} - 18y_{k-4} = 0$ однозначно представимо в виде суммы решений уравнений $y_{k+1} - 3y_{k-1} + 2y_{k-2} = 0$ и $y_{k+1} - 9y_{k-1} = 0$.

5. Вычислить определитель $\Delta_k = \det A_k$ трехдиагональной матрицы порядка k $A_k = \begin{pmatrix} b & c & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & a & b \end{pmatrix}$, учитывая, что $\Delta_0 = 1$.

6. Найти решение разностной задачи $y_{k+2} + y_k = 0$, $y_0 = 2$, $y_1 = 1$.

7. Пусть ϕ_k и z_k – два частных решения уравнения $a_1 y_{k+1} + a_0 y_k + a_{-1} y_{k-1} = 0$, $a_1 a_{-1} \neq 0$. Доказать, что определитель матрицы $A_k = \begin{pmatrix} \phi_k & \phi_{k+1} \\ z_k & z_{k+1} \end{pmatrix}$ либо равен нулю, либо отличен от нуля для всех k одновременно.

8. Найти решение разностной задачи $y_{k+2} + 4y_{k+1} + 4y_k = 0$, $y_0 = 1$, $y_1 = 4$.

9. Показать, что решением задачи Коши $y_{i-1} - 2xy_i + y_{i+1} = 0$, $y_0 = 1$, $y_1 = x$ являются полиномы Чебышева первого рода $T_i(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^i + \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^i\right]$, $|x| \geq 1$.

10. Показать, что решением задачи Коши $y_{i-1} - 2xy_i + y_{i+1} = 0$, $y_0 = 1$, $y_1 = 2x$, являются полиномы Чебышева второго рода

$$U_i(x) = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^{i+1} - \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^{i+1}}{2\sqrt{x^2 - 1}}, \; |x| \geq 1.$$

11. Найти общее решение уравнения $y_{i-1} - 5y_i + 6y_{i+1} = 0$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

12. Найти общее решение уравнения $y_{i-1} - \frac{5}{2} y_i + y_{i+1} = 0$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

13. Определить 1000-й член последовательности, первые два члена которой равны единице, а последующие определяются рекуррентными соотношениями $y_{i+1} = y_{i-1} + y_i$, $i = 2, 3 \ldots$.

14. Найти общее решение уравнения $by_{i+1} - cy_i + ay_{i-1} = 0$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

15. Найти общее действительное решение уравнения $2y_{i-1} - y_i + y_{i+1} = 0$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

16. Найти решение разностной задачи $2y_i + 3y_{i+1} + y_{i+2} = 0$, $y_0 = 2$, $y_1 = 1$.

17. Найти решение разностной задачи $y_{k+2} + 4y_{k+1} + 4y_k = 0$, $y_0 = 1$, $y_1 = 4$.

Можно также рекомендовать в качестве заданий для самостоятельной работы упражнения из сборника задач [3]: гл.10, задачи 51-56.

Примерный перечень вопросов к зачету

4 семестр

1. Системы функций Чебышева
1.1. Определение и примеры
1.2. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы система функций была чебышевской
2. Интерполирование обобщенными многочленами
2.1. Постановка задачи. Достаточное условие существования и единственности интерполяционного обобщенного многочлена
3. Алгебраическое интерполирование
3.1. Алгебраическое интерполирование как частный случай интерполирования обобщенными многочленами.
3.2. Представление алгебраического интерполяционного многочлена в форме Лагранжа. Инвариантность относительно алгебраических многочленов соответствующей степени
4. Конечные разности
4.1. Определение, таблица. Свойства линейности и равенства постоянной величине для многочленов соответствующей степени
4.2. Представление конечной разности произвольного порядка через значения функции
4.3. Представление значения функции через значения последовательных конечных разностей
5. Разделенные разности
5.1. Определения, таблица. Свойства линейности и равенства постоянной величине для многочленов соответствующей степени
5.2. Представление разделенных разностей произвольного порядка через значения функции. Свойство симметрии
5.3. Представление значения функции через значения последовательных разделенных разностей
5.4. Представление разделенной разности через производную функции соответствующего порядка
5.5. Связь между разделенными и конечными разностями для равноотстоящих аргументов. Выражение конечной разности через производную функции
6. Интерполяционная формула Ньютона
6.1. Определение, построение, свойство инвариантности относительно многочленов соответствующей степени
7. Многочлены Чебышева
7.1. Определение, корни, точки экстремума
7.2. Приведенный многочлен Чебышева, его норма в пространстве непрерывных функций

