

УДК 517.545+531.2

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Л. А. Хвощинская¹, М. Н. Василевич²*e-mail:* ¹ludmila.ark@gmail.com, ²vasilevich.m@gmail.com

Смешанная задача теории упругости сведена к неоднородной краевой задаче Римана для двух функций с кусочно-постоянной матрицей и шестью особыми точками, для решения которой применен “метод логарифмизации”. Построена каноническая матрица задачи, которая позволила найти решение исходной задачи в замкнутой форме.

Ключевые слова: *проблема Римана, группа монодромии, каноническая матрица, дифференциальное уравнение класса Фукса, “метод логарифмизации”.*

ON ONE METHOD SOLVING SOME PROBLEMS OF ELASTICITY THEORY

L. A. Khvoshchinskaya¹, M. N. Vasilevich²*e-mail:* ¹ludmila.ark@gmail.com, ²vasilevich.m@gmail.com

The mixed problem of elasticity theory is reduced to the nonhomogeneous boundary value problem of Riemann for two functions with a piecewise constant matrix and six singular points, for the solution of which the “logarithm method” is applied. The canonical matrix of the problem is constructed, which allowed to find the solution of the original problem in closed form.

Keywords: *Riemann problem, monodromy group, canonical matrix, Fuchs class differential equation, “logarithmization method”.*

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 30E25, Secondary 30F35, 74B05.

Объект исследования настоящей работы связан с актуальными проблемами теории упругости и гидромеханики, математическими моделями которых служат граничные задачи для различных дифференциальных уравнений: динамических уравнений, уравнений равновесия теории упругости, приближенных уравнений Стокса, а также уравнения Бельтрами.

Важность решения задач определения внутренних характеристик тела по внешним (граничным) воздействиям трудно переоценить. В теории упругости к таким задачам относятся задачи восстановления напряжений или смещений во внутренних точках тела по, соответственно, напряжениям или смещениям в точках поверхности тела. Исследование таких задач ведется с середины 19-го века, но число точных решений в трехмерной постановке очень мало [1]. Соответствующие нестационарные задачи являются еще более сложными и обычно решаются приближенно (например, методом конечных элементов).

При решении так называемых «плоских задач теории упругости» применяются различные методы, начиная с работ Гука, Бернулли, Эйлера, Навье и др. По мере создания более сложных материалов наряду с классическими появлялись и новые методы решения: решения в полиномах и с помощью тригонометрических рядов, методы вариационного исчисления, численные методы решений, метод функций комплексной переменной. Впервые предложенный в работах Г.В. Колосова и Н.И. Мусхелишвили аппарат теории функций комплексного переменного позволил получить точные решения основных задач для достаточно широкого класса областей, в частности, для областей, получаемых при дробно-рациональном отображении круга или его внешности (см., например, работы [2, 3]). Для этого применялись аналитические функции комплексной переменной, представляющие собой напряжения и перемещения и называемые функциями Колосова-Мусхелишвили. Отметим, однако, что способ решения Н.И. Мусхелишвили

исключает возможность рассмотрения областей с граничными точками возврата — каспами, в то время, как моделирование процессов разрушения требует описания точного асимптотического поведения граничных напряжений именно вблизи этих точек.

Постановка задачи. Рассматривается смешанная задача теории упругости, которая после отображения круга на верхнюю полуплоскость записывается в виде

$$\operatorname{Im} F_1(x) = -\operatorname{Re} F_2(x), \quad x \in (-\infty, -\pi/2) \cup (-\psi, 0), \quad (1)$$

$$\operatorname{Im} F_1(x) = \operatorname{Re} F_2(x), \quad x \in (0, \psi) \cup (\pi/2, +\infty), \quad (2)$$

$$\operatorname{Re} F_1(x) = f_1(x), \quad x \in (-\pi/2, \pi/2), \quad (3)$$

$$\operatorname{Im} F_2(x) = f_2(x), \quad x \in (-\infty, -\psi) \cup (\psi, +\infty). \quad (4)$$

Необходимо определить функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$, аналитические в верхней полуплоскости, непрерывно продолжимые на действительную ось и удовлетворяющие условиям (1)–(4) (рис. 1).

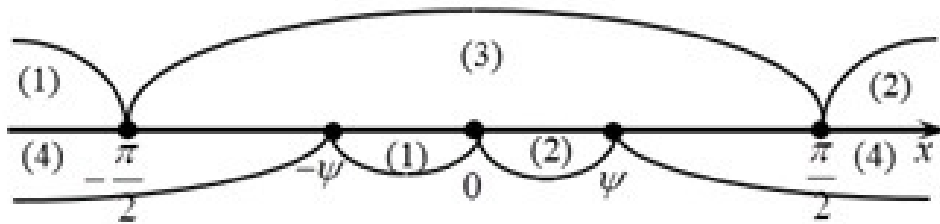


Рис. 1: Условия склейки ветвей многозначных функций F_1, F_2

Решение задачи ищем в классе функций, ограниченных или почти ограниченных (т.е. допускающих логарифмическую особенность) при $z \rightarrow 0$, $z \rightarrow \pm\pi/2$, $z \rightarrow \pm\psi$, $z \rightarrow \pm\infty$.

