УДК 539.3

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ВРАЩАЮЩИХСЯ ПОЛЯРНО-ОРТОТРОПНЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ДИСКОВ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ МЕТОДОМ ЛИУВИЛЛЯ

В. В. Королевич[1], Д.Г. Медведев[2]

e-mail: [1]v.korolevich@mail.ru, [2]medvedev@bsu.by

В статье представлен вывод методом Лиувилля интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода для плоской задачи теории упругости вращающихся анизотропных дисков переменной толщины. Решение полученного интегрального уравнения в общем случае дается методом последовательных приближений.

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение; интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода; метод Лиувилля; полярно-ортотропный диск; радиальное и тангенциальное напряжения; радиальное перемещение; функция напряжений.*

THE INTEGRAL EQUATIONS OF THE PLANE PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY OBTAINED BY LIOUVILLE'S METHOD FOR ROTATING POLAR-ORTHOTROPIC ANNULAR DISKS OF VARIABLE THICKNESS

U. V. Karalevich[1], D.G. Medvedev[2]

e-mail: [1]v.korolevich@mail.ru, [2]medvedev@bsu.by

The paper presents the derivation by the Liouville's method of Volterra integral equations of the second kind for the plane problem of the theory of elasticity for rotating anisotropic disks of variable thickness. In the general case the solutions of these integral equations are obtained by the method of successive approximations.

Keywords: *differential equation; integral equation of Volterra of the 2nd kind; Liouville's method; polar-orthotropic disk; radial and tangential stresses; radial displacement; function of stresses.*

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 35F10,45D05 Secondary 74A15.

1. Введение

На Международной конференции «Аналитические методы анализа и дифференциальные уравнения (AMADE-2009)» в 2009 году докладывались исследования по применению линейных интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода к решению плоской задачи теории упругости для вращающихся полярно-ортотропных кольцевых дисков переменной толщины $h(r)$ [1, 2].

Для 1-й основной задачи теории упругости функция напряжений $\psi(r)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению 2-го порядка:

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{h'(r)}{h(r)}\right)\frac{d\psi}{dr} + \frac{1}{r}\left(\nu_{\theta r}\frac{h'(r)}{h(r)} - \frac{k^2}{r}\right)\psi(r) = -(3+\nu_{\theta r})\,h(r)\,\rho\omega_0^2 r, \tag{1}$$

где $k^2 = \frac{E_\theta}{E_r}$; E_r, E_θ — модули Юнга в радиальном и тангенциальном направлениях соответственно; $\nu_{\theta r}$ — коэффициент Пуассона; ρ — плотность материала диска; ω_0 — угловая скорость вращения диска.

Радиальная $\sigma_r(r)$ и тангенциальная $\sigma_\theta(r)$ компоненты напряжений связаны с функцией напряжений $\psi(r)$ соотношениями [3]:

$$\sigma_r(r) = \frac{\psi(r)}{rh(r)}, \quad \sigma_\theta(r) = \frac{1}{h(r)}\frac{d\psi}{dr} + \rho\omega_0^2 r^2. \tag{2}$$

Из закона Гука для полярно-ортотропного тела найдем выражение для радиального перемещения $u(r)$ через функцию напряжений $\psi(r)$ [4]

$$u(r) = \frac{r}{E_\theta}\left(\sigma_\theta(r) - \nu_{\theta r}\sigma_r(r)\right) = \frac{r}{E_\theta h(r)}\left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{\nu_{\theta r}}{r}\psi(r) + h(r)\rho\omega_0^2 r^2\right). \tag{3}$$

Граничные условия имеют вид:

$$\sigma_r(r_0) = -p_0, \quad \sigma_r(R) = p_1, \tag{4}$$

где r_0 — внутренний, а R — внешний радиусы диска соответственно; p_0- контактное давление на внутреннем контуре диска при его посадке с натягом на вал; p_1 — равномерно распределенная постоянная нагрузка на внешнем контуре.

