УДК 517.925+517.957

О СВОЙСТВЕ ПЕНЛЕВЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ШЕСТОГО ПОРЯДКА

Е. Е. Кулеш¹, И. П. Мартынов², В. М. Печевич³

e-mail: ¹kulesh@grsu.by, ²martynov@grsu.by, ³pecevich@mail.ru

В данной работе исследуется одно дифференциальное уравнение в частных производных шестого порядка на наличие свойства Пенлеве. Это свойство стало широко используемым критерием полной интегрируемости дифференциальных уравнений в частных производных, которые точно разрешимы методом обратной задачи рассеяния или линеаризацией через преобразование переменных. Свойство Пенлеве служит основой классификации и приведения к каноническому виду нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных подобно тому, как это свойство позволяет классифицировать обыкновенные дифференциальные уравнения. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных выше третьего порядка по свойству Пенлеве еще далека от своего завершения. Это связано с тем, что известные методы исследования дают в основном лишь необходимые условия.

Для доказательства достаточности наличия свойства Пенлеве можно, например, свести исследуемое уравнение подходящей заменой к уравнению, наличие свойства Пенлеве для которого уже установлено. Поэтому особый интерес представляют методы, позволяющие строить уравнения, априори имеющие свойство Пенлеве. Во введении приводится известное в литературе определение свойства Пенлеве для дифференциального уравнения в частных производных, а также описание основного метода исследования — метода резонансов.

В основной части исследована резонансная структура исследуемого уравнения, проверено выполнение необходимых условий наличия свойства Пенлеве. Для достижения поставленной цели решены задачи построения рядов, представляющих решение дифференциального уравнения в частных производных шестого порядка, содержащих шесть произвольных функций. Найдены слагаемые меньшего веса, при наличии которых для уравнения будет выполнено необходимое условие наличия свойства Пенлеве. Найдена подстановка, линеаризующая полученное уравнение. Построены рациональные относительно функции решения по отрицательным резонансам.

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение в частных производных; свойство Пенлеве; метод резонансов; резонансные коэффициенты; ряд; рациональное решение.*

ON THE PAINLEVE PROPERTY FOR A PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION OF THE SIXTH ORDER

E. E. Kulesh¹, I. P. Martynov², V. M. Pecevich³

e-mail: ¹kulesh@grsu.by, ²martynov@grsu.by, ³pecevich@mail.ru

It is considered the presence of the Painleve property for a partial differential equation of the sixth order. This property became a widely used criteria for the complete integrability of partial differential equations, which are completely solvable by the method of the inverse scattering problem or by the linearization through a transform of variables. The Painleve property is the basis of classification and reduction of nonlinear partial differential equations to canonical form, like this property allows to classify ordinary differential equations. Classification of partial differential equations of the order greater than three with Painleve property is still far from completeness. This is due to the fact that the known methods of research give generally only necessary conditions for the existence of the Painleve property.

To prove sufficiency, one can try, for example, to reduce the investigated equation is a suitable substitute to the equation, the presence of Painleve properties for which you have already installed. Therefore, of particular interest get methods that allow to build the equations, a priori having the Painleve property. In the introduction it is given the definition of the Painleve property for partial differential equation known in the literature and describing the main method of research — method of the resonances.

In the main part, it is investigated resonant structure, proven the fulfillment of the necessary conditions for the presence of the Painleve properties of the studied equations. To achieve this goal it is solved the problem of constructing of the series representing of the solution to the partial differential equation of the sixth order, containing six arbitrary functions. Terms of the smallest weight are found, under which the equation satisfies the necessary condition for the existence of the Painleve properties. Suitable substitution is found, which reduces the considered equation to the linear equation. Solutions which are rational with respect to a function and related to negative resonance are constructed.

Keywords: *partial differential equation; Painleve property; method resonance; resonance coefficients; series; rational solution.*

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 35G20, Secondary 34M55, 34A25.

1. Введение

Дифференциальные уравнения в частных производных описывают многие физические явления и процессы, такие как задачи о нелинейных волнах, описание волновых процессов, возникающих при стекании тонкого слоя жидкости по наклонной плоскости, процессы турбулентности, волны дрейфа в плазме, проблемы взаимодействия волн большой амплитуды, возникающие в физике плазмы, нелинейной оптике, физике ферромагнетиков и в других разделах физики. Решение современных физических задач требует как можно более точно передать физическую природу исследуемого объекта, что непременно ведет к усложнению математической модели и увеличению порядка входящих в нее уравнений.

Решения обыкновенных дифференциальных уравнений могут содержать особые точки различного характера. В работах Пенлеве и его учеников были получены важные результаты по проблеме отсутствия в решениях обыкновенных дифференциальных уравнений подвижных критических особых точек. Это свойство дифференциальных уравнений называют теперь свойством Пенлеве.

В последние десятилетия внимание многих математиков привлекают задачи выделения уравнений и систем со свойством Пенлеве, изучения свойств их решений, построения специальных классов решений, преобразований Беклунда и т.д.