С помощью формул

$$\operatorname{Re} F = \frac{1}{2} (F + \bar{F}), \quad \operatorname{Im} F = \frac{1}{2i} (F - \bar{F})$$

запишем 6 систем уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x) - \bar{F}_1(x) = -iF_2(x) - i\bar{F}_2(x), \\ F_2(x) - \bar{F}_2(x) = 2if_2(x), \end{cases} \quad x \in l_1,$$

$$\begin{cases} F_1(x) + \bar{F}_1(x) = 2f_1(x), \\ F_2(x) - \bar{F}_2(x) = 2if_2(x), \end{cases} \quad x \in l_2,$$

$$\begin{cases} F_1(x) + \bar{F}_1(x) = 2f_1(x), \\ F_1(x) - \bar{F}_1(x) = -iF_2(x) - i\bar{F}_2(x), \end{cases} \quad x \in l_3,$$

$$\begin{cases} F_1(x) + \bar{F}_1(x) = 2f_1(x), \\ F_1(x) - \bar{F}_1(x) = iF_2(x) + i\bar{F}_2(x), \end{cases} \quad x \in l_4,$$

$$\begin{cases} F_1(x) + \bar{F}_1(x) = 2f_1(x), \\ F_2(x) - \bar{F}_2(x) = 2if_2(x), \end{cases} \quad x \in l_5,$$

$$\begin{cases} F_1(x) - \bar{F}_1(x) = -iF_2(x) - i\bar{F}_2(x), \\ F_2(x) - \bar{F}_2(x) = 2if_2(x), \end{cases} \quad x \in l_6,$$

где $l_1 = (-\infty, -\pi/2)$, $l_2 = (-\pi/2, -\psi)$, $l_3 = (-\psi, 0)$, $l_4 = (0, \psi)$, $l_5 = (\psi, \pi/2)$, $l_6 = (\pi/2, +\infty)$.

Введем две новые неизвестные вектор-функции

$$\Phi^+(z) = (F_1(z), \overline{F_2(\bar{z})}), \quad \Phi^-(z) = (\overline{F_1(\bar{z})}, F_2(z))$$

и перепишем системы в виде

$$\begin{cases} \Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x) = -i\Phi_2^-(x) - i\Phi_2^+(x), \\ \Phi_2^-(x) - \Phi_2^+(x) = 2if_2(x), \end{cases} \quad x \in l_1, \\
 \begin{cases} \Phi_1^+(x) + \Phi_1^-(x) = 2f_1(x), \\ \Phi_2^-(x) - \Phi_2^+(x) = 2if_2(x), \end{cases} \quad x \in l_2, \\
 \begin{cases} \Phi_1^+(x) + \Phi_1^-(x) = 2f_1(x), \\ \Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x) = -i\Phi_2^-(x) - i\Phi_2^+(x), \end{cases} \quad x \in l_3, \\
 \begin{cases} \Phi_1^+(x) + \Phi_1^-(x) = 2f_1(x), \\ \Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x) = i\Phi_2^-(x) + i\Phi_2^+(x), \end{cases} \quad x \in l_4, \\
 \begin{cases} \Phi_1^+(x) + \Phi_1^-(x) = 2f_1(x), \\ \Phi_2^-(x) - \Phi_2^+(x) = 2if_2(x), \end{cases} \quad x \in l_5, \\
 \begin{cases} \Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x) = -i\Phi_2^-(x) - i\Phi_2^+(x), \\ \Phi_2^-(x) - \Phi_2^+(x) = 2if_2(x), \end{cases} \quad x \in l_6,
 \end{cases}$$

или в матричной форме

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1^+(x) \\ \Phi_2^+(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1^-(x) \\ \Phi_2^-(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2if_1(x) \end{pmatrix}, \quad x \in l_1, \\
 \begin{pmatrix} \Phi_1^+(x) \\ \Phi_2^+(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1^-(x) \\ \Phi_2^-(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2f_1(x) \\ -2if_2(x) \end{pmatrix}, \quad x \in l_2, \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1^+(x) \\ \Phi_2^+(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1^-(x) \\ \Phi_2^-(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2f_1(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \in l_3, \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1^+(x) \\ \Phi_2^+(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1^-(x) \\ \Phi_2^-(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2f_1(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \in l_4, \\
 \begin{pmatrix} \Phi_1^+(x) \\ \Phi_2^+(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1^-(x) \\ \Phi_2^-(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2f_1(x) \\ 2if_2(x) \end{pmatrix}, \quad x \in l_5, \\
 \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1^+(x) \\ \Phi_2^+(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1^-(x) \\ \Phi_2^-(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2if_2(x) \end{pmatrix}, \quad x \in l_6.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Выражая из краевых условий (5) функцию $\Phi^+(x) = (\Phi_1^+(x), \Phi_2^+(x))$, приходим к неоднородной краевой задаче Римана с кусочно-постоянной матрицей и шестью особыми точками $-\pi/2, -\psi, 0, \psi, \pi/2, \infty$:

