Г. В. Синицын, М. А. Ходасевич, А. С. Ясюкевич

КОДИРОВАНИЕ ИНФОРМАЦИИ НА ОСНОВЕ ВЕЙВЛЕТОВ С ПРЕДЕЛЬНЫМ РАЗРЕШЕНИЕМ В ОПТИЧЕСКИХ КОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

Одной из существенных проблем математического описания физических процессов является его непротиворечивость природе рассматриваемого явления. Например, описание сигнала обычным для математики образом в виде непрерывной функции от времени неадекватно его информационному содержанию, поскольку такая функция в любом конечном интервале времени содержит бесконечное количество информации вследствие использования бесконечного интервала частот

Адекватность математического описания информационного сигнала достигается выбором линейного пространства, элементы которого будут представлять собой сигнал, и выбором базиса в этом пространстве. Часто лучшим (а кроме того и привычным) является тригонометрический базис. Коэффициенты разложения стационарного случайного процесса по такому базису являются некоррелированными величинами. Однако использование тригонометрического базиса для представления сигналов с особенностями проблематично, так как базисные функции не локализованы во времени. А для описания локальной особенности на фоне стационарного процесса базис должен обладать локализацией не только самих элементарных функций, но и их преобразований Фурье

Такая одновременная локализация осуществляется, например, в оконном преобразовании Фурье Идея его построения состоит в наложении на бесконечные во времени гармонические функции некоторой локализованной оконной функции. Путем временного сдвига последней получается набор базисных функций. Соответствующий выбор оконной функции и величины сдвига позволяет получить ортонормированный базис Хорошая временная локализация достигается локализацией оконной функции, а локализация преобразования Фурье – ее высокой гладкостью. Оконное преобразование Фурье имеет два существенных недостатка: огромное количество базисных элементов и использование одинаковой оконной функции для различных частот.

Вейвлет-преобразование свободно от второго недостатка и имеет значительно меньшее по сравнению с оконным Фурье-преобразованием количество элементов базиса. Для цифровой обработки информации, которая интересует нас в настоящей работе, вейвлет определяется как порождающая базис функция

Вейвлетом (материнским вейвлетом) называется функция $\psi(t)$, чьи сдвиги и растяжения $\left\{2^{-m/2}\psi(2^{-m}t-n)\right\}_{m,n}$ (дочерние вейвлеты) образуют ортонормированный базис в пространстве квадратично интегрируемых функций [1].

Строгое доказательство полноты и ортогональности базиса вейвлетов весьма громоздко. Для практических целей часто достаточно, чтобы вейвлет обладал локализацией во временной и частотной областях, нулевым средним, ограниченностью и самоподобием базиса. Последнее требование означает, что все дочерние вейвлеты должны иметь одинаковое с материнским количество осцилляций.

Разнообразным применениям вейвлетов посвящено большое количество работ. Показано, например, что вейвлеты удобно использовать не только для анализа сигналов, но и для их синтеза [2]. В [3] было продемонстрировано, что применение вейвлетов позволит повысить эффективность использования полосы частот системы. В силу своего определения вейвлеты приспособлены для решения одной из классических проблем цифровой передачи информации — получения спектрально эффективных форм сигналов, удовлетворяющих требованию нулевой межсимвольной интерференции. В [4] показано, что применение вейвлет-модуляции может дать ощутимые преимущества по сравнению с традиционными видами модуляции при передаче информации по каналам со значительными перекрестными помехами.

В настоящей работе мы исследуем возможность применения вейвлетов с предельным временным и частотным разрешением для модуляции лазерного излучения.

Пределом одновременной временной и частотной локализации сигнала является его степень свободы или одиночная информационная ячейка (как назвал ее Габор [5]). Форма ячейки не имеет никакого значения. Важны лишь ее размеры $\Delta\nu$ и Δt, связанные соотношением $\Delta\nu\Delta t = 1$, которое является нижней границей принципа неопределенности Гейзенберга. Следовательно, для однозначного описания сигнала длительностью t_s, занимающего полосу частот ν_s, необходим базис из $\nu_s t_s$ элементарных сигналов.

Рассмотрим особенности построения базиса предельно разрешимых вейвлетов в пространстве время-частота. Процесс происходит следующим образом. Октавнополосным фильтром от сигнала отщепляется его высокочастотная часть и раскладывается по набору элементарных сигналов, представляющему собой временные сдвиги функции, которая локализована внутри ячейки единичной площади. Затем процесс повторяется с оставшейся низкочастотной частью сигнала, но элементарные сигналы подвергаются временному растяжению в два раза, и т.д. Цикл завершается, когда длительность элементарного сигнала становится вдвое меньше t. Такое соотношение обусловлено невозможностью определения элементарного сигнала, имеющего нулевое среднее значение, в пределах одной информационной ячейки. Использование вейвлетов при обработке информации с предельным разрешением требует их определения по меньшей мере на двух ячейках.