В работах [1–2] решение дифференциального уравнения (1) сводилось к решению соответствующего линейного интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода для второй производной функции напряжений $\frac{d^2\psi}{dr^2} = \phi^{(1)}(r)$:

$$\phi^{(1)}(r) = \lambda\int\limits_{r_0}^{r} K_1(r,s)\,\phi^{(1)}(s)\,ds + f_1(r), \tag{5}$$

где числовой параметр $\lambda = -1$; $K_1(r,s) = \left[\left(-\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\left(\nu_{\theta r}\frac{h'(r)}{h(r)} - \frac{k^2}{r}\right)(r-s)\right]$ — ядро интегрального уравнения (5); $f_1(r)$ — свободный член интегрального уравнения (2), имеющий вид:

$$f_1(r) = \frac{\partial K_1(r,s)}{\partial s} r_0 h(r_0)\,\sigma_r(r_0) - K_1(r,r_0)\,h(r_0)\,\sigma_\theta(r_0) + \left[K_1(r,r_0)\,r_0^2 h(r_0) - (3+\nu_{\theta r})\,rh(r)\right]\rho\omega_0^2.$$

Получив решение $\phi^{(1)}(r)$ интегрального уравнения (5), для нахождения функции напряжений $\psi(r)$ потребуется дважды интегрировать функцию $\phi^{(1)}(r)$. Операция интегрирования функции $\phi^{(1)}(r)$ может представлять определенные трудности при нахождении аналитического решения для функции напряжений $\psi(r)$. Поэтому для практических расчетов напряженно-деформированного состояния вращающихся анизотропных дисков желательно иметь интегральное уравнение непосредственно для самой функции напряжений $\psi(r)$.

2. Интегральные уравнения Вольтерра 2-го рода плоской задачи теории упругости, полученное методом Лиувилля

Предложеный в 1837 году Ж. Лиувиллем метод, сводящий решение дифференциального уравнения 2-го порядка вида [5]

$$y'' + \left[\lambda^2 - \nu(t)\right]y(t) = 0$$

к линейному интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода для искомой функции $y(t)$:

$$y(t) = \frac{1}{\lambda}\int\limits_{a}^{t} \nu(s)\sin\lambda(t-s)\,y(s)\,ds + C_1\cos\lambda t + C_2\sin\lambda t,$$

где C_1, C_2 — постоянные, определяемые из начальных условий: $y(a) = y_0$ и $y'(a) = y'_0$, может быть успешно применен в решении плоской задачи теории упругости для вращающихся анизотропных дисков.

Введем переменную $x = \frac{r}{r_0}$. Дифференциальное уравнение (1) запишется в виде:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \left(\frac{h'(x)}{h(x)} - \frac{1}{x}\right)\frac{d\psi}{dx} + \left(\nu_{\theta r}\frac{h'(x)}{h(x)} - \frac{k^2}{x}\right)\frac{1}{x}\psi(x) = -(3+\nu_{\theta r})\,h(x)\,\rho\omega_0^2 r_0^3 \cdot x. \qquad (6)$$

Введем новую переменную $t = \ln x$, $x = e^t$, $t \in \left[0, \ln\left(\frac{R}{r_0}\right)\right]$. Преобразуем дифференциальное уравнение (6) к виду:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} - \frac{h'(t)}{h(t)}\frac{d\psi}{dt} + \left(\nu_{\theta r}\frac{h'(t)}{h(t)} - k^2\right)\psi(t) = -(3+\nu_{\theta r})\,h(t)\,\rho\omega_0^2 r_0^3 e^{3t}. \qquad (7)$$

Запишем дифференциальное уравнение (7) так:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} - k^2\psi(t) = \frac{h'(t)}{h(t)}\frac{d\psi}{dt} - \nu_{\theta r}\frac{h'(t)}{h(t)}\psi(t) - (3+\nu_{\theta r})\,\rho\omega_0^2 r_0^3 \cdot h(t)\,e^{3t}, \qquad (8)$$

или в виде:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} - k^2\psi(t) = f_1(t), \qquad (9)$$

где $f_1(t) = \frac{h'(t)}{h(t)}\frac{d\psi}{dt} - \nu_{\theta r}\frac{h'(t)}{h(t)}\psi(t) - (3+\nu_{\theta r})\,\rho\omega_0^2 r_0^3 \cdot h(t)\,e^{3t}$.