$$\Phi^+(x) = A_k \Phi^-(x) + G_k(x), \quad x \in l_k, \quad k = 1, \dots, 6, \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = A_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2i & -1 \end{pmatrix}, \\
 A_4 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2i & -1 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 G_1(x) &= -2f_1(x) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad G_2(x) = G_5(x) = 2 \begin{pmatrix} f_1(x) \\ -if_2(x) \end{pmatrix}, \quad G_3(x) = 2f_1(x) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \\
 G_4(x) &= 2f_1(x) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad G_6(x) = 2f_2(x) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Произведем замену переменной по формулам $\varsigma = \frac{z-\pi/2}{z+\pi/2}$ ($z = \frac{\pi}{2} \frac{1+\varsigma}{1-\varsigma}$), $t = \frac{x-\pi/2}{x+\pi/2}$ ($x = \frac{\pi}{2} \frac{1+t}{1-t}$) и переведем точки $\pm\pi/2$, $\pm\psi$, 0 , ∞ в точки $-\psi \rightarrow \frac{-\psi-\pi/2}{-\psi+\pi/2} =: a$, $0 \rightarrow -1$, $\psi \rightarrow \frac{\psi-\pi/2}{\psi+\pi/2} =: \frac{1}{a} := a'$, $\frac{\pi}{2} \rightarrow 0$, $\infty \rightarrow 1$, $-\frac{\pi}{2} \rightarrow \infty$.

С помощью новой неизвестной функции

$$\Psi(\varsigma) = \begin{cases} \Phi^+(z), & \text{если } \operatorname{Im} z > 0, \\ A_2 \Phi^-(z), & \text{если } \operatorname{Im} z < 0, \end{cases}$$

ликвидируем «скачок» на интервале $(-\infty, 0)$ комплексной плоскости ς . Функция $\Psi(\varsigma)$ будет аналитической в плоскости с разрезом вдоль луча $(0, +\infty)$, а краевое условие (6) перепишется в виде

$$\Psi^+(t) = B_k \Psi^-(t) + G_k(t), \quad a_k < t < a_{k+1}, \quad k = 1, \dots, 5, \quad (7)$$

где $a_1 = a$, $a_2 = -1$, $a_3 = 1/a = a'$, $a_4 = 0$, $a_5 = 1$, $a_6 = \infty$,

$$B_1 = A_3 A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2i & -1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = A_4 A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2i & -1 \end{pmatrix}, \quad B_3 = A_5 A_2^{-1} = E,$$

$$B_4 = A_6 A_2^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_5 = A_1 A_2^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы решить неоднородную краевую задачу (7), необходимо построить каноническую матрицу $X(\varsigma)$, которая является решением соответствующей однородной краевой задачи [5, 6], т.е.

$$X^+(t) = B_k X^-(t), \quad a_k < t < a_{k+1}, \quad k = 1, \dots, 5. \quad (8)$$

и обладает тремя свойствами:

1. $\det X(z) \neq 0$ для $\forall z \neq a_k$;
2. Столбцы матрицы $X(z)$ принадлежат указанному классу функций;
3. Порядок определителя $X(z)$ на бесконечности равен сумме порядков его столбцов.

Каноническая матрица $X(\varsigma)$ задачи (7) является решением системы дифференциальных уравнений класса Фукса с шестью особыми точками $a_1, \dots, a_6 = \infty$ [7]:

$$\frac{dX}{d\varsigma} = X \sum_{k=1}^5 \frac{U_k}{\varsigma - a_k}, \quad (9)$$

причем матрицы-вычеты U_k подобны матрицам

$$W_k = \frac{1}{2\pi i} \ln B_{k-1} B_k^{-1}, \quad k = 1, \dots, 5, \quad B_0 = B_6 = E,$$

где матрицы $V_k = B_{k-1} B_k^{-1}$, $k = 1, \dots, 6$, $B_0 = B_6 = E$, образуют группу монодромии дифференциального уравнения (9). Отметим, что при умножении матрицы $X(\varsigma)$ справа на диагональную невырожденную матрицу вида $C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$ матрица XC также является канонической матрицей задачи и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d(XC)}{d\varsigma} = (XC) \sum_{k=1}^5 \frac{C^{-1} U_k C}{\varsigma - a_k}. \quad (10)$$

Поэтому матрицы-вычеты уравнения (9) определяются с точностью до преобразования подобия, т.е. это матрицы-вычеты уравнения (10).

Найдем матрицы-вычеты U_k системы (9) «методом логарифмизации произведения матриц» второго порядка [8], в основе которого лежит следующее утверждение.

