

Н. К. Данейко, А. А. Спиридонов

СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Распространение плоской волны в случайно-неоднородной среде описывается параболическим уравнением для комплекснозначной функции когерентности четвертого порядка $\Gamma_4(\zeta, \rho, s)$

$$\frac{\partial \Gamma_4}{\partial \zeta} + \frac{\partial^2 \Gamma_4}{\partial \rho \partial s} - \mathcal{W}_\rho(\rho, s) \Gamma_4 = 0 \quad (1)$$

с начальным условием в плоскости источника $\Gamma_4(\zeta = 0, \rho, s) = 1$, где $f_\rho(\rho, s) = (2\exp(-\rho^2) + 2\exp(-s^2) - \exp(-(p+s)^2) - \exp(-(p-s)^2) - 2)$ – нормированная функция рассеяния случайно-неоднородной среды с гауссовой автокорреляционной функцией показателя преломления.

Произведем замену переменных:

$$\rho = \frac{x+y}{2}, \quad s = \frac{y-x}{2} \quad (2)$$

Тогда уравнение (1) для функции $\Gamma_4(\zeta, x, y)$ с начальным условием будет иметь вид:

$$\frac{\partial \Gamma_4}{\partial \zeta} + \left[\frac{\partial^2 \Gamma_4}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Gamma_4}{\partial y^2} \right] = \mathcal{W}_\rho(x, y) \Gamma_4, \quad (3)$$

с начальным условием в плоскости источника $\Gamma_4(\zeta = 0, x, y) = 1$, где

$$f_{\rho i}(x, y) = 2\exp\left(-\frac{(x+y)^2}{4}\right) + 2\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{4}\right) - \\ \exp(-x^2) - \exp(-y^2) - 2.$$

Данная замена переменных позволяет получить на границе области интегрирования G условия периодичности и отказаться от приближенных граничных условий, как в случае численного решения этой задачи методом конечных разностей. Условия периодичности на границе области интегрирования $G = \{(x, y) : -L_x \leq x \leq L_x, \quad -L_y \leq y \leq L_y\}$ будут иметь вид

$$\Gamma_+(z, \dots, l_n, y) = \Gamma_+(z, l_n, y), \quad \Gamma_-(z, x, -l_n) = \Gamma_-(z, x, l_n) \quad (4)$$

Алгоритм спектрального метода решения задачи основывается на расщеплении уравнения (3) на два уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \gamma f_\mu(x, y) \Gamma \quad (5)$$

с начальным условием $\Gamma(\zeta = 0, x, y) = \Gamma_+(\zeta = 0, x, y) = 1$ и

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \zeta} + i \left[\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (6)$$

с граничными периодическими условиями

$$\Gamma(\zeta, x, l_y) = \Gamma(\zeta, x, 0), \quad \Gamma(\zeta, 0, y) = \Gamma(\zeta, l_x, y)$$

Решение уравнения (5) ищем аналитически.

$$\Gamma(\zeta, x, y) = \Gamma(\zeta = 0, x, y) \exp(\gamma \cdot f_\mu(x, y) \zeta) = \exp(\gamma \cdot f_\mu(x, y) \zeta), \quad (7)$$

а решение $\Gamma(\zeta, x, y)$ уравнения (6) представляем в виде суммы Фурье по переменным x, y :

$$\Gamma(\zeta, x, y) = \sum_{k_x=-\infty}^{\infty} \sum_{k_y=-\infty}^{\infty} \bar{\Gamma}(\zeta, x, y) \exp(-ik_x x - ik_y y) h_x h_y, \quad (8)$$

Для этого в прямоугольнике D вводится равномерная сетка w_h с шагами h_x и h_y по координатам x и y :

$$w_h = \left\{ \begin{array}{l} x = \pm j \cdot h_x, j = 1, \dots, N_x, h_x = \frac{L_x}{N_x} \\ y = \pm j \cdot h_y, j = 1, \dots, N_y, h_y = \frac{L_y}{N_y} \end{array} \right. \quad (9)$$