Широко используется гипотеза Абловица о том, что все редукции к обыкновенным дифференциальным уравнениям полностью интегрируемых дифференциальных уравнений в частных производных обязательно обладают свойством Пенлеве (возможно после замены переменных). Однако эта гипотеза требует проверки на свойство Пенлеве всех редукций к ОДУ, что не всегда удобно. Вейсс, Табор и Карневале ввели понятие свойства Пенлеве для дифференциальных уравнений в частных производных и применили тест Пенлеве непосредственно для дифференциальных уравнений в частных производных без приведения их к ОДУ [1].

О п р е д е л е н и е 1.1. Дифференциальное уравнение в частных производных имеет *свойство Пенлеве*, если все подвижные особенности его общего решения, если они существуют, являются полярными [2].

В отличие от функции одной комплексной переменной, особенности функции многих комплексных переменных не могут быть изолированными. В случае двух комплексных переменных x, t особенности возникают вдоль аналитических многообразий Φ , заданных уравнением $\varphi(x, t) = 0$. Если особое многообразие Φ является полярным для решения дифференциального

уравнения в частных производных, то в окрестности этого многообразия имеет место представление решения в виде ряда Лорана, содержащее конечное число слагаемых с отрицательными степенями, т.е. в виде ряда

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \varphi^{k-s}. \quad (1)$$

Для исследования дифференциального уравнения в частных производных n -го порядка на наличие свойства Пенлеве используется метод резонансов (его также называют тест Пенлеве или сингулярный анализ). В исследуемое уравнение подставляют ряд (1) где $u_0 = u_0(x, t) \neq 0$, $u_k = u_k(x, t)$ — аналитические функции в окрестности Φ , $s \in \mathbb{Z}$, $s \neq 0$. Если разложение (1) является локальным представлением общего решения, оно будет иметь n произвольных функций. Разложение (1) будет иметь определенные значения $k = r$, называемые резонансными числами (резонансами), при которых соответствующие $u_r(x, t)$ должны быть произвольными. Один резонанс всегда возникает при $k = -1$ и соответствует произвольности самой функции $\varphi(x, t)$, а позиции других резонансов определяются видом нелинейности исследуемого уравнения. Уравнение может иметь разные доминантные степени s в (1), каждая из которых будет иметь свою собственную резонансную структуру. Необходимо чтобы при каждом значении s резонансные функции оставались произвольными. Это необходимое условие будем называть *необходимым условием А*.

Проверка необходимого условия А часто связана с громоздкими вычислениями. Можно считать $\varphi(x, t) = x - \gamma(t)$, поскольку потеря общности не влияет на резонансную структуру уравнения. Теорема существования неявной функции утверждает, что вблизи поверхности Φ функция $\varphi(x, t)$ может быть представлена в виде $\varphi(x, t) = x - \gamma(t)$, где $\varphi(\gamma(t), t) = 0$ при условии, что $\varphi_x(x, t) \neq 0$ на поверхности Φ . Тогда $\varphi_x = 1$. Заменяя x на $\gamma(t)$ в коэффициентах $u_k(x, t)$ и переразложив ряд (1), получим ряд по степеням φ с коэффициентами, зависящими только от t .

Необходимым условием В наличия свойства Пенлеве для дифференциального уравнения с частными производными n -го порядка будем называть произвольность функции φ и $n - 1$ резонансных коэффициентов u_{r_i} , $i = \overline{1, n - 1}$, ряда (1), представляющего решение дифференциального уравнения в частных производных где $\varphi_x = 1$, $u_k = u_k(t)$. Следует отметить, что, тем не менее, проверка необходимого условия А дает более полную информацию о свойствах решений уравнения, позволяет установить некоторые свойства решений, построить специальные решения, иерархии решений, преобразования Бэклунда и т. д.

Классификация дифференциальных уравнений в частных производных n -го порядка по свойству Пенлеве при $n \geq 3$ еще далека от своего завершения. Это связано с тем, что известные методы исследования дают в основном лишь необходимые условия наличия свойства Пенлеве. Для доказательства их достаточности можно, например, свести исследуемое уравнение подходящей заменой к уравнению, наличие свойства Пенлеве для которого уже установлено. Поэтому особый интерес представляют методы, позволяющие строить уравнения, имеющие свойство Пенлеве.

В работе [3] получены 7 обыкновенных дифференциальных уравнений пятого порядка со свойством Пенлеве. В рамках решения задачи классификации дифференциальных уравнений в частных производных шестого порядка по свойству Пенлеве будем строить на основе этих ОДУ дифференциальные уравнения в частных производных и исследовать их на наличие свойства Пенлеве. В работах [4, 5] исследованы два из них.