Утверждение. Пусть V_1, V_2 — постоянные невырожденные матрицы 2-го порядка, $V_3 = V_1 V_2$, α_k, β_k — характеристические числа матриц V_k , $\rho_k = \frac{1}{2\pi i} \ln \alpha_k$, $\sigma_k = \frac{1}{2\pi i} \ln \beta_k$ — характеристические числа матриц $W_k = \frac{1}{2\pi i} \ln V_k$, $k = 1, 2, 3$, причем $|\operatorname{Re}(\sigma_k - \rho_k)| \leq 1$, $k = 1, 2$, $0 < \operatorname{Re}(\sigma_3 - \rho_3) \leq 1$, $\rho_1 + \sigma_1 + \rho_2 + \sigma_2 = \rho_3 + \sigma_3$.

Тогда с точностью до преобразования подобия диагональной матрицей $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ матрица $S_3 = \begin{pmatrix} \rho_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$ представима в виде суммы двух матриц, а именно, в виде

$$S_3 = S_1 + S_2 = \begin{pmatrix} s_1 & d \\ c & s'_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_2 & -d \\ -c & s'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\rho_1 \sigma_1 - (\rho_3 - \rho_2)(\rho_3 - \sigma_2)}{\frac{\rho_2 \sigma_2 - (\rho_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \rho_1)}{c(\sigma_3 - \rho_3)}} & \frac{(\rho_3 - \rho_1)(\sigma_3 - \sigma_1) - \rho_2 \sigma_2}{\frac{\sigma_3 - \rho_3}{\sigma_3 - \rho_3}} c \\ \frac{\rho_2 \sigma_2 - (\rho_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \rho_1)}{c(\sigma_3 - \rho_3)} & \frac{(\sigma_3 - \rho_2)(\sigma_3 - \sigma_2) - \rho_1 \sigma_1}{\sigma_3 - \rho_3} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{\rho_2 \sigma_2 + (\rho_3 - \rho_1)(\rho_3 - \sigma_1)}{\frac{\sigma_3 - \rho_3}{\sigma_3 - \rho_3}} & \frac{\rho_2 \sigma_2 - (\rho_3 - \rho_1)(\sigma_3 - \sigma_1)}{\frac{\sigma_3 - \rho_3}{\sigma_3 - \rho_3}} c \\ \frac{(\rho_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \rho_1) - \rho_2 \sigma_2}{c(\sigma_3 - \rho_3)} & \frac{(\sigma_3 - \rho_1)(\sigma_3 - \sigma_1) - \rho_2 \sigma_2}{\sigma_3 - \rho_3} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где $S_k \sim W_k$, $k = 1, 2$, c — произвольная постоянная.

Если $\rho_3 = \rho_1 + \rho_2$, $\sigma_3 = \sigma_1 + \sigma_2$, т.е. матрицы V_1, V_2 приводятся одним преобразованием подобия к треугольному виду, то $cd = 0$ и имеют место более простые представления матрицы S :

$$\begin{pmatrix} \rho_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 & c \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho_2 & -c \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} \rho_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ c & \sigma_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho_2 & 0 \\ -c & \sigma_2 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицы V_k ($k = 1, \dots, 6$) группы монодромии, их характеристические числа α_k, β_k и характеристические числа $\rho_k = \frac{1}{2\pi i} \ln \alpha_k$, $\sigma_k = \frac{1}{2\pi i} \ln \beta_k$ матриц $W_k = \frac{1}{2\pi i} \ln V_k$, выбирая ветви логарифмов таким образом, чтобы решение было ограниченным в точках a_k ($k = 1, \dots, 5$), а ветви ρ_6 и σ_6 удовлетворяли условию $\sum_{k=1}^5 (\rho_k + \sigma_k) + \rho_6 + \sigma_6 = 0$:

$$V_1 = B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2i & -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = -1, \\ \rho_1 = 0, \quad \sigma_1 = 1/2,$$

$$V_2 = B_1 B_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4i & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \beta_2 = 1, \\ \rho_2 = \sigma_2 = 0,$$

$$V_3 = B_2 B_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2i & -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = 1, \beta_3 = -1, \\ \rho_3 = 0, \sigma_3 = 1/2,$$

$$V_4 = B_3 B_4^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = -1, \beta_4 = 1, \\ \rho_4 = 1/2, \sigma_4 = 0,$$

$$V_5 = B_4 B_5^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_5 = \beta_5 = 1, \\ \rho_5 = \sigma_5 = 0,$$

$$V_6 = B_5 = \begin{pmatrix} -1 & -2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_6 = -1, \beta_6 = 1, \\ \rho_6 = -1/2, \sigma_6 = -1.$$

