ОЦЕНИВАНИЕ ВЕЛИЧИНЫ ЧИСТОГО ПРИВЕДЁННОГО ДОХОДА ИНВЕСТИЦИЙ В УСЛОВИЯХ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ О ВЕЛИЧИНЕ ПОЛУЧАЕМЫХ ДОХОДОВ

А. А. Пушкин

Инвестирование с финансовой точки зрения объединяет два противоположных и в известном смысле самостоятельных процесса – создание производственного или иного объекта, или накопление капитала, и последовательное получение дохода.

Непосредственным объектом анализа в данной работе являются потоки платежей, характеризующие процессы вложения средств и получения дохода в виде одной последовательности. Потоки платежей можно разделить на инвестиции (I) – платежи, входящие в поток с отрицательным знаком и на отдачи от инвестиций (R) – входящие в поток с положительным знаком.

$$I_1, I_2, \dots, I_k, R_1, R_2, \dots, R_m, \tag{1}$$

где $I_i < 0,\ i = \overline{1,k}; R_j > 0,\ j = \overline{1,m}$.

Два наиболее важных показателя для анализа инвестиций – это чистый приведенный доход (net present value, NPV) и внутренняя норма доходности $i_э$ (internal rate of return, IRR). Будем рассчитывать их с дисконтированием, т.е. учётом фактора времени. Они определяются следующим образом [1]:

$$NPV = \sum_{j=1}^{m} R_j\,(1+i)^{-\tau_j} + \sum_{j=1}^{k} I_j\,(1+i)^{-t_j}, \tag{2}$$

где i – ставка сравнения; $t_1, \dots, t_k$ – моменты вложения инвестиций; $\tau_1, \dots, \tau_m$ – моменты возврата отдач от инвестиций.

А внутренняя норма доходности $i_э$ как корень уравнения

$$\sum_{j=1}^{m} R_j\,(1+i)^{-\tau_j} + \sum_{j=1}^{k} I_j\,(1+i)^{-t_j} = 0. \tag{3}$$

Сложность анализа инвестиционного проекта заключается в том, что отдачи от инвестиций почти всегда недетерминированы и важнейшей задачей риск-менеджмент является оценка этих величин. Будем полагать, что величины инвестиций $I_j, j = \overline{1,k}$ – заданы и детерминированы, а отдачи от инвестиций $R_j, j = \overline{1,m}$ (все, либо часть из них) – случайные величины с заданными, либо спрогнозированными законами распределения вероятностей.

Рассмотрим несколько вариантов априорной информации о величине чистых доходов $R_j, j = \overline{1,m}$.

1. СУММА ДВУХ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЁННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Пусть величины отдач от инвестиций $R_j, j = \overline{1,m-2}$ заданы, а две последние инвестиции R_m и R_{m-1} являются независимыми, равномерно распределёнными случайными величинами, соответственно на отрезках $[n_1,m_1]$ и $[n_2,m_2]$. Введём обозначения:

$$\alpha_1 = \sum_{j=1}^{m-2} R_j (1+i)^{-\tau_s} + \sum_{j=1}^{k} I_j (1+i)^{-t_j}, \beta_1 = (1+i)^{-\tau_{m-1}},$$

$$\beta_2 = (1+i)^{-\tau_m}, \xi_1 = R_{m-1}, \xi_1 = R_m.$$

Тогда формула (2) трансформируется в формулу

$$NPV = \alpha_1 + \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2.$$

Теорема 1. Пусть ξ и η – СВ, распределённые равномерно на отрезках $[a_1,b_1]$ и $[a_2,b_2]$ соответственно. Тогда их сумма $\xi + \eta$ – СВ, имеющая следующую трапецеидальную плотность распределения $p(x)$:

$$p_{\xi+\eta}(x) = \begin{cases} 0, \ x \le a_1 + a_2, \\ \alpha(x - a_1 - a_2), \ a_1 + a_2 \le x \le min, \\ \alpha(min - \ a_1 - a_2), min \le x \le max, \\ \alpha(b_1 + b_2 - x), max \le x \le b_1 + b_2, \\ 0, \ x \ge b_1 + b_2, \end{cases}$$

где $\alpha = \frac{1}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}$; $min = \min\{a_1 + b_2; a_2 + b_1\}$; $max = \max\{a_1 + +b_2; a_2 + b_1\}$.

Следствие. Случайная величина $\xi + \eta$ имеет стандартную трапецеидальную плотность распределения, которая вырождается в стандартную треугольную при условии $b_1 - a_1 = b_2 - a_1$, т.е. при равенстве длин отрезков, на которых распределены ξ и η.