2. Резонансная структура уравнения

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y^{(5)} + 5yy^{(4)} + 15y'y''' + 10y^2y''' + 10y''^2 + 50yy'y'' + 10y^3y'' + 15y'^3 + 30y^2y'^2 + 5y^4y' = 0.$$

Построим на его основе дифференциальное уравнение в частных производных

$$\begin{aligned}
& (w_{xxxxx} + 5ww_{xxx} + 15w_x w_{xxx} + 10w^2 w_{xxx} + 10w_{xx}^2 + 50w w_x w_{xx} + 10w^3 w_{xx} + \\
& \quad + 15w_x^3 + 30w^2 w_x^2 + 5w^4 w_x)_x = F, \\
& F = A_1 w_{xxxxx} + A_2 w_{xxxxt} + A_3 w_{xxxxt} + A_4 w_{xxttt} + A_5 w_{xtttt} + A_6 w_{ttttt} + \\
& \quad + w(B_1 w_{xxxx} + B_2 w_{xxxxt} + B_3 w_{xxttt} + B_4 w_{xttt} + B_5 w_{tttt}) + w^2(C_1 w_{xxx} + \\
& \quad + C_2 w_{xxt} + C_3 w_{xtt} + C_4 w_{ttt}) + w_x(D_1 w_{xxx} + D_2 w_{xxt} + D_3 w_{xtt} + D_4 w_{ttt}) + \\
& \quad + w_t(D_5 w_{xxx} + D_6 w_{xxt} + D_7 w_{xtt} + D_8 w_{ttt}) + E_1 w_{xx}^2 + E_2 w_{xt}^2 + E_3 w_{tt}^2 + \\
& \quad + E_4 w_{xx} w_{xt} + E_5 w_{xx} w_{tt} + E_6 w_{xt} w_{tt} + w w_x(G_1 w_{xx} + G_2 w_{xt} + G_3 w_{tt}) + \\
& \quad + w w_t(G_4 w_{xx} + G_5 w_{xt} + G_6 w_{tt}) + w^3(J_1 w_{xx} + J_2 w_{xt} + J_3 w_{tt}) + \\
& \quad + K_1 w_x^3 + K_2 w_x^2 w_t + K_3 w_x w_t^2 + K_4 w_t^3 + w^2(L_1 w_x^2 + L_2 w_x w_t + L_3 w_t^2) + \\
& \quad + w^4(M_1 w_x + M_2 w_t) + N w^6 + O_1 w_{xxxx} + O_2 w_{xxxxt} + O_3 w_{xxttt} + O_4 w_{xttt} + O_5 w_{tttt} + \\
& \quad + w(P_1 w_{xxx} + P_2 w_{xxt} + P_3 w_{xtt} + P_4 w_{ttt}) + w_x(Q_1 w_{xx} + Q_2 w_{xt} + Q_3 w_{tt}) + \\
& \quad + w_t(R_1 w_{xx} + R_2 w_{xt} + R_3 w_{tt}) + w^2(S_1 w_{xx} + S_2 w_{xt} + S_3 w_{tt}) + \\
& \quad + w(T_1 w_x^2 + T_2 w_x w_t + T_3 w_t^2) + w^3(U_1 w_x + U_2 w_t) + U_3 w^5 + \\
& \quad + V_1 w_{xxx} + V_2 w_{xxt} + V_3 w_{xtt} + V_4 w_{ttt} + w(W_1 w_{xx} + W_2 w_{xt} + W_3 w_{tt}) + \\
& \quad + X_1 w_x^2 + X_2 w_x w_t + X_3 w_t^2 + w^2(X_4 w_x + X_5 w_t) + X_6 w^4 + Y_1 w_{xx} + Y_2 w_{xt} + \\
& \quad + Y_3 w_{tt} + Y_4 w^3 + w(Y_5 w_x + Y_6 w_t) + Z_1 w_x + Z_2 w_t + Z_3 w^2 + Z_4 w + Z_5,
\end{aligned} \tag{2}$$

где $w = w(x, t)$, F содержит слагаемые меньшего веса с производными по x и t с аналитическими коэффициентами от x, t . Ставится задача исследовать уравнение (2) на наличие свойства Пенлеве и исследовать некоторые аналитические свойства его решений.

Теорема 2.1. *Для уравнения (2) при $F = 0$ выполнено необходимое условие В наличия свойства Пенлеве.*

Доказательство. Применим метод резонансов. Будем искать решение уравнения (2) при $F = 0$ в виде ряда

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \varphi^{k-1}, \tag{3}$$

где $\varphi = \varphi(x, t)$, $\varphi_x = 1$, $u_k = u_k(t)$. Приравнявая коэффициенты при φ^{-7} , получим уравнение для определения u_0

$$u_0(u_0 - 1)(u_0 - 2)(u_0 - 3)(u_0 - 4) = 0. \tag{4}$$

Приравнявая коэффициенты при φ^{r-7} , получим уравнение для определения резонансных чисел

$$\begin{aligned}
& (r - 5)(r - 6)(r^4 + (5u_0 - 10)r^3 + (10u_0^2 - 40u_0 + 35)r^2 + (10u_0^3 - 60u_0^2 + \\
& \quad + 105u_0 - 50)r + 5u_0^4 - 40u_0^3 + 105u_0^2 - 100u_0 + 24) = 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Решая систему (4), (5), определим резонансную структуру уравнения (2) (u_0 ; $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$). Получим следующие наборы: (1; -1, 1, 2, 3, 5, 6), (2; -1, -2, 1, 2, 5, 6), (3; -1, -2, -3, 1, 5, 6), (4; -1, -2, -3, -4, 5, 6).