Однородное дифференциальное уравнение для функции $\psi_0(t)$ есть:

$$\frac{d^2\psi_o}{dt^2} - k^2\psi_o(t) = 0. \qquad (10)$$

Его решение выражается в гиперболических функциях:

$$\psi_o(t) = C_1 chkt + C_2 shkt, \qquad (11)$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования.

Решение дифференциального уравнения (8) найдем методом вариации постоянных [6, с. 144]:

$$\psi(t) = C_1(t)\,chkt + C_2(t)\,shkt. \qquad (12)$$

Подстановка выражения (12) для функции напряжений $\psi(t)$ в уравнение (9) приводит к следующей системе дифференциальных уравнений для функций $C_1(t), C_2(t)$:

$$\begin{cases} C_1'(t)\,chkt + C_2'(t)\,shkt = 0, \\ kC_1'(t)\,shkt + kC_2'(t)\,chkt = f_1(t). \end{cases} \qquad (13)$$

Решим систему (13) методом Крамера:

$$\begin{cases} C_1'(t) = -\frac{1}{k}f_1(t)\,shkt, \\ C_2'(t) = \frac{1}{k}f_1(t)\,chkt. \end{cases} \qquad (14)$$

Проинтегрируем систему (14). В результате получим:

$$\begin{cases} C_1(t) = -\frac{1}{k}\int\limits_0^t f_1(\tau) shk\tau d\tau + C_1^*, \\ C_2(t) = \frac{1}{k}\int\limits_0^t f_1(\tau) chk\tau d\tau + C_2^*. \end{cases} \qquad (15)$$

Подставим выражения (15) для $C_1(t), C_2(t)$ в формулу (12):

$$\psi(t) = -\frac{1}{k}chkt\int_0^t f_1(\tau)shk\tau d\tau + \frac{1}{k}shkt\int_0^t f_1(\tau)chk\tau d\tau + C_1^* chkt + C_2^* shkt =$$

$$= \frac{1}{k}\int_0^t f_1(\tau)\left[shkt\cdot chk\tau - chkt\cdot shk\tau\right]d\tau + C_1^* chkt + C_2^* shkt \quad \Rightarrow$$

$$\psi(t) = \frac{1}{k}\int_0^t f_1(\tau)\, shk(t-\tau)\, d\tau + C_1^* chkt + C_2^* shkt. \tag{16}$$

Вычисляя интеграл $\int_0^t f_1(\tau)shk(t-\tau)\,d\tau$ и проведя преобразования, получим окончательно линейное интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода для функции напряжений $\psi(t)$:

$$\psi(t) = \lambda_1\int_0^t K_1(t,\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau + f_1^*(t), \tag{17}$$

где $\lambda_1 = \frac{1}{k}$ — числовой параметр;

$K_1(t,\tau) = \left\{\left[\left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)}\right)' + \nu_{\theta r}\left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)}\right)\right]shk(t-\tau) - k\left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)}\right)chk(t-\tau)\right\}$ — ядро интегрального уравнения (17); $f_1^*(t) = C_1^* chkt + C_2^* shkt - \frac{(3+\nu_{\theta r})}{k}\rho\omega_0^2 r_0^3\int_0^t h(\tau)e^{3\tau}shk(t-\tau)\,d\tau$ — свободный член интегрального уравнения (17).

