А. П. Хапалюк

ДИФРАКЦИЯ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ НА ПЛОСКИХ ЭКРАНАХ

Известно [1-4], что теоретические проблемы исследования дифракции (распространения) электромагнитных волн сводятся к краевым задачам для уравнений Максвелла. В общем случае это довольно сложная и все еще мало исследованная математическая проблема. В большинстве случаев эти задачи решаются приближенными или численными методами. Здесь предлагается точное аналитическое решение таких задач для простейшего частного случая с краевыми условиями, заданными на плоских экранах.

Задача решается для стационарного (временной множитель $\exp i\omega t$ – опускается) двухмерного (зависимость от декартовой координаты y отсутствует) случая. В этом случае система уравнений Максвелла распадается на две независимые подсистемы, соответствующие двум различным поляризациям

$$\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}=iE_y, \quad H_x=-i\frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad H_z=i\frac{\partial E_y}{\partial x} \tag{1}$$

и

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=-iH_y, \quad E_x=i\frac{\partial H_y}{\partial z}, \quad E_z=-i\frac{\partial H_y}{\partial x}, \tag{2}$$

где использованы безразмерные декартовы координаты $(x \to kx$, $z \to kz$, k — волновое число). В математическом отношении обе системы идентичны и могут решаться аналогичными методами. Целесообразно начинать решение системы (1) с определения компоненты E_y из уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}+E_y=0. \tag{3}$$

Для однозначного решения требуются дополнительные (краевые) условия, которые будем задавать на плоскости (экране) xy при $z=0$, как некоторые функции координаты x. Нужно задать на экране саму функцию E_y и ее нормальную (по z) производную

$$E_y(x,0)=f_1(x), \qquad \left.\frac{\partial E_y(x,z)}{\partial z}\right|_{z=0}=f_2(x), \tag{4}$$

что обеспечивает однозначность решения. Точное решение поставленной здесь задачи будем искать в виде ряда

$$E_y(x,z)=\sum_{m=0}^{\infty}\varphi_m(z)\frac{d^m}{dx^m}\eta(x),\qquad(5)$$

где функции $\varphi_m(z)$ и $\eta(x)$ подлежат доопределению. Условия для их доопределения можно получить из следующих соображений. Подставим ряд (5) в уравнение (3) и после простой перегруппировки членов результат запишем в виде

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{d^2\varphi_m(z)}{dz^2}+\varphi_m(z)+\varphi_{m-2}(z)\right]\frac{d^m}{dx^m}\eta(x)=0\qquad(6)$$

Для того, чтобы ряд (5) удовлетворял уравнению (3), достаточно потребовать, чтобы выражение в квадратных скобках в (6) по отдельности для каждого m равнялось нулю, что приводит к системе довольно простых рекуррентных уравнений

$$\frac{d^2\varphi_m(z)}{dz^2}+\varphi_m(z)+\varphi_{m-2}(z)=0,\ (m=0,\ 1,\ 2,\ ..),\qquad(7)$$

которые легко интегрируются в общем виде.

Сначала учтем, что уравнения (7) связывают между собой функции φ_m, номера которых отличаются на два. Из-за этого система (7) распадается на две независимые между собой подсистемы с четными и нечетными номерами. В математическом отношении обе системы оказываются совершенно одинаковыми. В принципе можно ограничиться только одной из них. Несложное дополнительное исследование показывает, что, не умаляя общности, удобно ограничиться четными решениями для функций с четными номерами и нечетными решениями для функций с нечетными номерами. Полагая в (7) $m=0$ и $m=1$, получаем уравнения для определения начальных функций ряда (5). Их решения с учетом условий четности легко находятся

$$\frac{d^2\varphi_0(z)}{dz^2}+\varphi_0(z)=0,\ \varphi_0(z)=\cos z,\ \frac{d^2\varphi_1(z)}{dz^2}+\varphi_1(z)=0,\ \varphi_1(z)=\sin z.\ (8)$$

Решения здесь взяты с точностью до мультипликативной постоянной интегрирования, что не имеет существенного значения. С точностью до этой постоянной определяется решение исходного уравнения (3), что можно учесть на любом этапе его определения.