Приравнявая коэффициенты при $\varphi^{-6}, \dots, \varphi^{-4}$ получим условия:

$$u_1 u_0 (u_0 - 1)(u_0 - 2)(u_0 - 3) = 0; \tag{6}$$

$$u_0 (u_0 - 1)(u_0 - 2)(u_0 u_2 + 2u_1^2 - u_2) = 0; \tag{7}$$

$$u_0 (u_0 - 1)(u_0^2 u_3 + 4u_0 u_1 u_2 + 2u_1^3 - u_0 u_3 - 2u_1 u_2 + 2u_3) = 0. \tag{8}$$

При $u_0 = 1$ резонансные условия (6)–(8) выполнены. Значит резонансные коэффициенты u_1, u_2, u_3 являются произвольными. При $u_0 = 2$ резонансные условия (6), (7) выполнены. Значит резонансные коэффициенты u_1, u_2 являются произвольными. При $u_0 = 3$ резонансное условие (6) выполнено. Значит резонансный коэффициент u_1 является произвольным. Коэффициенты при φ^{-2} и φ^{-1} равны 0. Значит, резонансные условия, отвечающее произвольности u_5 и u_6 выполнены автоматически при любом u_0 . Таким образом, для всех резонансных наборов

резонансные коэффициенты ряда (3) и φ_t действительно являются произвольными функциями от t . Теорема доказана.

Далее подберем коэффициенты правой части уравнения (2) так, чтобы резонансные коэффициенты ряда (3) и функция φ_t оставались произвольными.

Теорема 2.2. *Если уравнение (2) имеет вид*

$$\begin{aligned}
& w_{xxxxx} + 5w_{xxxxx} + 20w_x w_{xxxx} + 10w^2 w_{xxx} + 35w_{xx} w_{xxx} + 70w w_x w_{xxx} + \\
& + 10w^3 w_{xx} + 90w^2 w_x w_{xx} + 95w_x^2 w_{xx} + 5w^4 w_{xx} + 50w w_x^2 + 60w w_x^3 + 20w^3 w_x^2 = \\
& = Aw_{xxxxx} + 4Aw_{xxxx} + Bw_{xxx} + 14Aw_x w_{xxx} + 6Aw^2 w_{xxx} + (2A_x + 3B)w w_{xxx} + \\
& + Cw_{xxx} + 10Aw_{xx}^2 + (9B + 2A_x)w_x w_{xx} + 36Aw w_x w_{xx} + 4Aw^3 w_{xx} + \\
& + (6A_x + 3B)w^2 w_{xx} + (-2A_{xx} + 2B_x + 2C)w w_{xx} + Dw_{xx} + Ew_{xt} + \\
& + 12Aw_x^3 + (-6A_{xx} + 6B_x)w^2 w_x + (6A_{xxx} - 5B_{xx} + 4C_x)w w_x + 8A_x w^3 w_x + \\
& + 12Aw_x^2 w^2 + (12A_x + 6B)w w_x^2 + (2C - 3A_{xx} + 2B_x)w_x^2 + \\
& + (-5A_{xxxx} + 4B_{xxx} - 3C_{xx} + 2D_x)w_x + 2E_x w_t + A_{xx} w^4 + (-2A_{xxx} + B_{xx})w^3 + \\
& + (3A_{xxxx} - 2B_{xxx} + C_{xx})w^2 + (-4A_{xxxxx} + 3B_{xxxx} - 2C_{xxx} + D_{xx})w + G,
\end{aligned} \tag{9}$$

где $A, B, \dots, G$ — аналитические функции от (x, t) , $E_{xx} = 0$, то для него выполнено необходимое условие в наличия свойства Пенлеве.

Доказательство. Выполним в уравнении (2) преобразование

$$w = f_x u(\xi, t), \quad \xi = f(x, t),$$

получим для u уравнение аналогичное (2) с новыми коэффициентами $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, \dots, \widetilde{Z}_5$. При этом $\widetilde{A}_1 = \frac{1}{f_x^2}(21f_{xx} - A_1 f_x)$, $\widetilde{B}_1 = \frac{1}{f_x^2}(95f_{xx} - B_1 f_x)$. Функцию f выберем таким образом, чтобы выполнялось условие $f_{xx} = \frac{f_x}{11}(B_1 - 4A_1)$. Тогда получим $\widetilde{B}_1 = 4\widetilde{A}_1$. Таким образом, в старых обозначениях можно рассматривать уравнение (2), считая $B_1 = 4A_1$.