Матрица $W_6 = \frac{1}{2\pi i} \ln V_6^{-1}$ приводится к диагональной жордановой форме $S = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Представим матрицу S в виде суммы пяти матриц

$$S = \sum_{k=1}^5 S_k = \sum_{k=1}^5 \begin{pmatrix} s_k & d_k \\ c_k & s'_k \end{pmatrix},$$

где $S_k \sim W_k$, $k = 1, \dots, 5$. Для этого запишем произведение матриц $V_6^{-1} = V_1 \cdot V_2 \cdot V_3 \cdot V_4 \cdot V_5$ в виде произведений двух матриц следующим образом:

$$\begin{aligned} V_6^{-1} &= V_1 \cdot (V_2 \cdot V_3 \cdot V_4 \cdot V_5) = V_1 \cdot V_{2345}, \\ V_6^{-1} &= (V_1 \cdot V_2) \cdot (V_3 \cdot V_4 \cdot V_5) = V_{12} \cdot V_{345}, \\ V_6^{-1} &= (V_1 \cdot V_2 \cdot V_3) \cdot (V_4 \cdot V_5) = V_{123} \cdot V_{45}, \\ V_6^{-1} &= (V_1 \cdot V_2 \cdot V_3 \cdot V_4) \cdot V_5 = V_{1234} \cdot V_5. \end{aligned} \quad (12)$$

Применяя для каждого из произведений (12) формулу (11), мы сможем записать несколько представлений матрицы S в виде суммы двух матриц:

$$S = S_1 + S_{2345} = S_{12} + S_{345} = S_{123} + S_{45} = S_{1234} + S_5, \quad (13)$$

где $S_{1\dots i} = \frac{1}{2\pi i} \ln V_{1\dots i}$, $S_{j\dots 5} = \frac{1}{2\pi i} \ln V_{j\dots 5}$, $i = 1, \dots, 4$, $j = 2, \dots, 5$.

Найдем характеристические числа и их логарифмы матриц

$$\begin{aligned} V_{12} &= B_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2i & -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_{12} = 1, \quad \beta_{12} = -1, \\ &\quad \rho_{12} = 0, \quad \sigma_{12} = 1/2, \\ V_{123} &= B_3^{-1} = E, \quad \alpha_{123} = 1, \quad \beta_{123} = 1, \\ &\quad \rho_{123} = 0, \quad \sigma_{123} = 1, \\ V_{1234} &= B_4^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_{1234} = -1, \quad \beta_{1234} = 1, \\ &\quad \rho_{1234} = 1/2, \quad \sigma_{1234} = 1, \\ V_{45} &= B_3 B_5^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_{45} = -1, \quad \beta_{45} = 1, \\ &\quad \rho_{45} = 1/2, \quad \sigma_{45} = 0, \\ V_{345} &= B_2 B_5^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2i \\ 2i & -5 \end{pmatrix}, \quad \alpha_{345} = -(\sqrt{2} + 1)^2, \quad \beta_{345} = -(\sqrt{2} - 1)^2, \\ &\quad \rho_{345} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi i} \ln(\sqrt{2} + 1), \quad \sigma_{345} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi i} \ln(\sqrt{2} + 1), \\ V_{2345} &= B_1 B_5^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2i \\ -2i & 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_{2345} = 1, \quad \beta_{2345} = 1, \\ &\quad \rho_{2345} = 0, \quad \sigma_{2345} = 1, \end{aligned}$$

где ветви логарифмов выбирались из условий

$$\rho_{12} + \sigma_{12} = \rho_1 + \sigma_1 + \rho_2 + \sigma_2 = 1/2, \quad \rho_{123} + \sigma_{123} = \rho_1 + \sigma_1 + \rho_2 + \sigma_2 + \rho_3 + \sigma_3 = 1$$

$$\rho_{1234} + \sigma_{1234} = \rho_1 + \sigma_1 + \rho_2 + \sigma_2 + \rho_3 + \sigma_3 + \rho_4 + \sigma_4 = 3/2 \text{ и т.д.}$$

Чтобы записать первое из представлений (13), мы полагаем в формуле (11) $\rho_3 = 1/2$, $\sigma_3 = 1$, $\rho_1 = 0$, $\sigma_1 = 1/2$, а числа ρ_2 , σ_2 заменяем соответственно на $\rho_{2345} = 0$, $\sigma_{2345} = 1$.

