РОБАСТНОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ ПРИ ОШИБКАХ СПЕЦИФИКАЦИИ МОДЕЛИ

Е. Н. Татур

Пусть на некотором вероятностном пространстве наблюдается последовательность случайных величин $X_1, X_2 \ldots$, имеющих гамма-распределение вероятностей $G(\theta, \lambda)$ с параметром масштаба $\theta > 0$ и параметром формы $\lambda > 0$. Плотность распределения вероятностей наблюдений задается следующей формулой:

$$f(x:\theta,\lambda) = \frac{x^{\lambda-1} e^{-x/\theta}}{\theta^{\lambda} \Gamma(\lambda)}, \; x > 0, \tag{1}$$

где предполагается, что λ известно. Необходимо проверить простую гипотезу $H_0 : \theta = \theta_0$ против простой альтернативы $H_1 : \theta = \theta_1$ $(\theta_1 > \theta_0)$. Для проверки используется последовательный критерий отношения вероятностей (ПКОВ) [2].

Примем обозначения для статистики, вычисленной по наблюдениям X_i:

$$Z_i = \ln \frac{f(X_i;\theta_1)}{f(X_i;\theta_0)} = \lambda \ln\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right) + \left(1/\theta_0 - \frac{1}{\theta_1} \right) X_i, \; i = 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

Пусть заданы параметры A, B ($0<B<1<A$). В соответствии с [3] ПКОВ имеет следующий вид:

$$\text{принимается гипотеза} \begin{cases} H_0, \text{если} \sum\limits_{i=1}^{n} Z_i \le \ln B, \\ H_1, \text{если} \sum\limits_{i=1}^{n} Z_i \ge \ln A. \end{cases} \tag{3}$$

ПКОВ завершается в случайный момент, когда впервые будет выполнено одно из неравенств в (3). До этого момента наблюдения продолжаются.

Пусть $\alpha_0 \in (0;1)$, $\beta_0 \in (0;1)$ описывают допустимый уровень вероятностей ошибок первого и второго рода для ПКОВ, тогда, согласно [1], получаем следующие приближенные значения порогов:

$$A \approx \frac{1-\beta_0}{\alpha_0},\ B \approx \frac{\beta_0}{1-\alpha_0}. \tag{4}$$

Исследуем ПКОВ (3), (4), построенный для определения параметра масштаба θ гамма-распределения. Вычислительные эксперименты проводились в случае, когда наблюдения соответствовали распределению $G(\theta,5)$. На основании результатов имитационного моделирования представляется возможность сделать следующие выводы.

- Увеличение отношения θ_0/θ_1 ведет к росту математического ожидания (среднего) числа наблюдений.
- Для завершения ПКОВ (3), (4) при верной гипотезе H_0 всегда требуется больше наблюдений, чем при верной гипотезе H_1 (при заданном соотношении между θ_0 и θ_1).
- Чем меньше величины допустимых вероятностей ошибок α_0 и β_0, тем больше среднее значение необходимого числа наблюдений.
- При увеличении λ для фиксированных значений α_0, β_0 и θ, θ_0, θ_1 среднее число требуемых наблюдений уменьшается.

Не смотря на то, что исследуется критерий, предназначенный для проверки простой гипотезы H_0 при простой альтернативе H_1, истинное (фактическое) значение θ может не совпадать ни с одной из величин θ_0 и θ_1. В рамках этого замечания были сделаны следующие выводы.

- ПКОВ (3), (4) требует наибольшее в среднем количество наблюдений при $\theta \in [\theta_0;\theta_1]$, при этом, чем ближе θ к середине указанного промежутка, тем больше значение этой характеристики.
- В случае, когда $\theta \notin [\theta_0,\theta_1]$, чем дальше величина θ от границ θ_0 и θ_1, тем меньше наблюдений требуется для завершения критерия.