Разложим каждый коэффициент правой части в ряд по степеням φ , например

$$A_1 = A_{10} + A_{11}\varphi + A_{12}\varphi^2 + A_{13}\varphi^3 + \dots, \quad A_{1k} = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k A_1}{\partial x^k} \Big|_{\varphi=0}.$$

Подставляя ряд (3) в уравнение (2) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях φ , найдем нерезонансные коэффициенты и резонансные условия. Подберем коэффициенты правой части так, чтобы все резонансные условия были выполнены. Первое резонансное условие, отвечающее произвольности u_1 , имеет вид

$$120A_{60}\varphi_t^5 + g_1 = 0, \tag{10}$$

где g_1 не содержит слагаемых с φ_t^5 . Так как функция φ_t должна быть произвольной, то для выполнения резонансного условия (10) необходимо требовать $A_{60} \equiv 0$. Так как $A_{60} = A_6|_{\varphi=0}$, где функция $\varphi = x + \gamma(t)$, а $\gamma(t)$ — произвольная, то $A_6 = 0$. Тогда первое резонансное условие примет вид

$$(24B_{50} + 4E_{30} + 6D_{80} - 120A_{50})\varphi_t^4 + g_2 = 0,$$

где g_2 не содержит слагаемых с φ_t^4 . Чтобы функция φ_t была произвольной, необходимо требовать $24B_{50} + 4E_{30} + 6D_{80} - 120A_{50} = 0$, откуда найдем $E_3 = 30A_5 - 6B_5 - \frac{3}{2}D_8$.

Продолжая этот процесс и подбирая коэффициенты так, чтобы все резонансные условия были выполнены, с учетом обозначений

$$A_1 = A, O_1 = B, V_1 = C, Y_1 = D, Y_2 = E, Z_5 = G$$

приведем уравнение (2) к виду (9). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2.1. В работе [6] приведен частный случай теоремы 2.2. когда коэффициенты уравнения (2) зависят только от t .

Теорема 2.3. Для уравнения (9) выполнено необходимое условие А наличия свойства Пенлеве.

Доказательство. Будем искать решение уравнения (9) в виде ряда (3), где $\varphi = \varphi(x, t)$, $\varphi_x \neq 1$, $u_k = u_k(x, t)$. В этом случае первый коэффициент $u_0 = k\varphi_x$, $k = \overline{1, 4}$. Пусть $u_0 = \varphi_x$. Найдем нерезонансный коэффициент u_4 . Первое резонансное условие, отвечающее произвольности u_1 , имеет вид

$$20\varphi_x^2 u_0(u_0 - \varphi_x)(u_0 - 2\varphi_x)(u_0 - 3\varphi_x)u_1 + 4(60\varphi_x^5 u_0 - 11\varphi_x^4 u_0^2 + 60\varphi_x^3 u_0^3 - \varphi_x^2 u_0^4)A_0 - (360\varphi_x^4 u_0 - 510\varphi_x^3 u_0^2 + 215\varphi_x^2 u_0^3 - 30\varphi_x u_0^4 + u_0^5)\varphi_{xx} - 2(72\varphi_x^5 - 240\varphi_x^4 u_0 + 205\varphi_x^3 u_0^2 - 60\varphi_x^2 u_0^3 + 5\varphi_x u_0^4)u_{0x} = 0$$

и выполняется с учетом вида u_0 . Аналогично убеждаемся, что выполнены резонансные условия, отвечающие произвольности u_2, u_3, u_5, u_6 . Так же проверяем выполнение резонансных условий при $u_0 = k\varphi_x, k = \overline{2, 4}$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.3. позволяет исследовать некоторые свойства решений уравнения (9).

Теорема 2.4. Функция $w = \frac{\varphi_x}{\varphi}$, где φ удовлетворяет условию

$$\varphi_{xxxxx} = A\varphi_{xxxx} + (B - 2A_x)\varphi_{xxx} + (C - 2B_x + 3A_{xx})\varphi_{xx} + (D - 2C_x + 3B_{xx} - 4A_{xxx})\varphi_x + \varphi_t E, \quad (11)$$

является решением уравнения (9) при $G = 0$.

Доказательство. Введем ограничения на коэффициенты ряда (3) и функцию φ . Пусть $u_0 = \varphi_x, u_1 = u_2 = u_3 = u_5 = u_6 = 0$. При этом u_4 примет вид

$$u_4 = \frac{1}{30\varphi_x^4}(-\varphi_{xxxxx} + A_0\varphi_{xxxx} + (B_0 - 2A_1)\varphi_{xxx} + (C_0 - 2B_1 + 6A_2)\varphi_{xx} + (D_0 - 2C_1 + 6B_2 - 24A_3)\varphi_x + \varphi_t E_0).$$

Функцию φ выберем таким образом, чтобы коэффициент u_4 также был равен нулю. Тогда φ должно удовлетворять (11). Таким образом, $u_k = 0, k = \overline{1, 6}$. Можно убедиться, что при этом также получим $u_k = 0, k = 7, 8, \dots$. Значит ряд (3) примет вид $w = \frac{\varphi_x}{\varphi}$. Теорема доказана.

