А. М. Гончаренко, И. Л. Гаранович

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ СВЕТОВЫЕ ПУЛИ В КЕРРОВСКОЙ СРДЕ

Одним из важных применений солитонов является использование их в системах передачи и обработки информации. Весьма часто оптическое волокно представляет собой неоднородную стеклянную нить (селфок), поперечное сечение которой преднамеренно или случайно имеет эллиптическую форму. Следовательно, представляется актуальным вопрос о распространении оптических солитонных импульсов в неоднородных эллиптических волноводах.

Рассмотрим распространение узких пространственно-временных солитонов в керровской нелинейной и неоднородной среде. Используя неоднородность типа селфока, мы обходим определённые трудности решения граничной задачи для эллиптического волновода [1] и ищем решение в виде эллиптических гауссовых пучков.

Исходным в такой приближённой постановке является уравнение для огибающей функции $E(x,y,z)\exp(i\omega t - kz)$ распространяющегося импульса вида [2, 4]

$$\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{i}{2k_0}\Delta_\perp E + \frac{i}{2}k_2\frac{\partial^2 E}{\partial \eta^2} + i\frac{\Delta k^2}{2k_0}E = 0, \tag{1}$$

где k_0 - постоянная распространения невозмущённой среды, $\Delta_\perp$ - поперечный оператор Лапласа, $k_2 = -\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}$ - дисперсия среды, Δk^2 - добавка к постоянной распространения из-за нелинейности и неоднородности среды, $\eta = t - \frac{z}{u}$, u – групповая скорость. В нашем случае неоднородного эллиптического волновода изменения показателя преломления по осям Ox и Oy определяем как

$$\Delta n_x = -\beta_x\frac{x^2}{x_0^2}, \Delta n_y = -\beta_y\frac{y^2}{y_0^2}. \tag{2}$$

Изменения показателя преломления, обусловленные керровской нелинейностью, обозначаем следующим образом:

$$\Delta n_t = \beta_0|E|^2 = \beta_0 A_0^2|\psi|^2 = \beta_1|\psi|^2, \tag{3}$$

где A_0 – амплитуда электрического поля $E = A_0\psi(x,y,z,t)$. Суммарное изменение показателя преломления

$$\Delta n = \Delta n_1 + \Delta n_x + \Delta n_y. \tag{4}$$

Постоянная распространения при этом определяется как $k = k_0(1 + \Delta n)$, причем

$$\Delta k^2 = 2k_0^2 \Delta n = 2k_0^2(\Delta n_1 + \Delta n_x + \Delta n_y). \tag{5}$$

В итоге для функции ψ из (1) получаем следующее уравнение

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{i}{2k_0}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{i}{2k_0}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{i}{2}k_2\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + ik_0\beta_1|\psi|^2\psi - ik_0\beta_x\frac{x^2}{x_0^2}\psi - ik_0\beta_y\frac{y^2}{y_0^2}\psi = 0. \tag{6}$$

Введём новые переменные посредством соотношений:

$$x' = x\sqrt{2k_0},\ y' = y\sqrt{2k_0},\ \eta' = \eta\sqrt{\frac{2}{k_2}}. \tag{7}$$

После этого уравнение (6) принимает вид (штрихи опускаем)

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} + i\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + i\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + i\alpha_1|\psi|^2\psi - i\alpha_x\frac{x^2}{x_0^2}\psi - i\alpha_y\frac{y^2}{y_0^2}\psi = 0, \tag{8}$$

где

$$\alpha_1 = k_0\beta_1,\ \alpha_x = k_0\beta_x,\ \alpha_y = k_0\beta_y. \tag{9}$$

Как известно, хорошим приближением решения уравнения (8) для неоднородных диэлектрических волноводов (селфоков) являются функции Гаусса [1], а профиль солитонов по оси z представляется функцией sh(z) [3]. Но в окрестности максимума поля функция Гаусса и sh совпадают. Следовательно, для описания основных особенностей пространственно-временных солитонов (типа световых пуль) достаточно ограничиться основной гауссовой модой.