Вторая основная задача теории упругости для вращающегося полярно-ортотропного кольцевого диска переменной толщины $h(r)$ сводится к нахождению решения дифференциального уравнения 2-го порядка для радиального перемещения $u(r)$:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \left(\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{r}\right)\frac{du}{dr} + \left(\nu_{\theta r}\frac{h'(r)}{h(r)} - \frac{k^2}{r}\right)\frac{1}{r}u(r) = -\frac{\left(k^2 - \nu_{\theta r}^2\right)}{E_\theta}\rho\omega_0^2 r \tag{18}$$

с граничными условиями $u(r_9) = U_0, \quad u(R) = U_1,$ (19)

где U_0, U_1 — постоянные смещения на внутреннем и внешнем контурах диска.

Введя безразмерную переменную $x = \frac{r}{r_9}$, запишем уравнение (18) в виде:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(\frac{h'(x)}{h(x)} + \frac{1}{x}\right)\frac{du}{dx} + \left(\nu_{\theta r}\frac{h'(x)}{h(x)} - \frac{k^2}{x}\right)\frac{1}{x}u(x) = -\frac{\left(k^2 - \nu_{\theta r}^2\right)}{E_\theta}\rho\omega_0^2 r_0^3\cdot x. \tag{20}$$

В новой переменной $t = \ln x, \quad x = e^t$ дифференциальное уравнение (20) запишется так:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{h'(t)}{h(t)}\frac{du}{dt} + \left(\nu_{\theta r}\frac{h'(t)}{h(t)} - k^2\right)u(t) = -\frac{\left(k^2 - \nu_{\theta r}^2\right)}{E_\theta}\rho\omega_0^2 r_0^3\cdot e^{3t} \tag{21}$$

или

$$\frac{d^2u}{dt^2} - k^2 u(t) = f_2(t), \tag{22}$$

где $f_2(t) = -\frac{h'(t)}{h(t)}\frac{du}{dt} - \nu_{\theta r}\frac{h'(t)}{h(t)}u(t) - \frac{\left(k^2-\nu_{\theta r}^2\right)}{E_\theta}\rho\omega_0^2 r_0^3\cdot e^{3t}$.

Применяя метод Лиувилля для дифференциального уравнения (22), сведем его к линейному интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода:

$$u(t) = \frac{1}{k}\int_0^t f_2(\tau)\, shk(t-\tau)\, d\tau + C_1^{**} chkt + C_2^{**} shkt. \tag{23}$$

Вычисляя интеграл $\int\limits_0^t f_2(\tau) shk(t-\tau)\,d\tau$ и проведя преобразования, получим окончательно линейное интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода для радиального перемещения $u(t)$:

$$u(t) = \lambda_2 \int\limits_0^t K_2(t,\tau)\,u(\tau)\,d\tau + f_2^*(t)\,, \tag{24}$$

где $\lambda_2 = \frac{1}{k}$ — числовой параметр;

$K_2(t,\tau) = \left\{\left[\left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)}\right)' - \nu_{\theta r}\left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)}\right)\right] \cdot sh(k(t-\tau)) - k\left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)}\right) \cdot ch(k(t-\tau))\right\}$ – ядро интегрального уравнения (24); $f_2^*(t) = C_3 \cdot ch(kt) + C_4 \cdot sh(kt) + \frac{(k^2-\nu_{\theta r}^2)}{(k^2-9)} \frac{\rho\omega_0^2 r_0^3}{E_\theta} e^{3t}$ — свободный член интегрального уравнения (24).

Постоянные интегрирования C_3, C_4 определяются из граничных условий (19).