На практике часто наблюдения подвержены искажениям [4], например, когда заданное значение параметра λ не совпадает с фактическим (истинным). При изучении данного случая рассматривались заданные значения λ^* из промежутка $[4.75; 5.25]$(при истинном значении параметра $\lambda = 5.0$). Установлено, что уже при $\lambda^* = \lambda \pm 0.05$ полусумма фактических вероятностей ошибок первого и второго рода превышает заданные допустимые значения и растет с увеличением величины $\left|\lambda - \lambda^*\right|$. Этот факт свидетельствует о необходимости модификации ПКОВ (3), (4) с целью уменьшения влияния на него указанной ошибки спецификации модели.

Для указанной модели искажений ПКОВ (3), (4) в данной работе построен новый последовательный вероятностный критерий, робастный к ошибкам спецификации модели в задании значения параметра λ.

Схема принятия решения в (3) и пороговые значения (4) не меняются, однако статистика критерия определяется следующим образом:

$$Z_i = \ln \frac{\max\limits_{\lambda_1^* \in \Lambda} \left\{ f\left(X_i; \theta_1, \lambda_1^*\right) \right\}}{\max\limits_{\lambda_0^* \in \Lambda} \left\{ f\left(X_i; \theta_0, \lambda_0^*\right) \right\}}, \; i = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

где Λ - конечное множество, представленное равномерной решеткой на отрезке $[0.9\lambda^*;\ 1.1\lambda^*]$.

Построенный последовательный критерий (3)-(5) исследуется в серии вычислительных экспериментов. Рассматривая зависимость оценок по методу Монте-Карло полусуммы фактических вероятностей ошибок первого и второго рода $\frac{\alpha + \beta}{2}$ от искаженного значения λ^*, можем сделать следующие выводы.

- Пока $\lambda \in [0.9\lambda^*; 1.1\lambda^*]$, вероятности ошибок первого и второго рода не превышают заданные значения.
- Если же $\lambda \notin [0.9\lambda^*; 1.1\lambda^*]$, то значение $\frac{\alpha + \beta}{2}$ выходит за допустимые пределы $\frac{\alpha_0 + \beta_0}{2}$ и растет с увеличением $\left|\lambda - \lambda^*\right|$.

Анализ зависимостей, полученных в результате имитационного моделирования, показывает, что чем больше величина $\left|\lambda - \lambda^*\right|$, тем меньше значение среднего числа наблюдений, необходимых построенному критерию (3)-(5).

При сравнении построенного робастного и исходного критериев были получены следующие результаты.

- В пределах достаточно малой окрестности точки $\lambda^* = \lambda$ исходный и робастный критерии имеют близкие значения $\frac{\alpha+\beta}{2}$.

- С увеличением значения $\left|\lambda - \lambda^*\right|$ модифицированный критерий дает принципиально лучшие результаты, если $\lambda \in [0.9\lambda^*; 1.1\lambda^*]$.

- Если же $\lambda \notin [0.9\lambda^*; 1.1\lambda^*]$, то значение $\frac{\alpha+\beta}{2}$ для модифицированного критерия приближается к величине $\frac{\alpha+\beta}{2}$ для исходного критерия при увеличении $\left|\lambda - \lambda^*\right|$.

Среднее число наблюдений, необходимое для построенного робастного критерия, оказывается большим, однако такое увеличение приемлемо в большинстве практических задач.

Литература

1. *Боровков А.А.* Математическая статистика. Новосибирск, Наука, 1997.
2. *Вальд А.* Последовательный анализ. М., 1960. 327 с.
3. *Parameshwar V. Pandit, Nagaraj V. Guraganavar* On Robustness of a Sequential Test for Scale Parameter of Gamma and Exponential Distribution // Applied Mathematics, 2010, 1-P.274-278.
4. *Kharin, A.* Robustness evaluation in sequential testing of composite hypotheses // Austrian Journal of Statistics. 2008. V. 37 (1). P. 51 – 60.