Итак, будем искать решение уравнения (8) в виде следующего эллипсоидального гауссоида:

$$\psi = \exp\left(i\gamma_1 - \gamma_2 - \frac{x^2}{fx_0^2} + i\frac{x^2}{gx_0^2} - \frac{y^2}{hy_0^2} + i\frac{y^2}{ly_0^2} - \frac{\eta^2}{q\eta_0^2} + i\frac{\eta^2}{p\eta_0^2}\right) \tag{10}$$

Здесь γ_1, γ_2, f, g, h, l, q, p – безразмерные функции от z. При этом приближённо

$$|\psi|^2 = 1 - 2\gamma_2 - 2\frac{x^2}{fx_0^2} - 2\frac{y^2}{hy_0^2} - 2\frac{\eta^2}{q\eta_0^2}. \tag{11}$$

Подставляя (10), (11) в уравнение (8) и проделывая несколько громоздкие вычисления, получаем следующие уравнения для неизвестных пока функций:

$$\gamma_1' - 2\frac{1}{fx_0^2} - 2\frac{1}{hy_0^2} - 2\frac{1}{q\eta_0^2} + \alpha_1 - 2\alpha_1\gamma_2 = 0, \tag{12}$$

$$\gamma_2' + 2\frac{1}{gx_0^2} + 2\frac{1}{ly_0^2} + 2\frac{1}{p\eta_0^2}, \tag{13}$$

$$\frac{f'}{f} + 8\frac{1}{gx_0^2} = 0, \tag{14}$$

$$\frac{g'}{g^2} - 4\frac{1}{f^2x_0^2} + 4\frac{1}{g^2x_0^2} + 2\alpha_1\frac{1}{f} + \alpha_2 = 0, \tag{15}$$

$$\frac{h'}{h} + 8\frac{1}{ly_0^2} = 0, \tag{16}$$

$$\frac{l'}{l^2} - 4\frac{1}{h^2y_0^2} + 4\frac{1}{l^2y_0^2} + 2\alpha_1\frac{1}{h} + \alpha_2 = 0, \tag{17}$$

$$\frac{q'}{q} + 8\frac{1}{p^2\eta_0^2} = 0, \tag{18}$$

$$\frac{p'}{p^2} - 4\frac{1}{q^2\eta_0^2} + 4\frac{1}{p^2\eta_0^2} + 2\alpha_1\frac{1}{q} = 0, \tag{19}$$

где штрих означает производную по z.

Уравнения (14) и (15), (16) и (17), (18) и (19) составляют три пары схожих уравнений, которые определяют форму эллипсоидального трёхмерного солитона. Вместе с уравнениями (12), (13) они определяют также его фазовую поверхность и амплитуду на оси волновода соответственно. Будем искать вначале решение системы уравнений (14), (15). Дифференцируя уравнение (14) и исключая потом функцию $g(z)$, для функции $f(z)$ получаем следующее уравнение:

$$2\frac{d^2f}{dz^2} = \left(\frac{df}{dz}\right)^2\frac{1}{f} + \frac{64}{x_0^2}\left(\frac{1}{f} - \delta_1 - \delta_2 f\right), \tag{20}$$

где $\delta_1 = \frac{1}{2}\alpha_1 x_0^2, \delta_2 = \frac{1}{4}\alpha_2 x_0^2$.

Решение уравнения (20) ищется следующим образом [5]. Вводим обозначение $\frac{df}{dz} = \phi(z)$ и полагаем $\phi^2(z) = u(f)$. При этом $\frac{d^2f}{dz^2} = \frac{1}{2}\frac{du}{df}$.

В результате уравнение (20) преобразуется к виду

$$\frac{du}{df}-\frac{u(f)}{f}=\frac{64}{x_0^4}\left(\frac{1}{f}-\delta_1-\delta_2 f\right) \qquad (21)$$

Это уравнение Риккати. Далее полагаем $u=E(f)V(f)$, при этом $E(f)=\exp\int\frac{1}{f}df=c_0 f$, $\frac{dV}{df}=\frac{64}{x_0^4}\left(\frac{1}{f^2}-\delta_1\frac{1}{f}-\delta_2\right)$. В итоге для функции $u(f)$ имеем

$$u(f)=\frac{64}{x_0^4}(-1-\delta_1 f\ln f-\delta_2 f^2+cf), \qquad (22)$$

откуда следует

$$\frac{df}{dz}=\sqrt{u(f)}=\pm\frac{8}{x_0^2}(c_1 f-1-\delta_1 f\ln f-\delta_2 f^2). \qquad (23)$$