Таким образом мы находим элементы матрицы S_1 :

$$s_1 = \frac{\rho_1 \sigma_1 - (0.5 - \rho_{2345})(0.5 - \sigma_{2345})}{1 - 0.5} = \frac{1}{2}, \quad s'_1 = \rho_1 + \sigma_1 - s_1 = (0 + 0.5) - 0.5 = 0,$$

$$c_1 \cdot d_1 = s_1 \cdot s'_1 - \rho_1 \cdot \sigma_1 = 0 \Rightarrow d_1 = 0,$$

так как матрица B_1 — нижнетреугольная. Следовательно, матрица S_1 имеет вид

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ c/2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ где } c_1 := c/2\text{-произвольная постоянная.}$$

Аналогично находим элементы матрицы $S_{12} = \begin{pmatrix} s_{12} & d_{12} \\ c_{12} & s'_{12} \end{pmatrix}$:

$$s_{12} = 2(\rho_{12}\sigma_{12} - (0.5 - \rho_{345})(0.5 - \sigma_{345})) =$$

$$= -2(0.25 - 0.5(\rho_{345} + \sigma_{345}) + \rho_{345} \cdot \sigma_{345}) = -2(\rho_{345} \cdot \sigma_{345} - 0.25) = (1 - \tau)/2,$$

где введено обозначение

$$\tau = 4\rho_{345} \cdot \sigma_{345} = 1 + \frac{4}{\pi^2} \ln^2(\sqrt{2} + 1),$$

$$s'_{12} = 0.5 - s_{12} = \tau/2, \quad S_{12} = \begin{pmatrix} (1 - \tau)/2 & d_{12} \\ c_{12} & \tau/2 \end{pmatrix},$$

$$c_{12} \cdot d_{12} = s_{12} \cdot s'_{12} - \rho_{12} \cdot \sigma_{12} = \tau(1 - \tau)/4.$$

Из (13) следует, что

$$S_2 = S_{12} - S_1 = S_{2345} - S_{345} = \begin{pmatrix} -\tau/2 & d_{12} \\ c_{12} - c_1 & \tau/2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\det S_2 = 0$, то $\tau^2/4 + (c_{12} - c_1) \cdot d_{12} = 0 \Rightarrow c_1 \cdot d_{12} = \tau/4 \Rightarrow d_{12} = \tau/2c$ и

$$S_2 = \begin{pmatrix} -\tau/2 & \tau/2c \\ -\tau c/2 & \tau/2 \end{pmatrix}, \quad S_{12} = \begin{pmatrix} (1 - \tau)/2 & \tau/2c \\ (1 - \tau)c/2 & \tau/2 \end{pmatrix}.$$

Далее находим элементы матрицы $S_{123} = \begin{pmatrix} s_{123} & d_{123} \\ c_{123} & s'_{123} \end{pmatrix}$:

$$s_{123} = 2(\rho_{123}\sigma_{123} - (0.5 - \rho_{45})(0.5 - \sigma_{45})) = 0, \quad s'_{123} = 1 - 0 = 1,$$

$$c_{123} \cdot d_{123} = s_{123} \cdot s'_{123} - \rho_{123} \cdot \sigma_{123} = 0 \Rightarrow c_{123} = 0.$$

Тогда

$$S_3 = S_{123} - S_{12} = \begin{pmatrix} (\tau - 1)/2 & d_{123} - \tau/2c \\ (\tau - 1)c/2 & 1 - \tau/2 \end{pmatrix}.$$

Так как $\det S_3 = 0$, то

$$1 - \frac{\tau}{2} - c(d_{123} - \frac{\tau}{2c}) = 0 \Rightarrow c \cdot d_{123} = 1$$

и

$$S_{123} = \begin{pmatrix} 0 & 1/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} (\tau - 1)/2 & (1 - \tau/2)c \\ (\tau - 1)c/2 & 1 - \tau/2 \end{pmatrix}.$$

Наконец, находим элементы матрицы $S_{1234} = \begin{pmatrix} s_{1234} & d_{1234} \\ c_{1234} & s'_{1234} \end{pmatrix}$:

$$s_{1234} = 2(\rho_{1234}\sigma_{1234} - (0.5 - \rho_5)(0.5 - \sigma_5)) = 0.5, \quad s'_{1234} = 1.5 - 0.5 = 1,$$

$$S_{1234} = \begin{pmatrix} 1/2 & d_{1234} \\ c_{1234} & 1 \end{pmatrix}, \quad \det S_{1234} = 0.5 \Rightarrow c_{1234} \cdot d_{1234} = 0 \Rightarrow d_{1234} = 0 \text{ и}$$

$$S_4 = S_{1234} - S_{123} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/c \\ c_{1234} & 0 \end{pmatrix}, \quad \det S_4 = 0 \Rightarrow c_{1234} = 0.$$

Следовательно,

$$S_{1234} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_4 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/c \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а матрицу S_5 можно найти по формуле

$$S_5 = S - S_{1234} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы S_k ($k = 1, \dots, 5$) являются матрицами-вычетами системы (9), которая принимает вид

$$\frac{dX}{d\zeta} = X \times$$

$$\times \left[\frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{c}{2} & 0 \end{pmatrix}}{\varsigma - a} + \frac{\begin{pmatrix} -\tau/2 & \tau/2c \\ -\tau c/2 & \tau/2 \end{pmatrix}}{\varsigma + 1} + \frac{\begin{pmatrix} (\tau-1)/2 & (1-\tau/2)/c \\ (\tau-1)c/2 & 1-\tau/2 \end{pmatrix}}{\varsigma - a'} + \frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{c} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{\varsigma} \right] \quad (14)$$

где c — произвольная постоянная.