Теорема 2.5. Уравнение (9) приводится к линейному дифференциальному уравнению в частных производных

$$v_{xxxxx} = Av_{xxxx} + (B - 2A_x)v_{xxx} + (C - 2B_x + 3A_{xx})v_{xx} + (D - 2C_x + 3B_{xx} - 4A_{xxx})v_x + E v_t + H v, H_{xx} = G. \quad (12)$$

Доказательство. Выполнив в уравнении (9) замену $w = \frac{v_x}{v}$, где $v = v(x, t)$, приведем его к виду

$$\begin{aligned} & \frac{v_{xxxxxx}}{v} - \frac{2v_{xxxxx}v_x + v_{xxxx}v_{xx}}{v^2} + \frac{2v_{xxxx}v_x^2}{v^3} = A\left(\frac{v_{xxxxx}}{v} - \frac{2v_{xxxxx}v_x + v_{xxxx}v_{xx}}{v^2} + \frac{2v_{xxxx}v_x^2}{v^3}\right) + B\left(\frac{v_{xxxx}}{v} - \frac{2v_{xxxx}v_x + v_{xxx}v_{xx}}{v^2} + \frac{2v_{xxx}v_x^2}{v^3}\right) + \\ & A_x\left(\frac{2v_{xxxx}v_x + 2v_{xxx}v_{xx}}{v^2} - \frac{4v_{xxx}v_x^2}{v^3}\right) + C\left(\frac{v_{xxx}}{v} - \frac{2v_{xxx}v_x + v_{xx}^2}{v^2} + \frac{2v_{xx}v_x^2}{v^3}\right) + D\left(\frac{v_{xx}}{v} - \frac{3v_{xx}v_x}{v^2} + \frac{2v_x^3}{v^3}\right) + \\ & + E\left(\frac{v_{xxt}}{v} - \frac{2v_{xt}v_x + v_{xx}v_t}{v^2} + \frac{2v_x^2v_t}{v^3}\right) - A_{xx}\left(\frac{2v_{xxx}v_x + 3v_{xx}^2}{v^2} - \frac{6v_{xx}v_x^2}{v^3}\right) + \\ & + A_{xxx}\left(\frac{6v_{xx}v_x}{v^2} - \frac{8v_x^3}{v^3}\right) + B_x\left(\frac{2v_{xxx}v_x + 2v_{xx}^2}{v^2} - \frac{4v_{xx}v_x^2}{v^3}\right) - \\ & - B_{xx}\left(\frac{5v_{xx}v_x}{v^2} - \frac{6v_x^3}{v^3}\right) + C_x\left(\frac{4v_{xx}v_x}{v^2} - \frac{4v_x^3}{v^3}\right) - A_{xxx}\left(\frac{5v_{xx}}{v} - \frac{8v_x^2}{v^2}\right) + \\ & + B_{xxx}\left(\frac{4v_{xx}}{v} - \frac{6v_x^2}{v^2}\right) - C_{xx}\left(\frac{3v_{xx}}{v} + \frac{4v_x^2}{v^2}\right) + D_x\left(\frac{2v_{xx}}{v} - \frac{2v_x^2}{v^2}\right) + \\ & + E_x\left(\frac{2v_{xt}}{v} - \frac{2v_xv_t}{v^2}\right) - A_{xxxx}\frac{4v_x}{v} + B_{xxxx}\frac{3v_x}{v} - C_{xxx}\frac{2v_x}{v} + D_{xx}\frac{v_x}{v} + G. \end{aligned} \quad (13)$$

Проинтегрировав уравнение (13) два раза по x и умножив на v , получим (12). Теорема доказана.

Построим рациональные относительно φ решения уравнения (9), отвечающие отрицательным резонансам.

Теорема 2.6. Пусть $\varphi = \varphi(x, t)$, $\varphi_x = 1$, $E_x = G = 0$, $h, g, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, i = \overline{1, 4}$ – функции от t .

1) Если $3A_{xx} - 2B_x + C = \alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1$, $2A_{xxx} - B_{xx} + D = \alpha_2 x + \beta_2$, то функция $w = \frac{2\varphi}{\varphi^2 - h}$, где $\varphi_t = \frac{\beta_1 - \beta_2}{E}$, h удовлетворяет уравнению $Eh_t + 2(3\alpha_1 - \alpha_2)h - 2\gamma_1 = 0$, является решением уравнения (9), отвечающим $u_0 = 2, r = -2$.

2) Если $2A_x - B = \alpha_1 x$, $A_{xx} - C = \alpha_2 x^2 + \beta_2$, $D = -\alpha_2 x + \beta_3$, то функция $w = \frac{3\varphi^2 - h}{\varphi(\varphi^2 - h)}$, где $\varphi_t = -\frac{\beta_3}{E}$, $h_t = \frac{6(\alpha_1 - \beta_2)}{E}$, является решением уравнения (9), отвечающим $u_0 = 3, r = -2$.