Сначала найдем решения для функций φ_m с четными индексами. Введем для них новое обозначение $\varphi_{2m}(z)=C_m(z)$. Следующий соответствующий член ряда (5) определяется из системы (7) при $m=2$

$$\frac{d^2C_1(z)}{dz^2}+C_1(z)+C_0(z)=\frac{d^2C_1(z)}{dz^2}+C_1(z)+\cos z=0. \tag{9}$$

Получилось неоднородное уравнение. Общее решение соответствующего однородного уравнения совпадает с решением (8) и оно уже учтено на предыдущем этапе. Нужное решение получается как частное решение неоднородного уравнения. Это дополнительное условие обеспечивает однозначность

$$C_1(z)=-\frac{1}{2}z\sin z. \tag{10}$$

Уравнение для следующей функции $C_2(z)$ и его решение находятся аналогично

$$\frac{d^2C_2(z)}{dz^2}+C_2(z)-\frac{1}{2}z\sin z=0, \quad C_2(z)=\frac{1}{8}z\sin z-\frac{1}{4}\frac{z^2}{2!}\cos z. \tag{11}$$

Полагая в (7) $m=6,8,\dots$ и учитывая приведенные выше дополнительные условия, получим

$$C_3(z)=\left(\frac{1}{8}\frac{z^3}{3!}-\frac{1}{16}z\right)\sin z+\frac{1}{8}\frac{z^2}{2!}\cos z,$$

$$C_4(z)=\left(-\frac{3}{32}\frac{z^3}{3!}+\frac{5}{128}z\right)\sin z+\left(\frac{1}{16}\frac{z^4}{4!}-\frac{5}{64}\frac{z^2}{2!}\right)\cos z. \tag{12}$$

Нетрудно найти формулу для $C_m(z)$ в общем виде. Она может быть представлена следующим образом:

$$C_m(z)=\sum_{n=m}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{m!(n-m)!}\frac{z^{2n}}{(2n)!}=(-1)^m\left[\frac{z^{2m}}{(2m)!}-(m+1)\frac{z^{2m+2}}{(2m+2)!}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}(m+1)(m+2)\frac{z^{2(m+2)}}{(2m+4)!}-\frac{1}{3!}(m+1)(m+2)(m+3)\frac{z^{2(m+3)}}{(2m+6)!}+\dots\right]. \tag{13}$$

Аналогичным образом и при аналогичных дополнительных условиях находятся функции $\varphi_m(z)$ с нечетным номером. Все они будут нечетными, и для них введем обозначение $\varphi_{2m+1}(z)=S_m(z)$. Начальное значение определяется формулой (8). Следующие значения запишутся в виде

$$S_1(z)=\frac{1}{2}z\cos z-\frac{1}{2}\sin z, \quad S_2(z)=-\frac{1}{4}\left(\frac{z^2}{2!}-\frac{5}{2}\right)\sin z-\frac{3}{8}z\cos z,$$

$$S_3(z)=\frac{1}{4}\left(\frac{z^2}{2!}-\frac{5}{4}\right)\sin z-\frac{1}{8}\left(\frac{z^3}{3!}-\frac{5}{2}z\right)\cos z,\ldots \tag{14}$$

В общем случае получается формула

$$S_m(z)=\sum_{n=m}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{m!(n-m)!}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=(-1)^m\left[\frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!}-(m+1)\frac{z^{2m+3}}{(2m+3)!}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(m+1)(m+2)\frac{z^{2(m+5)}}{(2m+5)!}-\frac{1}{3!}(m+1)(m+2)(m+3)\frac{z^{2(m+7)}}{(2m+7)!}+\ldots\right] \tag{15}$$

Непосредственно из формул следует, что ряды (13) и (15) сходятся при любом значении z и определяют аналитические функции экспоненциального типа. Следует отметить, что функции $\varphi_m(z)$ определяются независимо от краевых условий и поэтому имеют довольно общий характер. Если теперь найденные функции подставить в ряд (5), то получим два точных решения уравнения (3)

$$E_y(x,z)=\sum_{m=0}^{\infty}S_m(z)\frac{d^{2m+1}}{dx^{2m+1}}\eta_1(x)+\sum_{m=0}^{\infty}C_m(z)\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}\eta_2(x), \tag{16}$$

где $\eta_1(x)$ и $\eta_2(x)$ в общем случае независимые между собой произвольные функции. Для того, чтобы оно совпало с тем решением, которое определяется краевыми функциями (4), нужно соответствующим образом доопределить $\eta_1(x)$ и $\eta_2(x)$

$$E_y(x,0)=\eta_2(x)=f_1(x),\quad \frac{\partial E_y(x,z)}{\partial z}\Big|_{z=0}=\frac{d\eta_1(x)}{dx}=f_2(x). \tag{17}$$

Учитывая полученные результаты, окончательное решение поставленной задачи запишем в виде

$$E_y(x,z)=\sum_{m=0}^{\infty}C_m(z)\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}f_1(x)+\sum_{m=0}^{\infty}S_m(z)\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}f_2(x),$$

$$H_x(x,z)=i\sum_{m=0}^{\infty}\left[S_m(z)+S_{m-1}(z)\right]\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}f_1(x)-i\sum_{m=0}^{\infty}C_m(z)\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}f_2(x),$$

$$H_z(x,z)=i\sum C_m(z)\frac{d^{2m+1}}{dx^{2m+1}}f_1(x)+i\sum S_m(z)\frac{d^{2m+1}}{dx^{2m+1}}f_2(x). \tag{18}$$