Основа рассматриваемого применения вейвлетов может быть найдена при рассмотрении изменения средней величины произвольного сигнала $x(t)$.

$$D(t) = \frac{1}{\tau}\int_{t}^{t+\tau} x(u)\,du - \frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t} x(u)\,du. \qquad (1)$$

Это выражение может быть представлено в виде:

$$D(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\tau,t}(u)x(u)\,du, \text{ где } \quad \psi_{\tau,t}(u) = \begin{cases} -1/\tau, & t-\tau < u \le t, \\ 1/\tau, & t < u \le t+\tau, \\ 0, & u < t-\tau, u > t+\tau. \end{cases} \qquad (2)$$

Легко увидеть, что $\psi_{\tau,t}$ является не чем иным как нормированным Хаар-вейвлетом [1]. Следовательно, применение вейвлета позволяет получить локализованную информацию об изменении средней величины сигнала. Таким образом, для анализа с предельным разрешением вейвлет-модулированного сигнала необходимо просто сравнить его средние величины в двух соседних информационных ячейках (мы ограничимся здесь случаем четного вейвлета или вейвлета, не обладающего четностью).

Кроме метода построения базиса и способа идентификации модулированного сигнала необходимо выбрать вид материнского вейвлета. Исследование всего множества используемых вейвлетов с точки зрения их применения для модуляции лазерного излучения в конкретных условиях его распространения требует отдельного рассмотрения. Однако цель нашей работы позволяет ограничиться изучением габоровского вейвлета, как обладающего минимальной временной и частотной локализацией среди всех возможных функций [5].

Впервые разложение по базису элементарных сигналов вида модулированной функции Гаусса было предложено Габором в [5]

$$G(t,t_0,\sigma,\Omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma}\right]\exp\left[i\Omega(t-t_0)+i\vartheta\right] \tag{3}$$

Здесь t_0 - временной сдвиг, σ – среднеквадратичное отклонение, Ω – частота модуляции и ϑ - фазовый сдвиг. Элементарные сигналы такого вида не ортогональны, но в [6], было показано, что любой сигнал может быть разложен в ряд Габора без значительных затруднений Функция Габора (3) не является вейвлетом, поскольку базис, построенный на ее основе, не обладает свойством самоподобия. Однако для ее превращения в вейвлет достаточно сделать среднеквадратичное отклонение зависимым от частоты модуляции (или наоборот) Таким образом можно добиться, чтобы все дочерние габоровские вейвлеты имели одинаковое с материнским количество осцилляций. Для определенности зададим уменьшение оконной гауссовой функции в e раз на полупериоде гармонической составляющей, $\vartheta=0$ и используем мнимую часть функции Габора вследствие ее нечетности относительно $t=t_0$. Тогда $\sigma=2^{-1}\Omega^{-1}$, и у функции Габора остаются только три независимых аргумента:

$$G(t,t_0,\Omega)=\exp\left[-4(t-t_0)^2\Omega^2\right]\sin\left[\Omega(t-t_0)\right]. \tag{4}$$

В несколько измененном виде габоровское разложение было использовано для исследования эволюции информационных сигналов [7].

Рассмотрим передачу информации одномодовым лазером с последующей фоторегистрацией сигнала. Пусть источник работает гораздо выше порога генерации, а интенсивность его излучения модулируется с помощью габоровских вейвлетов с предельным разрешением. В рамках полуклассической теории фоторегистрации, выводы которой полностью согласуются с выводами более строгого квантовомеханического подхода во всех задачах регистрации, основанной на применении фотоэффекта, статистика фотоотсчетов рассматриваемого источника является пуассоновской. $p(n)=\exp(-\alpha)\alpha^n/n!$. Здесь p – вероятность получения n фотоотсчетов, $\alpha=\langle n\rangle=\beta\tau I$, τ — длительность интервала регистрации (в рассматриваемом случае $\tau=(2\Omega)^{-1}$), I – интенсивность излучения, $\beta=\eta S h^{-1}\nu^{-1}$, S – площадь фоточувствительной поверхности, η – квантовый выход, h – постоянная Планка, ν – частота падающих на приемник фотонов