и сетка w_ζ по переменной ζ

$$w_\zeta = \left\{ \zeta = \zeta_n, \zeta_n = n h_\zeta, n = 0, 1, \dots, N_\zeta - 1, h_\zeta = \frac{L_\zeta}{N_\zeta} \right\}, \quad (10)$$

причем $N_x \approx 2^{M_x}$, $N_y \approx 2^{M_y}$ — для быстрого фурье-преобразования, а $L_x = L_y = L$ — для уменьшения времени численных расчетов. После подстановки аппроксимируем полученную систему уравнений для $k_x = -\frac{N_x}{2} + 1, \dots, \frac{N_x}{2}$ и $k_y = -\frac{N_y}{2} + 1, \dots, \frac{N_y}{2}$ следующей нелинейной симметричной схемой:

$$\frac{\partial I_{k_x, k_y}}{\partial \zeta} = \left(\frac{2\pi}{2L} \right)^2 (k_x^2 - k_y^2) I_{k_x, k_y} \quad (11)$$

С решением для функции I на $\zeta + h_\zeta$ шаге через решение на ζ шаге:

$$I(\zeta + h_\zeta, k_x, k_y) = I(\zeta, k_x, k_y) \exp\left(-\frac{iR}{L^2} (k_x^2 - k_y^2)\right). \quad (12)$$

Обратное быстрое фурье-преобразование по переменным k_x и k_y дает функцию Γ .

Погрешность данной численной схемы на каждом шаге имеет порядок $\Delta_n \sim h_\zeta^2$, на всем интервале L_ζ погрешность вычисления будет иметь величину порядка: $\Delta \approx L_\zeta \cdot \Delta_n = L_\zeta \cdot h_\zeta^2$. Поэтому для расчета функции когерентности на больших дальностях необходимо уменьшать шаг интегрирования.

Численные результаты для функции когерентности четвертого порядка $\Gamma_4(\zeta, p, s)$ плоской волны, распространяющейся в двухмерной случайно-неоднородной среде с гауссовой корреляционной функцией флуктуаций показателя преломления представлены для различных значений параметра рассеяния с целью сравнительного анализа влияния эффектов дифракции и рассеяния на распространение плоской волны. Индекс мерцаний плоской волны определяется формулой:

$$S_p^2 = \Gamma_4(\zeta, p = 0, s = 0) - 1. \quad (13)$$

Индекс мерцаний плоской волны в работе рассчитывался двумя численными методами: конечных разностей и спектральным. Метод конечных разностей очень чувствителен к выбору сетки, которая зависит от параметра рассеяния γ . Спектральный метод в меньшей мере зависит от выбора сетки и потому для сравнения численных расчетов выбрано умеренное значение параметра интенсивности $\gamma = 10$. На рис. 1 изображены графики индекса мерцаний S_p^2 для двух методов

расчета (кривая 1 — спектральный; кривая 2 — метод конечных разностей).

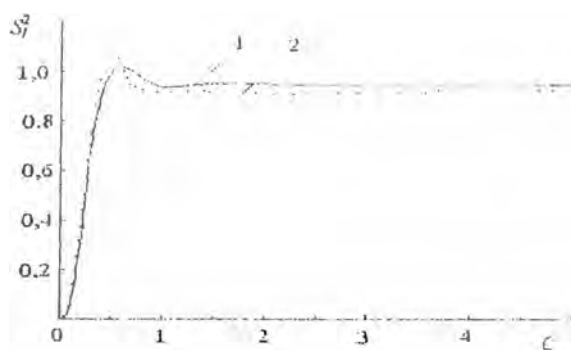


Рис. 1 Сравнение численных расчетов индекса мерцаний

В областях возмущений (на малых дальностях) результаты расчета спектральным методом и методом конечных разностей совпадают. Они начинают отличаться на дальности $z \approx 1,5$ и если в спектральном методе на дальности $z = 1,8$ индекс мерцаний достигает максимального значения $S_f^2 \approx 1,13$, то в методе конечных разностей $S_f^2 = 1,28$. Вдали от максимума S_f^2 результаты спектрального метода монотонно приближаются к насыщению с постоянным наклоном, в то время как результаты метода конечных разностей достигают насыщения на более коротких дальностях распространения.