

УДК 536.2:539.3

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ В ТЕПЛОВОМ ПОЛЕ ПРОФИЛИРОВАННОГО КОЛЬЦЕВОГО ПОЛЯРНО-ОРТОТРОПНОГО ДИСКА С УЧЕТОМ ТЕПЛООБМЕНА С ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДОЙ, ПОЛУЧЕННОЕ МЕТОДОМ ЛИУВИЛЛЯ

В. В. Королевич*e-mail:* v.korolevich@mail.ru

Профлированные анизотропные диски используются в различных конструкциях машиностроения и авиастроения. Они часто могут вращаться в интенсивных тепловых полях, как, например, в турбинах. Возникающие температурные напряжения в таких дисках существенно влияют на их прочность. Для расчета температурных напряжений в них сначала необходимо знать распределение температуры в анизотропных дисках. В статье приведен вывод интегрального уравнения стационарной задачи теплопроводности методом Лиувилля. Решение полученного интегрального уравнения в общем случае дается методом последовательных приближений.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение; интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода; метод Лиувилля; полярно-ортотропный диск; температура.

THE INTEGRAL EQUATION OF THE STATIONARY HEAT CONDUCTION PROBLEM OBTAINED BY LIOUVILLE'S METHOD FOR A PROFILED ANNULAR POLAR-ORTHOTROPIC DISK ROTATING IN A THERMAL FIELD TAKING INTO ACCOUNT HEAT EXCHANGE WITH THE ENVIRONMENT.

U. V. Karalevich*e-mail:* v.korolevich@mail.ru

Profiled anisotropic disks are used in various machine-building and aircraft designs. They can often rotate in intense thermal fields as, for example, in turbines. The resulting temperature stresses in such disks significantly affect their strength. You need to know first the temperature distribution in anisotropic disks to calculate the temperature stresses in them. The derivation of the integral equation of stationary heat conduction by the Liouville method is given in this paper. In the general case the solution of the resulting integral equation is given by the method of successive approximations.

Keywords: differential equation; integral equation of Volterra of the 2nd kind; Liouville's method; polar-orthotropic disk; temperature.

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 35F10, 45D05, Secondary 74A15.

1. Введение

При расчете напряженно-деформированного состояния вращающегося профилированного анизотропного диска в тепловом поле важно знать распределение температуры $T(r)$ в нем.

Возникающие в диске температурные напряжения могут существенно влиять на его прочность. В работе [1] было получено обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка для функции температуры $\Theta_0(r) = T(r) - T_0$, где T_0 — температура окружающей среды:

$$\frac{d^2\Theta_0}{dr^2} + \left(\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{r} \right) \frac{d\Theta_0}{dr} - \frac{2H}{\lambda_r h(r)} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{dh}{dr} \right)^2} \cdot \Theta_0(r) = 0, \quad (1)$$

где λ_r — радиальный коэффициент теплопроводности композитного материала диска; H — коэффициент теплоотдачи поверхности диска; $h(r)$ — толщина диска, зависящая от текущего радиуса r .

Теплообмен профилированного полярно-ортотропного кольцевого диска с окружающей средой происходит через оба основания диска, а через боковую поверхность пренебрегается. Внутренних источников тепла в диске не имеется.

Пусть на внутреннем контуре анизотропного диска радиуса r_0 поддерживается постоянная температура T_1 , а на внешнем контуре радиуса R — температура T_2 . Причем $T_0 < T_1 < T_2 < T_{\text{пл}}$, где $T_{\text{пл}}$ — температура плавления материала диска. Тогда граничные условия примут вид:

$$\Theta_0(r_0) = T_1 - T_0, \quad \Theta_0(R) = T_2 - T_0. \quad (2)$$

В работе [1] решение дифференциального уравнения (1) сводилось к решению соответствующего линейного интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода для второй производной функции температуры $\frac{d^2\Theta_0}{dr^2} = \eta_0(r)$:

$$\eta_0(r) = \lambda \int_{r_0}^r K_0(r, s) \eta_0(s) ds + f_0(r), \quad (3)$$

где $\lambda = -1$ — числовой параметр; $K_0(r, s) = \left[\left(\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{r} \right) - \frac{2H}{\lambda_r} \sqrt{\frac{1}{h^2(r)} + \frac{1}{4} \left(\frac{h'(r)}{h(r)} \right)^2} (r - s) \right]$ — ядро интегрального уравнения; $f_0(r) = \frac{\partial K_0(r, s)}{\partial s} \Theta_0(r_0) - K_0(r, r_0) \dot{\Theta}_0(r_0)$ — свободный член интегрального уравнения.