2. СУММА ДВУХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, ОДНА ИЗ КОТОРЫХ РАСПРЕДЕЛЕНА ТРАПЕЦЕИДАЛЬНО, А ДРУГАЯ – РАВНОМЕРНО

Рассмотрим обобщение предыдущего случая. Пусть величины отдач от инвестиций $R_j, j = \overline{1, m-2}$ заданы, а две последние отдачи R_m и R_{m-1} являются независимыми СВ, при этом R_{m-1} имеет трапецеидальное распределение на отрезке $[a_1,d_1]$, а R_m распределена равномерно на отрезке $[a_2,b_2]$.

Для данного случая получена формула плотности суммы случайных величин R_m и R_{m-1}. Этот результат был реализован в прикладной программе, разработанной в среде программирования Delphi, которая позволяет построить график плотности данной СВ, а также оценить вероятность её попадания в заданный интервал.

3. СМЕШАННЫЙ ТИП РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ОТДАЧ ОТ ИНВЕСТИЦИЙ

Будем предполагать, что две последние наиболее удалённые от начала инвестиционного процесса, отдачи от инвестиций R_m и R_{m-1} имеют смешанный тип распределения вероятностей, т.е., например, R_{m-1} имеет дискретное распределение, определяемое параметрами $r_i, i = \overline{1,s}$ и $p_i = P(R_{m-1} = r_i)$. А отдача R_m имеет абсолютно-непрерывное распределение с плотностью $p_{R_m}(x)$. Остальные параметры инвестиций детерминированы.

Теорема 2. Пусть ξ – дискретная СВ, заданная таблицей распределения $P(\xi = a_i) = p_i, i = \overline{1,n}$, а η – абсолютно непрерывная СВ с плотностью распределения $p_\eta(x)$ и эти случайные величины независимы. $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \gamma \neq 0$. Тогда СВ $\alpha + \beta\xi + \gamma\eta$ имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью

$$p_{\alpha+\beta\xi+\gamma\eta}(x) = \frac{1}{\gamma}\sum_{i=1}^{s} p_i p_\eta\left(\frac{x-\alpha-\beta a_i}{\gamma}\right). \tag{4}$$

Замечание. Данная операция сложения коммутативна.

Следствие. Если случайная величина η имеет равномерное распределение на интервале $[a, b]$, то формула (4) трансформируется в формулу

$$p_{\alpha+\beta\xi+\gamma\eta}(x) = \frac{1}{(b-a)\gamma}\sum_{i=1}^{s} 1\left(\frac{x-\alpha-\beta a_i}{\gamma} - a\right)1\left(b - \frac{x-\alpha-\beta a_i}{\gamma}\right)p_i. \tag{5}$$

4. МАРКОВСКАЯ ЗАВИСИМОСТЬ С ТРЕНДОМ

В этом пункте будем полагать, что первые p отдач от инвестиций детерминированы, а остальные связаны цепной зависимостью Маркова с трендом. Значение p может равняться нулю, т.е. все отдачи от инвестиций являются случайными величинами.

Пусть на интервале $[t_{p+1}, t_m]$ задан тренд $f(t)$, определяющий общую тенденцию изменения отдач от инвестиций. Значения отдач R_j, $j = \overline{p+1,m}$ складываются из значения $f(t_j)$ и возмущения ε_{ξ_j}, т.е. $R_j = f(t_j) + \varepsilon_{\xi_j}$, где $\varepsilon_{\xi_j}, j = \overline{p+1,m}$ – однородная цепь Маркова с N состояниями $\{1,2,\ldots,N\}$, начальным распределением вероятностей

$$P\{\xi_{p+1} = \lambda\} = \pi_\lambda, \lambda = \overline{1,N}, \sum_{\lambda=1}^{N} \pi_\lambda = 1$$

и матрицей вероятностей одношаговых переходов

$$P = (p_{ks}), p_{ks} = P\{\xi_{j+1} = s | \xi_j = k\},$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_N$ – заданные состояния цепи (возмущения).

Введём обозначения:

$$\alpha = \sum_{j=1}^{p} R_j (1+i)^{-\tau_j} + \sum_{j=1}^{k} I_j (1+i)^{-t_j}, \beta = (1+i)^{-\tau_m}, j = \overline{p+1, m},$$

$$\eta = NPV.$$

Тогда чистый приведённый доход можно представить в следующем виде:

$$NPV = \eta = \alpha + \sum_{j=p+1}^{m} (f(t_j) + \xi_{t_j})\beta_j.$$

Среднее значение *NPV* будет равно

$$E\{\eta\} = \sum_{\xi_{p+1}=1}^{N} \sum_{\xi_m=1}^{N} \eta \pi_{\xi_{p+1}} p_{\xi_{p+1},\xi_{p+2}} \dots p_{\xi_{m-1},\xi_m}.$$

Также можно вычислить дисперсию *NPV* и вероятность его попадания в заданный интервал [N_1, N_2].

Данная модель на практике была реализована в виде прикладной программы в среде программирования Delphi, которая позволяет оценивать чистый приведённый доход *NPV* по величине и вероятности его получения.

Литература

1. *Четыркин Е. М.* Методы финансовых и коммерческих расчетов. М., 1995.