Выбираем граничные условия в виде $f=f_0, \frac{df}{dz}=0$ при $z=0$. При этом постоянная интегрирования $c_1=\frac{1}{f_0}+\delta_1\ln f_0+\delta_2 f_0$. Окончательно для функции $f(z)$ получаем уравнение

$$\frac{df}{dz}=\pm\frac{8}{x_0^2\sqrt{f_0}}\left(f-f_0-\delta_1 f_0 f\ln\frac{f}{f_0}-\delta_2 f_0 f(f-f_0)\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (24)$$

Аналогичным образом получаем уравнения и для функций $h(z)$ и $q(z)$:

$$\frac{dh}{dz}=\pm\frac{8}{y_0^2\sqrt{h_0}}\left(h-h_0-\delta_1 h_0 h\ln\frac{h}{h_0}-\delta_2 h_0 h(h-h_0)\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (25)$$

$$\frac{dq}{dz}=\pm\frac{8}{\eta_0^2\sqrt{q_0}}\left(q-q_0-\delta q_0 q\ln\frac{q}{q_0}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (26)$$

Именно функции $f(z)$, $h(z)$, $q(z)$ в соответствии с (10) определяют пространственную форму эллипсоидального солитона. Остальные функции $g(z)$, $l(z)$, $p(z)$ определяют форму фазовой поверхности, а γ_1 и γ_2 соответственно фазовую скорость и амплитуду на оси z.

Уравнения (24)–(26) не имеют решений в известных функциях.

Численное решение их не представляет особого труда. На рис. 1 приведены примерные графики функции $f(z)$. На этих графиках видно, что амплитуда осцилляций пространственного размера световой пули не слишком велика и солитон находится далеко от состояния коллапса. Проведенные нами численные расчёты показывают, что при изменении параметра δ в разумных пределах осцилляции световой пули будут невелики и она не будет коллапсировать. Это подтверждает наше предположение об устойчивости световой пули в керровской среде. По нашим предварительным оценкам время коллапса солитона должно быть ~ 10^{-7} – 10^{-8} с, тогда как длительность световой пули составляет 10^{-12} с и меньше. Поэтому световая пуля просто не успевает коллапсировать. Аналогичные кривые характерны и для функций $h(z)$ и $q(z)$. Поскольку параметры в уравнениях (24)–(26) различаются, то в результате мы будем иметь эллипсоидальный трехмерный солитон, все три оси которого периодически изменяются с различными периодами. Это фактически будет эллипсоидальная осциллирующая световая пуля.

Уравнения (24)–(26) можно решать приближённо. Рассмотрим для примера решение уравнения (26). Предположим, что отклонения поперечного размера вдоль оси Ox невелики в сравнении с f_0. При этом

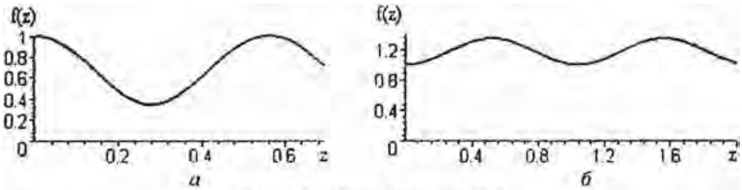

Рис. 1. Графики функции $f(z)$

$а$ – $f_0 = 1$, $\delta_1 = \delta_2 = 1.1$; $б$ – $f_0 = 1$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.4$

$\frac{f - f_0}{f_0} \ll 1$ и $\delta_1 f_0 f \ln \frac{f}{f_0} \approx \delta_1 f (f - f_0)$. В результате имеем

$$\frac{df}{dz} = \pm \frac{\varepsilon}{x_0^2 \sqrt{f_0}} \left[-f_0 + (1 + \delta_1 f_0 + \delta_2 f_0^2) f - (\delta_1 + \delta_2 f_0) f^2 \right]^{\frac{1}{2}} \qquad (27)$$