Для нахождения искомой функции температуры $\Theta_0(r)$ приходится дважды интегрировать решение $\eta_0(r)$ интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода. Операция интегрирования функции $\eta_0(r)$ может представлять определенные трудности при нахождении аналитического решения для функции температуры $\Theta_0(r)$. Поэтому для практических расчетов температур во вращающихся в тепловых полях анизотропных дисков желательно иметь интегральное уравнение непосредственно для самой функции температуры $\Theta_0(r)$.

2. Интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода стационарной задачи теплопроводности, полученное методом Лиувилля

Метод Лиувилля позволяет получить интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода для функции температуры $\Theta_0(r)$ [2].

Запишем уравнение (1) в следующем виде:

$$\frac{d^2\Theta_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Theta_0}{dr} + \frac{2H}{\lambda_r h_0} \cdot \frac{1}{r^2} \Theta_0(r) = - \frac{h'(r)}{h(r)} \frac{d\Theta_0}{dr} + \frac{2H}{\lambda_r h_0} \left[\frac{1}{r^2} + h_0 \sqrt{\frac{1}{h^2(r)} + \frac{1}{4} \left(\frac{h'(r)}{h(r)} \right)^2} \right] \Theta_0(r). \quad (4)$$

Введем новую переменную $t = \ln \left(\frac{r}{r_0} \right)$, $t \in \left[0, \ln \left(\frac{R}{r_0} \right) \right]$ и перепишем уравнение (3) в этой переменной:

$$\frac{d^2\Theta_0}{dt^2} + \frac{2H}{\lambda_r h_0} \cdot \Theta_0(t) = - \frac{h'(t)}{h(t)} \frac{d\Theta_0}{dt} + \frac{2H}{\lambda_r h_0} \left[1 + h_0 \sqrt{\frac{r_0^4}{h^2(t)} e^{4t} + \frac{1}{4} \left(\frac{h'(t)}{h(t)} \right)^2} r_0^2 e^{2t} \right] \cdot \Theta_0(t), \quad (5)$$

или

$$\frac{d^2\Theta_0}{dt^2} + \frac{2H}{\lambda_r h_0} \cdot \Theta_0(t) = g(t), \quad (6)$$

$$\text{где } g(t) = -\frac{h'(t)}{h(t)} \frac{d\Theta_0}{dt} + \frac{2H}{\lambda_r h_0} \left[1 + h_0 \sqrt{\frac{r_0^4}{h^2(t)} e^{4t} + \frac{1}{4} \left(\frac{h'(t)}{h(t)} \right)^2 r_0^2 e^{2t}} \right] \cdot \Theta_0(t).$$

Однородное дифференциальное уравнение для функции $\Theta_0^*(t)$ имеет вид:

$$\frac{d^2\Theta_0^*}{dt^2} + \frac{2H}{\lambda_r h_0} \Theta_0^*(t) = 0. \quad (7)$$

Его решение выражается в тригонометрических функциях:

$$\Theta_0^*(t) = C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t, \quad (8)$$

где $\Omega = \sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}$, C_1, C_2 — постоянные интегрирования.

Решение дифференциального уравнения (5) найдем методом вариации постоянных [3, с. 144]:

$$\Theta_0(t) = C_1(t) \cos \Omega t + C_2(t) \sin \Omega t. \quad (9)$$

Подстановка выражения (9) для функции температуры $\Theta_0(t)$ в уравнение (6) приводит к следующей системе дифференциальных уравнений для функций $C_1(t), C_2(t)$:

$$\begin{cases} C_1'(t) \cos \Omega t + C_2'(t) \sin \Omega t = 0, \\ -\Omega C_1'(t) \sin \Omega t + \Omega C_2'(t) \cos \Omega t = g(t). \end{cases} \quad (10)$$

Решим систему (10) методом Крамера:

$$\begin{cases} C_1'(t) = -\frac{1}{\Omega} g(t) \sin \Omega t, \\ C_2'(t) = \frac{1}{\Omega} g(t) \cos \Omega t, \end{cases} \quad (11)$$