Запишем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, соответствующее матричному уравнению (14). Пусть

$$X(\varsigma) = \begin{pmatrix} u(\varsigma) & u_1(\varsigma) \\ v(\varsigma) & v_1(\varsigma) \end{pmatrix}.$$

Подставив эту матрицу в уравнение (14), получим систему дифференциальных уравнений, связывающую функции $u(\varsigma)$ и $u_1(\varsigma)$:

$$\begin{aligned} u' &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varsigma - a} - \frac{\tau}{\varsigma + 1} + \frac{\tau - 1}{\varsigma - a'} + \frac{1}{\varsigma} \right) u + \frac{c}{2} \left(\frac{1}{\varsigma - a} - \frac{\tau}{\varsigma + 1} + \frac{\tau - 1}{\varsigma - a'} \right) u_1, \\ u_1' &= \frac{1}{2c} \left(\frac{\tau}{\varsigma + 1} + \frac{2 - \tau}{\varsigma - a'} - \frac{2}{\varsigma} \right) u + \frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{\varsigma + 1} + \frac{2 - \tau}{\varsigma - a'} \right) u_1. \end{aligned} \quad (15)$$

Функции $v(\varsigma)$ и $v_1(\varsigma)$ также являются решениями системы (15). Выразим из первого уравнения системы (15) функцию $u_1(\varsigma)$, предварительно преобразовав стоящий перед ней множитель:

$$\begin{aligned} \frac{c}{2} \left(\frac{1}{\varsigma - a} - \frac{\tau}{\varsigma + 1} + \frac{\tau - 1}{\varsigma - a'} \right) &= \frac{1}{c} \frac{(\tau + a + a'(\tau - 1))\varsigma - (a' + \tau + a(\tau - 1))}{(\varsigma + 1)(\varsigma - a')\varsigma} = \\ &= \frac{1}{c} \frac{(a - \frac{1}{a} + \tau(\frac{1}{a} + 1))\varsigma - (\frac{1}{a} - a + \tau(a + 1))}{(\varsigma + 1)(\varsigma - a')\varsigma} = \frac{(a + 1)}{ca} \cdot \frac{(\tau + a - 1)\varsigma - (a\tau - a + 1)}{(\varsigma + 1)(\varsigma - a')\varsigma} = \\ &= \frac{(a + 1)(\tau + a - 1)}{ca} \cdot \frac{\varsigma - b}{(\varsigma + 1)(\varsigma - a')\varsigma}, \end{aligned}$$

где введено обозначение $b := \frac{\tau a - a + 1}{\tau + a - 1}$. Поэтому

$$u_1 = \frac{2(\varsigma - a)(\varsigma + 1)(\varsigma - a')}{c(1 + a')(\varsigma - b)} \left[u' - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varsigma - a} - \frac{\tau}{\varsigma + 1} + \frac{\tau - 1}{\varsigma - a'} + \frac{1}{\varsigma} \right) u \right].$$

Подставляя $u_1(\varsigma)$ во второе уравнение (15), получим дифференциальное уравнение второго порядка, фундаментальной системой решений которой являются функции $u(\varsigma)$ и $v(\varsigma)$. Это дифференциальное уравнение класса Фукса с семью особыми точками $a, -1, a', 0, 1, b, \infty$ [9, 10]:

$$\begin{aligned} u'' + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varsigma - a} + \frac{2}{\varsigma + 1} + \frac{1}{\varsigma - a'} - \frac{1}{\varsigma} - \frac{2}{\varsigma - b} \right) u' \\ + \frac{1}{2\varsigma} \left(\frac{1 + \tau/2}{\varsigma + 1} - \frac{1 - \tau/2}{\varsigma - a'} + \frac{1}{\varsigma} + \frac{1}{\varsigma - b} \right) u = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Используя символ Римана, совершим преобразования уравнения (16)

$$P \begin{pmatrix} a & -1 & a' & 0 & 1 & b & \infty \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \sqrt{\varsigma} P \begin{pmatrix} a & -1 & a' & 0 & 1 & b & \infty \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

и возвратимся к исходной переменной $z = \frac{\pi}{2} \frac{1+\varsigma}{1-\varsigma}$.