8. Оценка остаточного члена интерполяционного полинома и ее минимизация
8.1. Представление погрешности интерполирования в форме Лагранжа
8.2. Минимизация погрешности интерполяционного полинома дискретных функций в фиксированной точке
8.3. Минимизация погрешности интерполяционного полинома по норме в пространстве непрерывных функций на заданном отрезке
9. Интерполирование по равноотстоящим узлам
9.1. Формула Ньютона для интерполирования в начале таблицы. Погрешность интерполирования
9.2. Формула Ньютона для интерполирования в конце таблицы. Погрешность интерполирования
10. Тригонометрическое интерполирование. Дискретное преобразование Фурье
10.1. Существование и единственность тригонометрического интерполяционного многочлена
10.2. Случай равноотстоящих узлов
10.3. Дискретное (прямое) преобразование Фурье
10.4. Дискретное (обратное) преобразование Фурье
11. Определение интерполяционного сплайна. Схема построения
12. Постановка задачи аппроксимации. Метод наименьших квадратов
13. Квадратурные формулы общего вида
13.1. Определение
13.2. Квадратуры, основанные на алгебраическом интерполировании
13.3. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы квадратурная формула была интерполяционной
13.4. Алгебраическая степень точности квадратурной формулы. Ее максимальное значение, выраженное через число узлов квадратурной формулы. Связь между точностью и числом узлов квадратурной формулы
14. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса
14.1. Определение. Степень точности
14.2. Частные случаи формулы Ньютона-Котеса. Представление погрешности
15. Составные квадратурные формулы
15.1. Составные квадратурные формулы общего вида
15.2. Примеры построения составных квадратурных формул
15.3. Алгебраическая степень точности составной квадратурной формулы
15.4. Представление погрешности составной квадратурной формулы

16. Правило Рунге практической оценки погрешности квадратурных формул
17. Квадратурные формулы типа Гаусса
17.1. Определение
17.2. Необходимое и достаточное условие того, чтобы квадратурная формула была точна для многочленов максимально возможной степени
17.3. Существование и единственность квадратурной формулы гауссова типа
17.4. Свойство положительности квадратурных коэффициентов
17.5. Представление остаточного члена формулы типа Гаусса
18. Частные случаи квадратурных формул гауссова типа
18.1. Квадратурная формула гауссова типа с весом Якоби
18.2. Квадратурные формулы гауссова типа с весом Чебышева-Эрмита
18.3. Квадратурные формулы гауссова типа с весом Чебышева-Лагерра
19. Вычисление кратных интегралов
19.1. Кубатурные формулы, основанные на интерполировании. Существование и единственность
19.2. Свойство инвариантности интерполяционной кубатурной формулы относительно многочленов соответствующей степени
19.4. Методы построения кубатурных формул
19.5. Метод Монте-Карло

5 семестр

1. Особенности компьютерной арифметики Машинные эпсилон, ноль и бесконечность
2. Нормы векторов и матриц. Понятие согласованности и подчиненности матричных норм.
3. Число обусловленности матрицы системы ЛАУ. Невязка. Оценки погрешности при решении систем ЛАУ с возмущенной правой частью.
4. Метод Гаусса (вычислительная сложность, выбор ведущего элемента).
5. LU-декомпозиция.
6. Разложение Холецкого.
7. Метод простой итерации для решения систем ЛАУ.
8. Условия сходимости метода простой итерации и выбор оптимального итерационного параметра. Критерий остановки итераций.
9. Итерационный метод наименьших невязок.
10. Итерационные методы градиентного типа. Метод скорейшего спуска.
11. Неявные итерационные методы (Зейделя, Якоби, Последовательной верхней релаксации).
12. Свойства собственных векторов и собственных значений. Теорема Гершгорина. Преобразования подобия матриц.
13. Степенной метод вычисления границ спектра матрицы.
14. Каноническая форма Фробениуса. Метод Данилевского.