Для того, чтобы пуассоновская статистика фотоотсчетов сохранялась при использовании габоровского вейвлета для модуляции излучения одномодового лазера необходимо, чтобы амплитуда модулирующего сигнала I_1 была значительно меньше амплитуды опорного сигнала I_0. Кроме того, вейвлет будет разрешим, если среднеквадратичное отклонение числа фотоотсчетов будет намного меньше разницы фотоотсчетов модулированного сигнала и опорного. Это условие может быть выражено в следующем виде:

$$\frac{\beta I_1}{\Omega}\int_0^1 \exp(-x^2)\sin(x/2)\,dx >> \sqrt{\frac{\beta I_0}{2\Omega}}. \tag{5}$$

Расширение в (5) верхнего предела интегрирования до бесконечности позволяет получить аналитическое выражение для I_1

$$\frac{2}{\Phi\left(1,\frac{3}{2},-\frac{1}{16}\right)}\sqrt{\frac{2\Omega}{\beta I_0}} << \frac{I_1}{I_0} << 1, \tag{6}$$

где $\Phi(b,c,d) = 1 + \frac{b}{c}\cdot\frac{d}{1!} + \frac{b(b+1)}{c(c+1)}\frac{d^2}{2!} + \ldots$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

Нахождение значения интеграла в (5) численными методами дает более точное значение постоянной в выражении (6):

$$3\sqrt{\frac{2\Omega}{\beta I_0}} << \frac{I_1}{I_0} << 1. \tag{7}$$

Видно, что использование габоровских вейвлетов с предельным разрешением требует возрастания глубины модуляции с ростом частоты гармонической составляющей вейвлета. При этом условии возможно оптимальное использование вейвлет-модуляции для цифровой передачи информации лазерными источниками.

Если задать величину ошибки ER передачи элементарного сигнала, то с помощью численного моделирования можно получить зависимости превышения a разницы чисел фотоотсчетов модулированного и опорного сигналов над среднеквадратичным отклонением их распределений от мощности P_* лазерного излучения. Для типичных величин $ER = 10^{-9}$ и $ER = 10^{-15}$ расчетные зависимости представлены на рис. 1. Полученные результаты соответствуют длине волны излучения 1,5 мкм, ширине полосы частот сигнала 10 ГГц и квантовому выходу 0,01. Графики показывают, что значительное (на шесть порядков величины) повышение надежности передачи информации может быть достигнуто за счет малого по сравнению с интенсивностью опорного сигнала увеличения интенсивности модулирующего сигнала

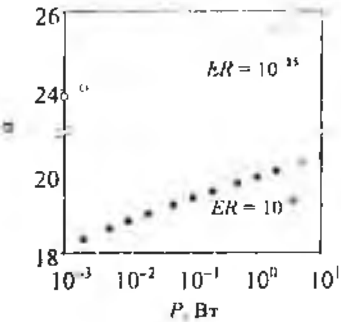

Рис. 1. Превышение a разницы чисел фотоотсчетов модулированного и опорного сигналов над среднеквадратичным отклонением их распределений в зависимости от мощности P излучения одномодового лазера для величин ошибки передачи элементарного сигнала $ER = 10^{-9}$ и $ER = 10^{-15}$

Полученные результаты подтверждают привлекательность применения вейвлет-модуляции в системах передачи информации. Среди множества вейвлетов предельно малым частотно-временным разрешением обладает габоровский вейвлет. Его оптимальное использование в лазерных системах передачи информации возможно при возрастании глубины модуляции с ростом частоты гармонической составляющей вейвлета

Литература

1. *Астафьева Н.М.* Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // УФН. 1996. Т. 166, № 11. С. 1145–1170.
2. *Ososkov G., Shitov A.* Gaussian wavelet features and their applications for analysis of discretized signals // Comp. Phys. Comm. 2000. Vol. 126. P. 149–157
3. *Daneshgaran F., Mondin M.* Bandwidth efficient modulation with wavelets // Electronic Letters. 1994. Vol. 30, № 15. P. 1200–1202.
4. *Daneshgaran F., Mondin M., Dovis F.* Performance of wavelet-based shaping pulses on linear and non-linear channels // Proc. SPIE. 1999. Vol. 3807. P. 408–419.
5. *Gabor D.* Communication Theory and Physics // Phil. Mag. 1950. Vol. 41, № 322. P. 116–187.
6. *Бастианс М.Дж.* Разложение сигнала в ряд Габора по элементарным гауссовским сигналам // ТИИЭР. 1980. Т. 68, № 4. С. 123–124.
7. *Akan A., Chaparro L.F.* Multi-window Gabor expansion for evolutionary spectral analysis // Signal Processing. 1997. Vol. 63. P. 249–262