3) Если $2A_x - B = \alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1$, $A_{xx} - C = \alpha_2 x^2 + \beta_2 x + \beta_1$, $D = \alpha_3 x + \beta_3$, то функция $w = \frac{3\varphi^2}{\varphi^3 - h}$, где $\varphi_t = -\frac{\beta_3}{E}$, h удовлетворяет уравнению $Eh_t - 3(2\alpha_2 + \alpha_3)h + 6\gamma_1 = 0$, является решением уравнения (9), отвечающим $u_0 = 3, r = -3$.

4) Если $A = \alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1$, $B = \alpha_2 x^2 + \beta_2 x + \beta_1$, $C = \alpha_3 x^2 + \alpha_2 x + \gamma_3$, $D = -\alpha_3 x + \beta_4$, то функция $w = \frac{4\varphi(\varphi^2 - h)}{\varphi^4 - 2\varphi^2 h + 2h^2 - g}$, где $\varphi_t = -\frac{\alpha_2 + \beta_4}{E}$, $h_t = \frac{6\gamma_3}{E}$, g удовлетворяет уравнению $Eg_t + 8\alpha_3 g - 16\alpha_3 h^2 - 4(5\gamma_3 + 2\beta_2 - 6\alpha_1)h - 24\gamma_1 = 0$, является решением уравнения (9), отвечающим $u_0 = 4, r = -2$.

5) Если $A = \alpha_1 x^2 + \beta_1 x$, $B = \alpha_2 x^2 + \beta_2 x + \gamma_2$, $C = \alpha_3 x^2 + 2\alpha_2 x$, $D = \alpha_4$, то функция $w = \frac{4\varphi^3 - h}{\varphi(\varphi^3 - h)}$, где $\varphi_t = -\frac{2\alpha_2 + \alpha_4}{E}$, $h_t = \frac{24(\gamma_2 - \beta_1)}{E}$, является решением уравнения (9), отвечающим $u_0 = 4, r = -3$.

6) Если $A = \alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1$, $B = \alpha_2 x^2 + \beta_2 x + \beta_1$, $C = \alpha_3 x^2 + \beta_3 x$, $D = \alpha_4 x + \beta_4$, то функция $w = \frac{4\varphi^3}{\varphi^4 - h}$, где $e_t = -\frac{\beta_3 + \beta_4}{E}$, h удовлетворяет уравнению $Eh_t + 4(\alpha_3 - \alpha_4)h - 24\gamma_1 = 0$, является решением уравнения (9), отвечающим $u_0 = 4, r = -4$.

Доказательство. 1) Рассмотрим случай $u_0 = 2, r = -2$. Построим вначале рациональное решение обыкновенного дифференциального уравнения (2) при $F = 0$, где t – параметр. Согласно методике, описанной в [7] получим $w = \frac{2x}{x^2 - h}$, где $h = const$. Будем искать решение уравнения (9) в виде

$$w = \frac{2\varphi}{\varphi^2 - h}, \quad (14)$$

где $\varphi = \varphi(x, t)$, $\varphi_x = 1$, $h = h(t)$. Подставляя (14) в (9) получим

$$\begin{aligned} & -G\varphi^6 + (8A_{xxxx} - 6B_{xxx} + 4C_{xx} - 2D_{xx})\varphi^5 + (4E_x\varphi_t + 3Gh - 22A_{xxxx} + \\ & + 16B_{xxx} - 10C_{xx} + 4D_x)\varphi^4 + ((4D_{xx} - 8C_{xxx} + 12B_{xxxx} - 16A_{xxxx})h - \\ & - 4E\varphi_t - 4E_x h_t + 40A_{xxx} - 28B_{xx} + 16C_x - 4D)\varphi^3 + \\ & + (-3Gh^2 + (12A_{xxxx} - 8B_{xxx} + 4C_{xx})h + 6Eh_t - 36A_{xx} + 24B_x - 12C)\varphi^2 + \\ & + ((8A_{xxxx} - 6B_{xxx} + 4C_{xx} - 2D_{xx})h^2 + (-12E\varphi_t + 4E_x h_t + \\ & + 24A_{xxx} - 20B_{xx} + 16C_x - 12D)h)\varphi + Gh^3 + (-4E_x\varphi_t + \\ & + 10A_{xxxx} - 8B_{xxx} + 6C_{xx} - 4D_x)h^2 + (2Eh_t - 12A_{xx} + 8B_x - 4C)h = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Чтобы (15) выполнялось при всех φ , необходимо, чтобы все коэффициенты при одинаковых степенях φ равнялись нулю. Тогда $G = 0$, а также $4A_{xxxx} - 3B_{xxx} + 2C_{xx} - D_{xx} = 0$. Интегрируя последнее равенство дважды по x , найдем

$$4A_{xxx} - 3B_{xx} + 2C_x - D + (\alpha_2 - 4\alpha_1)x - 2\beta_1 + \beta_2 = 0. \quad (16)$$