Функция $y = \sqrt{\frac{z+\pi/2}{z-\pi/2}}u$ является решением следующего дифференциального уравнения:

$$y'' + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z+\psi} + \frac{1}{z-\psi} - \frac{1}{z+\pi/2} - \frac{1}{z-\pi/2} + \frac{2}{z} - \frac{2}{z-b} \right) y' + \frac{(\tau-2)z+\psi\tau}{2z(z^2-\psi^2)(z^2-\pi^2/4)} y = 0 \quad (17)$$

Фундаментальная система решений $\tilde{u}_k(z)$ и $\tilde{v}_k(z)$ этого уравнения в окрестности каждой особой точки $b_1 = -\pi/2$, $b_2 = -\psi$, $b_3 = 0$, $b_4 = \psi$, $b_5 = \pi/2$, $b_6 = \infty$ представлена в виде рядов [10]:

$$\tilde{u}_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(k)} (z-b_k)^n, \quad k=1, \dots, 5, \quad \tilde{u}_6(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(6)} z^{-n},$$

$$\tilde{v}_k(z) = \sqrt{z-b_k} \sum_{n=0}^{\infty} D_n^{(k)} (z-b_k)^n, \quad k=1, 2, 4, 5,$$

$$\tilde{v}_3(z) = \frac{1}{2\pi i} \ln z \cdot u_k(z) + \sum_{n=0}^{\infty} D_n^{(3)} z^n, \quad \tilde{v}_6(z) = -\frac{1}{2\pi i} \ln z \tilde{u}_6(z) + \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{(6)} z^{-n},$$

коэффициенты $C_n^{(k)}$, $D_n^{(k)}$ которых находятся из рекуррентных соотношений после подстановки рядов в уравнение (17). В окрестности точки $z=b$ уравнение (17) имеет два линейно независимых решения вида

$$\tilde{u}_b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(b)} (z-b)^n \quad \text{и} \quad \tilde{v}_b(z) = (z-b)^2 \sum_{n=0}^{\infty} D_n^{(b)} (z-b)^n.$$

Каноническая матрица $X(z)$ краевой задачи (7) в окрестности особых точек a_k ($k=1, \dots, 6$) имеет вид

$$X^+(z) = \sqrt{\frac{z-\pi/2}{z+\pi/2}} \cdot C_k \begin{pmatrix} \tilde{u}_k & \tilde{u}'_k \\ \tilde{v}_k & \tilde{v}'_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & (1-\tau/2)\psi \\ 0 & z(z^2-\psi^2)/(z-b) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad X^-(z) = A_2 X^+(z), \quad (18)$$

где C_k — матрица, приводящая матрицу V_k к нормальной жордановой форме.

Решение задачи (7) находим через интеграл типа Коши по формулам

$$\Phi^{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i} X^{\pm}(z) \sum_{k=0}^5 \int_{b_k}^{b_{k+1}} [X^+(x)]^{-1} G_k(x) \frac{dx}{x-z}, \quad b_0 = -\infty, \quad b_6 = +\infty. \quad (19)$$

Зная функции $\Phi^{\pm}(z) = (\Phi_1^{\pm}(z), \Phi_2^{\pm}(z))$, строим решения, удовлетворяющие условиям симметрии $\Phi^*(z) = \frac{1}{2} (\Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})})$. Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема. *Решение задачи (1)–(4) имеет вид*

$$F_1(z) = \frac{1}{2} (\Phi_1^+(z) + \overline{\Phi_1^-(\bar{z})}) \quad \text{и} \quad F_2(z) = \frac{1}{2} (\Phi_2^-(z) + \overline{\Phi_2^+(\bar{z})}),$$

где функции $\Phi^{\pm}(z)$ определяются по формулам (20), а матрицы $X^{\pm}(z)$ находятся по формулам (18).

Следствие. *Суммарный индекс $\mathfrak{A}$, частные индексы $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ неоднородной краевой задачи (7) соответственно равны*

$$\mathfrak{A} = -\sum_{k=1}^6 (\rho_k + \sigma_k) = -2, \quad \mathfrak{A}_1 = \left[\frac{1-\chi}{2} \right] = -1, \quad \mathfrak{A}_2 = \left[\frac{-\chi}{2} \right] = -1.$$

Отсюда следует, что задача (1) имеет единственное решение при выполнении одного матричного условия разрешимости:

$$\sum_{k=0}^5 \int_{b_k}^{b_{k+1}} [X^+(x)]^{-1} G_k(x) dx = 0.$$

Литература

1. Жидков А.В., Леонтьев Н.В. Моделирование поведения гиперупругих материалов: Учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2019.
2. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
3. Хвоцкая Л.А. Решение одной задачи теории упругости. Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. Мн., 2000. Т. 5. 136–141.
4. Амеликин В.В., Василевич М.Н., Хвоцкая Л.А. Об одном подходе к решению смешанных задач теории упругости. Известия Национальной академии наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2021. Т. 57, №3. С. 263–273.
5. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968, 511 с.
6. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977, 448 с.
7. Еругин Н.П. Проблема Римана. Мн.: Наука и техника, 1982, 336 с.
8. Khvoshchinskaya L., Rogosin S. On a solution method for the Riemann problem with two pairs of unknown functions. *Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE-2018* (M. V. Dubatovskaya, S. V. Rogosin Eds.) Cambridge Scientific Publishers. 2020. 79–112.
9. Матвеев П.Н. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений: Учебное пособие. СПб.: Издательство «Лань», 2008.
10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.