Иначе это выражение перепишется в виде

$$\frac{df}{\sqrt{a+bf+cf^2}} = \pm\frac{8}{x_0^2\sqrt{f_0}}dz, \qquad (28)$$

где

$$a = f_0,\ b = 1+\delta_1 f_0+\delta_x f_0^2,\ c = -(\delta_1+\delta_x f_0). \qquad (29)$$

При $\Delta = 4ac - b^2 = -(1-\delta_1 f_0 - \delta_x f_0^2) < 0$, $c < 0$ уравнение (28) интегрируется [6] и мы получаем

$$-\arcsin\frac{2cf+b}{\sqrt{-\Delta}} = \pm\frac{8}{x_0^2\sqrt{f_0}}\sqrt{-c}\,z + c_0. \qquad (30)$$

С учётом граничных условий окончательно имеем

$$f(z) = \frac{1+\delta_1 f_0+\delta_x f_0^2}{2(\delta_1+\delta_x f_0)} - \frac{1-\delta_1 f_0-\delta_x f_0^2}{2(\delta_1+\delta_x f_0)}\cos\left(\frac{8}{x_0^2}z\sqrt{\frac{\delta_1+\delta_x f_0}{f_0}}\right) \qquad (31)$$

Аналогичным образом находим

$$h(z) = \frac{1+\delta_1 h_0+\delta_y h_0^2}{2(\delta_1+\delta_y h_0)} - \frac{1-\delta_1 h_0-\delta_y h_0^2}{2(\delta_1+\delta_y h_0)}\cos\left(\frac{8}{y_0^2}z\sqrt{\frac{\delta_1+\delta_y h_0}{h_0}}\right) \qquad (32)$$

$$q(z) = \frac{1+\delta_1 q_0}{2\delta_1} - \frac{1-\delta_1 q_0}{2\delta_1}\cos\left(\frac{8}{\eta_0^2}z\sqrt{\frac{\delta_1}{q_0}}\right). \qquad (33)$$

Как видим, во всех трёх измерениях пространственные размеры солитона синусоидально изменяются по мере распространения его в нелинейной среде. Однако такое приближение является не очень хорошим, так как лежащие в его основе предположения о малости параметра нелинейности δ и малой величине амплитуды осцилляций $f-f_0$ функции $f(z)$ плохо выполняются одновременно. На рис. 2 приведен результат численного решения уравнения (24) и график для этого же решения, полученного по формуле (31).

Фазовая поверхность такого солитона так же будет периодически изменяться от выпуклой до вогнутой и наоборот. Проследить, однако, за формой фазовой поверхности весьма трудно, хотя в принципе зная функции $f(z)$, $h(z)$, $q(z)$ по уравнениям (12), (13), (14), (16), (18) можно найти все остальные функции, которые дадут возможность полностью описать свойства осциллирующих эллипсоидальных световых пуль.

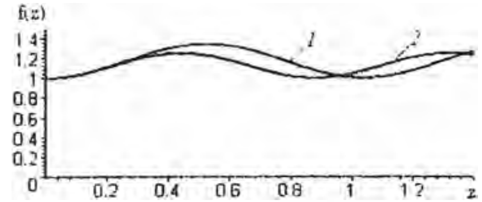

Рис.2. Графики функции $f(z)$

1 – численное решение при $f_0 = 1$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.4$; *2* – соответствующее ему решение, полученное по приближённой формуле (31)

Работа выполнена при частичной поддержке Белорусского республиканского Фонда фундаментальных исследований, проект Ф00-054.

Литература

1. *Гончаренко А.М., Карпенко В.А.* Основы теории оптических волноводов. Мн: Наука и техника. 1983. 238 с.
2. *Silberberg Y.* Collaps of optics pulses // Opt. Lett. 1990. Vol. 15, № 22. P. 1282–1284.
3. *Rosanov N.N.* Transverse paterns uin wide-aperture nonlinear optical systems // Progress in Optics. 1996. Vol. 35. P. 1–60.
4. *Гончаренко А.М.* К теории пространственно-временных оптических солитонов // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1999. № 3. С. 44–46.
5. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
6. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Гос изд-во физ.-мат. л-ры. 1962. 1100 с.