С учетом (16) перепишем (15) в виде

$$\begin{aligned} & (4E_x\varphi_t - 6A_{xxxx} + 4B_{xxx} - 2C_{xx})\varphi^4 + (-4E\varphi_t - 4E_x h_t + 24A_{xxx} - 16B_{xx} + \\ & + 8C_x + 8\beta_1 - 4\beta_2)\varphi^3 + ((12A_{xxxx} - 8B_{xxx} + 4C_{xx} + 48\alpha_1 - 12\alpha_2)h + \\ & + 6Eh_t - 36A_{xx} + 24B_x - 12C)\varphi^2 + (-12E\varphi_t + 4E_x h_t - 24A_{xxx} + 16B_{xx} - 8C_x + \\ & + 24\beta_1 - 12\beta_2)h\varphi + (-4E_x\varphi_t - 6A_{xxxx} + 4B_{xxx} - 2C_{xx} + 16\alpha_1 - 4\alpha_2)h^2 + \\ & + (2Eh_t - 12A_{xx} + 8B_x - 4C)h = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Положив в (17) $3A_{xx} - 2B_x + C = \alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1$, $E_x = 0$, приведем его к виду

$$2(E\varphi_t - \beta_1 + \beta_2)\varphi^3 - 3(Eh_t + 2(3\alpha_1 - \alpha_2)h - 2\gamma_1)\varphi^2 + 6(E\varphi_t - \beta_1 + \beta_2)h\varphi - 2(3\alpha_1 - \alpha_2)h^2 - (Eh_t - 2\gamma_1)h = 0.$$

Откуда при $\varphi_t = \frac{\beta_1 - \beta_2}{E}$ получим $(3\varphi^2 + h)(Eh_t + 2(3\alpha_1 - \alpha_2)h - 2\gamma_1) = 0$.

Таким образом, при выполнении условий пункта 1) теоремы функция (14) удовлетворяет уравнению (9). Пункты 2)–6) доказываются аналогично. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2.2. В работе [8] приведен частный случай теоремы 2.6. когда коэффициенты $A, B, \dots, G$ уравнения (9) зависят только от t .

3. Заключение

В работе исследовано дифференциальное уравнение в частных производных шестого порядка на наличие свойства Пенлеве. Исследована резонансная структура уравнения, проверено выполнение необходимых условий А и В наличия свойства Пенлеве. Найдены слагаемые меньшего веса, при присутствии которых для уравнения будет выполнено необходимое условие наличия свойства Пенлеве. Для достижения поставленной цели решены задачи построения рядов, представляющих решение дифференциального уравнения в частных производных шестого порядка, содержащих шесть произвольных функций. Найдена подстановка, линеаризующая полученное уравнение. Построены рациональные относительно функции φ решения по отрицательным резонансам. Результаты работы могут быть использованы в аналитической теории дифференциальных уравнений при исследовании аналогичных вопросов.

Литература

1. Weiss J., Tabor M., Carnevale G. The Painleve property for partial differential equations. *Math. Phys.* Vol. 24, №3 (1983), 522–526.
2. Cosgrove C. Painleve classification of all semilinear partial differential equations of the second order. I. Hyperbolic equations in two independent variables. *Stud. Appl. Math.* Vol. 89 (1993), 1–61.
3. Exton H. On non-linear ordinary differential equations with fixed critical points. *Rendiconti di Matematica.* Vol. 4, №3 (1971), 385–448.
4. Кулеш Е.Е., Мартынов И.П. Об одном дифференциальном уравнении в частных производных шестого порядка *Вестні НАН Беларусі. Сер. Фізіка-матэматычных навук.* No. 1 (2018) 7–19.
5. Кулеш Е.Е., Мартынов И.П. О свойствах решений одного дифференциального уравнения в частных производных шестого порядка. *Вестні ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка.* Т. 8, No. 2 (2018), 19–25.
6. Кулеш Е.Е. О свойстве Пенлеве для одного дифференциального уравнения в частных производных шестого порядка. *Еругинские чтения-2019. XIX Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям: материалы конференции, Могилёв, 14-17 мая 2019 г.: в 2 ч. Ч. 1. Минск: Ин-т математики НАН Беларуси.* (2019), 9–10.
7. Здунек А.Г., Мартынов И.П., Пронько В.А. О рациональных решениях дифференциальных уравнений. *Вестник ГрГУ. Сер.2.* No. 3 (2000), 33–39.
8. Кулеш Е.Е., Пецевич В.М. О рациональных решениях одного дифференциального уравнения в частных производных шестого порядка. *Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (АМАДЕ-2021): материалы 10-го междунар. семинара, Минск, 13-17 сент. 2021 г. / ред. С.В. Rogozin, Минск: Ин-т математики НАН Беларуси.* (2021), 48–49.