Проинтегрируем систему (11). В результате получим:

$$\begin{cases} C_1(t) = -\frac{1}{\Omega} \int_0^t g(\tau) \sin \Omega \tau d\tau + C_1^*, \\ C_2(t) = \frac{1}{\Omega} \int_0^t g(\tau) \cos \Omega \tau d\tau + C_2^*. \end{cases} \quad (12)$$

Подставим выражения (12) для $C_1(t), C_2(t)$ в формулу (9):

$$\Theta_0(t) = -\frac{1}{\Omega} \cos \Omega t \int_0^t g(\tau) \sin \Omega \tau d\tau + \frac{1}{\Omega} \sin \Omega t \int_0^t g(\tau) \cos \Omega \tau d\tau + C_1^* \cos \Omega t + C_2^* \sin \Omega t =$$

$$= \frac{1}{\Omega} \int_0^t g(\tau) (\sin \Omega t \cdot \cos \Omega \tau - \cos \Omega t \cdot \sin \Omega \tau) \cdot d\tau + C_1^* \cos \Omega t + C_2^* \sin \Omega t \Rightarrow$$

$$\Theta_0(t) = \frac{1}{\Omega} \int_0^t g(\tau) \sin \Omega(t - \tau) d\tau + C_1^* \cos \Omega t + C_2^* \sin \Omega t. \quad (13)$$

Вычисляя интеграл $\int_0^t g(\tau) \sin \Omega(t - \tau) d\tau$ и проведя преобразования, получим окончательно линейное интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода для функции температуры $\Theta_0(t)$:

$$\Theta_0(t) = \tilde{\lambda} \int_0^t K(t, \tau) \Theta_0(\tau) d\tau + f(t), \quad (14)$$

где $\tilde{\lambda} = \frac{1}{\Omega}$ - числовой параметр; $K(t, \tau) = \left\{ \left[\left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right)' + \Omega^2 \left(1 + h_0 \sqrt{\frac{r_0^4 e^{4\tau}}{h^2(\tau)} + \frac{1}{4} \left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right)^2 r_0^2 e^{2\tau}} \right) \right] \times \right.$
 $\times \sin \Omega(t - \tau) - \Omega \left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right) \cos \Omega(t - \tau) \Big\}$ — ядро интегрального уравнения (14); $f(t) = C_1^* \cos \Omega t +$
 $+ C_2^{**} \sin \Omega t$ — свободный член интегрального уравнения (14); C_1^*, C_2^{**} — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий (2).

3. Решение интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода стационарной задачи теплопроводности

Для решения линейного интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода для функции температуры $\Omega_0(t)$ (14) применим метод последовательных приближений [2]:

$$\Theta_0^{(m)}(t) = \tilde{\lambda} \int_0^t K(t, \tau) \Theta_0^{(m-1)}(\tau) d\tau + f(t),$$

где индекс m означает номер итерации.

В качестве нулевого приближения положим: $\Theta_0^{(0)}(t) = 0$. В связи с наличием иррациональности в ядре интегрального уравнения вычисления последующих итераций следует проводить численными методами.

Если $f(t)$ непрерывна в $[0, \ln(R/r_0)]$, а ядро $K(t, \tau)$ непрерывно при $0 \leq t \leq \ln(R/r_0)$, $0 \leq \tau \leq t$, то последовательность $\{\Theta_0^{(m)}(t)\}$ сходится при $m \rightarrow \infty$ к решению $\Theta_0(t)$ линейного интегрального уравнения (13):

$$\Theta_0(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \Theta_0^{(m)}(t).$$

Постоянные интегрирования определяются из граничных условий на каждом шаге итерации.

4. Заключение

Приведенное интегральное уравнение (14) в форме Лиувилля является более удобным в практическом применении при решении стационарной задачи теплопроводности для вращающихся в тепловом поле профилированных анизотропных дисков, чем интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода (3). Решение интегрального уравнения (14) позволяют непосредственно находить искомую функцию температуры $\Theta_0(t)$. Данное уравнение можно решать, кроме метода последовательных приближений, также другими аналитическими и численными методами приведенными, например, в справочнике [4].

Литература

1. Королевич В.В. Стационарные температурные поля в анизотропных пластинах переменной толщины с учетом теплообмена с внешней средой. Журнал БГУ. Математика. Информатика. №2 (2018), 58–66.
2. Краснов М.П., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения: задачи и примеры с подробными решениями. М.: КомКнига (2007).
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
4. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. Киев, 1986.