Используя закон Гука для полярно-ортотропного тела, получим выражения для компонент напряжений $\sigma_r(r), \sigma_\theta(r)$ через радиальное перемещение $u(r)$ [4]:

$$\sigma_r(r) = \frac{E_\theta}{\left(k^2 - \nu_{\theta r}^2\right)}\left(\frac{du}{dr} + \frac{\nu_{\theta r}}{r}u(r)\right), \quad \sigma_\theta(r) = \frac{E_\theta}{\left(k^2 - \nu_{\theta r}^2\right)}\left(\nu_{\theta r}\frac{du}{dr} + \frac{k^2}{r}u(r)\right). \tag{25}$$

Смешанная задача теории упругости для вращающегося полярно-ортотропного кольцевого диска переменной толщины $h(r)$ при граничных условиях, например,

$$u(r_0) = U_0, \quad \sigma_r(R) = p_1, \tag{26}$$

решается как 2-я основная задача теории упругости для радиального перемещения $u(r)$. Постоянные интегрирования будут определяться из граничных условий (26).

3. Решения интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода плоской задачи теории упругости для вращающегося полярно-ортотропного кольцевого диска переменной толщины

Для решения линейных интегральных уравнений (17) и (24) применим метод последовательных приближений [5]:

$$y_m^{(i)}(t) = \lambda_i \int\limits_0^t K_i(t,\tau)\,y_{m-1}^{(i)}(\tau)\,d\tau + f_i(t)\,, \quad \left(i = \overline{1,2}\right) \quad , \tag{27}$$

где $y_m^{(1)}(t) = \psi_m(t)\,,\ y_m^{(2)}(t) = u_m(t)\,,$ индекс m означает номер итерации.

В качестве нулевого приближения примем: $y_0^{(i)}(t) = 0$.

Если $f_i(t)$ непрерывны в $\left[0, \ln\left({R}/{r_0}\right)\right]$, а ядра $K_i(t,\tau)$ непрерывны при $0 \le t \le \ln\left({R}/{r_0}\right)$, $0 \le \tau \le t$, то последовательность $\left\{y_m^{(i)}(t)\right\}$ сходится при $m \to \infty$ к решениям $y^{(i)}(t)$ интегральных уравнений (17) и (24):

$$y^{(i)}(t) = \lim_{m\to\infty} y_m^{(i)}(t)\,.$$

Постоянные интегрирования определяются из граничных условий на каждом шаге итерации.

4. Заключение

Приведенные интегральные уравнения (17) и (24) в форме Лиувилля являются более удобными в практическом применении при решении плоской задачи теории упругости для вращающихся профилированных анизотропных дисков, чем интегральные уравнения Вольтерра 2-го рода (5). Решения интегральных уравнений (17) и (24) позволяют непосредственно находить искомые функции напряжений $\psi(t)$ и радиального перемещения $u(t)$. Данные уравнения можно решать, кроме метода последовательных приближений, также другими аналитическими и численными методами приведенными, например, в справочнике [7].

Литература

1. *Королевич В.В. Интегральные уравнения Вольтерра 2-го рода плоской задачи теории упругости для вращающихся полярно-ортотропных композитных дисков переменной толщины.* Материалы Международной конференции «Аналитические методы анализа и дифференциальные. уравнения (AMADE-2009)», 14-19 сентября 2009 г., Минск. С. 90.

2. *Королевич В.В., Медведев Д.Г. Интегральные уравнения Вольтерра 2-го рода плоской задачи теории упругости для вращающихся полярно-ортотропных дисков переменной толщины.* Вестник Бел. гос. ун-та. Сер.1. Физ. Мат. Информ. №1 (2010), 160–162.

3. *Бурмистров Е.Ф., Маслов Н.М. Напряжения в ортотропных вращающихся дисках переменной толщины. Сб. Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел. Под ред. Е.Ф. Бурмистрова и А.С. Космодамианского.* Вып. 5. Изд.-во Саратовского университета, (1970), 80–86.

4. *Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки.* М.: Физматгиз, 1959.

5. *Краснов М.П., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения: задачи и примеры с подробными решениями.* М.: КомКнига (2007).

6. *Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1976.

7. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие.* Киев: Наукова думка, 1986.