Совершенно аналогично решается вторая система уравнений Максвелла (2) и ее точное решение запишется

$$H_y(x,z)=\sum_{m=0}^{\infty}C_m(z)\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}f_1(x)+\sum_{m=0}^{\infty}S_m(z)\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}f_4(x),$$

$$E_x(x,z)=-i\sum_{m=0}^{\infty}[S_m(z)+S_{m-1}(z)]\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}f_1(x)+i\sum_{m=0}^{\infty}C_m(z)\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}f_4(x),$$

$$E_z(x,z)=-i\sum_{m=0}^{\infty}C_m(z)\frac{d^{2m+1}}{dx^{2m+1}}f_1(x)-i\sum_{m=0}^{\infty}S_m(z)\frac{d^{2m+1}}{dx^{2m+1}}f_4(x), \quad (19)$$

где функции $f_1(x)$ и $f_4(x)$ определяют краевые условия для системы уравнений (2).

Таким образом, формулы (18)–(19) дают точное решение задачи интегрирования уравнений Максвелла (1)-(2), что является основным, чисто математическим, этапом проблемы дифракции электромагнитных волн. Их можно считать также решениями уравнения Гельмгольца (3), которое встречается не только в теории электромагнитных волн, но и в других разделах математики и теоретической физики. Осталось исследовать полученные решения: привязать их к конкретным задачам и дать им физическую интерпретацию. При этом возникают новые дополнительные проблемы другого характера, и хотя они далеко не всегда принципиальные, но практически могут оказаться достаточно сложными. Отметим три, по нашему мнению наиболее существенных, возникающих на этом пути проблемы:

1. Первая из них связана с проблемой сходимости рядов, которая здесь остается открытой. Нетрудно найти такие конкретные краевые функции, при которых эти ряды заведомо сходятся. Далее можно показать, что довольно широкий класс функций может быть представлен сходящимися рядами вида (18)–(19). В общем случае, основываясь на частичных дополнительных исследованиях и эвристических соображениях, можно предположить, что при реальных краевых функциях ряды должны сходиться.

2. Вторая проблема связана с тем, что решения получены в виде труднообозримых бесконечных рядов, хотя в общем случае здесь упрощений ждать не приходится. При произвольных краевых условиях нельзя получить решения в замкнутом аналитическом виде через известные и изученные в математике функции. Разным краевым функциям соответствуют разные решения, которые, как правило, требуют нетривиального дополнительного математического исследования. Только в частных случаях при специально подобранных краевых функциях можно получить решение в замкнутом виде через изучен-

ные функции. Эти выводы качественно согласуются с известными экспериментальными результатами. Известно, что в деталях дифракционные поля электромагнитных волн настолько сложны и разнообразны, что выразить их через простые известные в математике функции маловероятно.

3. Еще одна очень важная и принципиальная проблема связана с конкретным выбором краевых функций. При физической интерпретации полученных решений она часто становится решающей и ее обойти нельзя. Полученные решения определяются четырьмя, в общем случае независимыми между собой функциями. Это означает, что фактически получено четыре независимых между собой решения уравнений Максвелла. Конкретные физически реальные решения следует искать среди их линейной комбинации, что требует новой дополнительной информации. Относящиеся сюда задачи определяют содержание теории когерентности электромагнитных волн. Практически довольно большое число разнообразных конкретных задач сводится к проблеме выбора краевых функций. Здесь следует подчеркнуть, что выбор краевых функций не является проблемой только теории электромагнитных волн. В идеальном случае они должны определяться из экспериментов. В целом, это дополнительная и прежде всего важная физическая самостоятельная проблема, и она требует специального исследования.

Заметим, что если считать все четыре краевые функции независимыми между собой, то полученные здесь решения не будут когерентными, энергетически не будут взаимодействовать и их следует изучать по отдельности. Непосредственно из формул (17)–(18) следует, что они описывают поля типа стоячих волн. Для описания полей типа бегущих волн требуется специальный выбор краевых функций.

Литература.

1. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука. 1970. 856 с.
2. *Хенл Х., Мауэ А., Вестфаль К.* Теория дифракции. М.: Мир. 1964. 428 с.
3. *Бельский А.М., Корнейчик Т.М., Хапалюк А.П.* Пространственная структура лазерного излучения. Мн.: БГУ. 1982. 198 с.
4. *Khapalyuk A.* The Generalization of Sommerfeld Problem about Plane Wave Diffraction on Enge of Semiplane // Proceedings MMET96. Lviv. 1996. P. 327–330.