15. Преобразования Гивенса. Метод вращений.
16. Ортогональная матрица. Преобразования Хаусхолдера и QR – разложение.
17. Методы решения нелинейных уравнений. Отделение корней. Метод дихотомии.
18. Метод неподвижной точки для решения нелинейных уравнений.
19. Метод релаксации и выбор оптимального итерационного параметра.
20. Итерационный метод Ньютона для решения нелинейных уравнений.
21. Квадратичная сходимость итерационного метода Ньютона. Локальная сходимость.
22. Модификации итерационного метода Ньютона для нелинейных уравнений и систем.
23. Численные методы нахождения экстремумов функций одной и нескольких переменных.

Примерный перечень вопросов к экзамену
6 семестр

1. Представление чисел с плавающей запятой и особенности арифметических операций с ними. Машинные эпсилон, ноль и бесконечность
2. Нормы векторов и матриц. Понятие согласованности и подчиненности матричных норм.
3. Оценка погрешности решения систем ЛАУ с возмущенной правой частью. Невязка. Число обусловленности матрицы системы ЛАУ.
4. Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса (вычислительная сложность, выбор ведущего элемента).
5. LU-декомпозиция.
6. Разложение Холецкого.
7. Итерационные методы решения систем ЛАУ. Метод простой итерации.
8. Условия сходимости метода простой итерации и выбор оптимального итерационного параметра. Критерий остановки итераций.
9. Итерационный метод наименьших невязок.
10. Итерационные методы градиентного типа. Метод скорейшего спуска.
11. Неявные итерационные методы (Зейделя, Якоби, Последовательной верхней релаксации).
12. Проблема собственных значений.
13. Свойства собственных векторов и собственных значений. Теорема Гершгорина. Преобразования подобия матриц.
14. Степенной метод вычисления границ спектра матрицы.
15. Каноническая форма Фробениуса. Метод Данилевского.
16. Преобразования Гивенса. Метод вращений.
17. Ортогональная матрица. Преобразования Хаусхолдера и QR – разложение.
18. Методы решения нелинейных уравнений. Отделение корней. Метод дихотомии.
19. Метод неподвижной точки для решения нелинейных уравнений.

20. Метод релаксации и выбор оптимального итерационного параметра.
21. Итерационный метод Ньютона для решения нелинейных уравнений.
22. Квадратичная сходимость итерационного метода Ньютона. Локальная сходимость.
23. Модификации итерационного метода Ньютона для нелинейных уравнений и систем.
24. Численные методы нахождения экстремумов функций одной и нескольких переменных.
25. Метод Эйлера для решения задачи Коши.
26. Сходимость и оценка погрешности метода Эйлера.
27. Правило Рунге для апостериорной оценки погрешности методов решения задачи Коши.
28. Одношаговые численные методы решения задачи Коши. Методы Рунге-Кутты.
29. Многошаговые численные методы решения задачи Коши. Методы Адамса.
30. Устойчивость численных методов решения задачи Коши. Правило корней.
31. Численные методы решения жестких систем. А-устойчивость. Метод Гирра.
32. Численные методы решения краевых задач. Метод Стрельбы.
33. Разностный метод решения краевых задач.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Функциональный анализ	Функционального анализа и аналитической экономики	Отсутствуют Зав. кафедрой Лебедев А.В.	Утвердить согласование (протокол № 11 от 12.05.2022г.)
Уравнения математической физики	Математической кибернетики	Отсутствуют Зав. кафедрой Гладков А.Л.	Утвердить согласование (протокол № 11 от 12.05.2022г.)

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

на ________/________ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры Веб–технологий и компьютерного моделирования (протокол № ___ от _____ 201_ г.)

Заведующий кафедрой
доктор физ.-мат. наук, доцент _______________ В.М. Волков

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
доктор физ.-мат. наук, доцент _______________ С.М. Босяков